VORLESUNGEN

ÜBER

ELEKTRICITÄT

GEHALTEN AN DER

UNIVERSITÄT ZU WIEN

VON

DR. FRANZ EXNER

A. Ö. PROFESSOR DER PHYSIK

CORRESP. MITGLIED DER KAISERL. AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

LEIPZIG UND WIEN.

FRANZ DEUTICKE.

1888.

VORWORT.

Bei dem grossen Umfange welchen gegenwärtig die elektrischen Disciplinen angenommen haben, wird Jeder, der Vorlesungen über Elektricität hält, von vorneherein darauf verzichten müssen etwas auch nur annähernd Vollständiges zu bieten; es werden solche Vorlesungen stets einzelne Partien ausführlicher, andere dagegen oberflächlicher oder gar nicht behandeln. So wird man z. B. im vorliegenden Buche die Lehre von der Thermoelektricität, der Elektrodynamik u. a. vollständig vermissen, dagegen einige sonst wenig behandelte Probleme ausführlicher erörtert finden. Wenn dabei der Elektrostatik ein verhältnissmässig grosser Raum zugemessen wurde, so entsprang dies der Anschauung, dass ein richtiges Verständniss der galvanischen Erscheinungen nur durch eine genauere Kenntniss der elektrostatischen Gesetze angebahnt werden kann, eine Anschauung die umsomehr an Berechtigung gewinnt, je weiter diese beiden Gebiete äusserlich, durch die Fortschritte der Praxis, auseinandergehalten werden.

Wien, Juni 1888.

F. Exner.

*

INDEX.

I. Theil. Elektrostatik.

Seite

VIII. Capitel. Energie elektrischer Ladungen.

IX. Capitel. Zusammenhang zwischen Kraft und Ladung.

X. Capitel. Zweite Differentialquotienten des Potentials.

XI. Capitel. Kraftströmung und Induction.

XII. Capitel. Capacität.

XIII. Capitel. Elektrostatische Messungen.

XIV. Capitel. Dielektrica.

II. Theil. Galvanismus.

I. THEIL.

Elektrostatik.

Einleitung.

Die Aufgabe, welche wir im Nachfolgenden zu lösen haben werden, besteht in dem Studium der Erscheinungen, die wir an elektrisirten oder, kurz gesagt, an elektrischen Körpern wahrnehmen; es wird nicht überflüssig sein, von vornherein den Umfang dieser Aufgabe, sowie die Methoden, deren wir uns bedienen wollen, kurz zu charakterisiren. Es ist allgemein bekannt, dass die elektrischen Phänomene sich in zwei grosse Hauptgruppen theilen lassen, die sich, in ihrer äusseren Erscheinung wenigstens, sehr von einander unterscheiden; ganz anders nämlich treten uns die Wirkungen der Elektricität entgegen, wenn dieselbe sich auf den Körpern, die wir untersuchen, in Ruhe befindet oder wenn sie sich in denselben bewegt. Phänomene, wie z. B. die Anziehung eines leichten Körperchens durch eine geriebene Glasstange einerseits, und das Leuchten einer Geissler'schen Röhre andererseits, sind scheinbar so differenter Natur, dass man sie kaum ein und demselben Agens zuschreiben möchte, und doch werden wir die wirksamen Kräfte hier wie dort als die gleichen kennen lernen.

Trotz dieser Gleichheit der wirkenden Ursachen hat man die beiden Gebiete stets getrennt behandelt: erstens aus historischen Rücksichten, denn die Wirkungen der ruhenden Elektricität auf andere Körper sind schon seit dem Alterthume bekannt und die Gesetze ihrer Wirkung wurden zumeist schon im Laufe des vorigen Jahrhunderts von ausgezeichneten Physikern studirt und ergründet; die Kenntniss der besonderen Wirkungen sich bewegender Elektricität verdanken wir dagegen erst dem Ende des vorigen Jahrhunderts, wo dieselben von Galvani entdeckt wurden; bis zu einer Kenntniss

ihrer Wirkungsgesetze war aber noch eine lange Reihe von Jahre erforderlich. — Ausser diesem aus der historischen Entwicklung de Dinge sich ergebenden Grunde für die Trennung beider Gebiete sprich aber zweitens noch der Umstand, dass es nicht wohl möglich is die Erscheinungen bewegter Elektricität richtig zu verstehen, inso lange man nicht mit den Wirkungsgesetzen der ruhenden vollkomme vertraut ist. Es sei mir gestattet, hier die Vermuthung auszusprechen dass die falschen und ganz absonderlichen Vorstellungen, denen ma oft bei praktisch sehr geschulten Elektrikern begegnet, eben in de mangelnden Vertrautheit mit den Gesetzen der ruhenden Elektricitä ihren Grund haben; andererseits scheint es aber auch, dass di enormen Fortschritte des letzten Decenniums auf elektrotechnische Gebiete erst ermöglicht waren, seit die Lehre von der ruhende Elektricität durch die allgemeine Einführung der Potentialtheori während der vorausgegangenen Jahrzehnte auf eine rationelle Basi gestellt war. Es wird sich daher empfehlen, auch weiterhin dies Trennung in zwei Gebiete beizubehalten: in das Gebiet der Elektro statik, das alle Erscheinungen umfassen soll, die uns Körper zeigen auf denen sich elektrische Ladungen in Ruhe befinden, und in da Gebiet des Galvanismus, bei welchem wir uns mit den Gesetze der bewegten Elektricität zu beschäftigen haben werden. Wir werde naturgemäss mit der Behandlung des ersten Gebietes beginnen.

Was die Methoden anlangt, deren wir uns im Folgenden bediene wollen, so sei darüber nur bemerkt, dass wir uns weder streng a das Experiment, noch streng an die Rechnung halten wollen; w werden vielmehr jeweilig den Weg gehen, der uns schneller zum Zie führt, sei es nun der experimentelle oder der theoretische. Es i eine Meinung, die man oftmals vertreten findet, dass das Gebiet vo Erscheinungen, welches einer physikalischen Forschung zugänglic ist, in zwei Unterabtheilungen zerfällt, in das der theoretische Physik und in das der Experimentalphysik. Das ist eine gar irrige Anschauung; es gibt nur eine Natur, und beide Discipline verfolgen in der Erkenntniss derselben genau das gleiche Ziel, ab sie thun das auf verschiedenen Wegen. Der Zweck ist derselbe, ab die Methoden sind verschieden. Nun gibt es allerdings stets ei Reihe von Problemen, welche nach der einen Methode leichter gelö werden können als nach der andern, oder die auf dem einen We vielleicht ganz unlösbar sind, und daher mag es kommen, dass b einer einseitigen Behandlung des Stoffes nach der einen oder andere Richtung im Laufe der Zeit eine gewisse Summe von Probleme

nur der Experimentalphysik, eine andere nur der theoretischen Physik zugeschrieben wurde. Dieser Umstand kann aber nur von nachtheiligen Folgen sein, denn ein jedes Studium wird dadurch nothwendig lückenhaft, und es ist sehr zu wünschen, dass diese scharfe Trennung beider Disciplinen allmälig verschwinde.

Auch ist es eine sehr verbreitete Ansicht, dass die Resultate, zu denen wir auf theoretischem Wege gelangen, mehr Vertrauen verdienen, als diejenigen, welche uns das Experiment ergibt; denn, sagt man, bei Anstellung eines Experimentes können Factoren mitspielen, die uns vielleicht unbekannt sind, auch können wir uns in der Auslegung des thatsächlich Beobachteten irren, die Rechnung dagegen kann nur ein verlässliches Resultat ergeben. Nun, ein derartiger Schluss wäre wohl sehr ungerecht; allerdings können wir uns bei Auslegung eines Experimentes täuschen, die Rechnung dagegen täuscht uns nicht, wir müssen aber bedenken, dass eine jede Rechnung nur von gewissen Voraussetzungen aus gemacht werden kann, und ob diese Voraussetzungen richtig sind — und damit auch das erhaltene Resultat — das entscheidet immer wieder einzig und allein die Erfahrung, also das Experiment. Wer eine anschauliche Vorstellung davon bekommen will, dass theoretisch gewonnene Resultate auch sehr fraglich sein können, der braucht nur die zahlreichen Controversen in der physikalischen Literatur des letzten Jahrzehnts zu verfolgen; er wird den Eindruck bekommen, dass selten experimentelle Untersuchungen ein so zweifelhaftes Resultat ergaben, wie hier die theoretischen.

Um den Unterschied möglichst klar zu machen, der zwischen der experimentellen und der theoretischen Behandlungsweise eines gegebenen Problems besteht, will ich hier einen höchst einfachen Fall wählen: es sei die Beziehung aufzufinden, welche bei einem frei fallenden Körper zwischen dem zurückgelegten Wege und der dazu benöthigten Zeit besteht. Sollen wir diese Frage zunächst auf experimentellem Wege lösen, so würden wir etwa folgendermassen verfahren: wir verschaffen uns einen Fallkörper, z. B. eine Bleikugel, und sorgen dafür, dass wir denselben längs einer verticalen Stange, die in Meter und Centimeter getheilt ist, von beliebiger Höhe herabfallen lassen können, wie dies ja in ähnlicher Weise seinerzeit von Galilei wirklich gemacht wurde. Haben wir ausserdem noch ein Zeitmaass, etwa einen Secundenzähler zur Verfügung, so haben wir alles, was wir zur Lösung der Aufgabe benöthigen. Wir lassen nun den Körper von einer beliebigen Höhe herabfallen und beobachten die Zeit, welche

er dazu benöthigt; beträgt dieselbe weniger als 1 Secunde, so hebe wir seine Anfangsstellung an der Stange so weit, dass er zum Herat fallen genau 1 Secunde gebraucht; nun lesen wir den Stand diese Anfangsstellung an der Theilung ab und finden, dass seine Höh über dem Boden 5 m (in runder Zahl) betrug. Wir reguliren darau seine Anfangsstellung in der Art, dass er zum Herabfallen gena 2 Secunden gebraucht; hierfür finden wir eine Höhe von 20 m. Ebens finden wir für 3 Secunden eine Höhe von 45 m, und so fahren w fort für 4, 5 etc. Secunden. Wenn wir die so gewonnenen Resultat in einer Tabelle ordnen, in der wir unter t die benöthigten Zeite in Secunden und unter s die zurückgelegten Wege in Metern schreibe so erhalten wir Folgendes:

t	s
1	5
2	20
3	45
.	.
.	.
.	.

Es ist nicht schwer, in dieser Zahlenfolge eine gewisse Gesetz mässigkeit zu erkennen, besonders wenn wir die Werthe unter s i einer etwas anderen Form schreiben. Wir erhalten dann:

t	s
1	$5 = 5 \cdot 1$
2	$20 = 5 \cdot 4$
3	$45 = 5 \cdot 9$
.	. .
.	. .
.	. .
.	. .

Hieraus entnimmt man ohne Weiteres das bekannte Gesetz dass die zurückgelegten Wege den Quadraten der benöthigten Zeite proportional sind, und damit hätten wir die fragliche Beziehung au rein experimentellem Wege gefunden. Dieses Versuchsergebniss charak terisirt den Vorgang beim freien Fall vollkommen, weiter aber auc nichts; es sagt uns gar nichts über die etwaigen Ursachen, welch den freien Fall bedingen, und wollen wir aus demselben doch au diese einen Schluss ziehen, so liegen die Prämissen dieses Schlusse zum Theil schon ausserhalb unseres Experimentes, und es ist woh

möglich, dass wir so trotz der Richtigkeit des Versuches auf eine ganz falsche Ursache desselben schliessen. Wir haben dann eben ein richtiges Experiment falsch interpretirt. Da es uns nun bei Erforschung der Natur nicht nur um die Ergründung der Gesetzmässigkeit in den Vorgängen zu thun ist, sondern hauptsächlich um die Erkenntniss der wirksamen Ursachen, so ist klar, dass wir niemals bei dem nackten Ergebnisse des Experimentes stehen bleiben werden; und hier ist der Punkt, wo das Irren beginnt. Die Kunst des Experimentirens besteht nun darin, die Versuchsbedingungen so zu wählen und die Experimente so zu variiren, dass ein Fehlschluss von denselben auf die wirksamen Ursachen möglichst erschwert wird.

Wir wollen nun versuchen, die oben gestellte Aufgabe auch auf dem zweiten uns zu Gebote stehenden Wege zu lösen, auf dem der Theorie. Dazu ist es, wie schon erwähnt, nothwendig, unserer Rechnung irgend eine bestimmte Voraussetzung über die Natur der wirksamen Ursache zu Grunde zu legen, aus der wir dann den Verlauf des Phänomens gleichsam herausconstruiren können. Wir setzen voraus, dass die Ursache der Fallbewegung in einer Kraft zu suchen sei, welche zwischen der Erdmasse und dem Körper thätig ist und welche auf letzteren permanent und mit stets gleicher Intensität einwirkt. Unter dem Einfluss einer solchen Kraft kann die Geschwindigkeit des fallenden Körpers keine constante sein; in der Gleichung $c = \frac{ds}{dt}$, wo c die Geschwindigkeit, s den Weg und t die Zeit bedeutet, ist also c eine mit der Zeit variable Grösse. Eine andere Grösse aber wird constant sein, nämlich der Geschwindigkeitszuwachs in der Zeiteinheit oder das was wir die Beschleunigung nennen.

In der Gleichung $\frac{dc}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g$ ist also g — die Beschleunigung — eine Constante. Wenn wir letztere Gleichung zweimal integriren und berücksichtigen, dass wir die Zeit t vom Beginne des Falles aus zählen, so gelangen wir sofort zu der Relation: $s = \frac{g}{2} t^2$, d. h. der zurückgelegte Weg ist proportional dem Quadrate der benöthigten Zeit. Wir kommen also so lediglich durch Rechnung zu demselben Resultate, wie früher durch das Experiment. Allein das Resultat der Rechnung hat nur Anspruch auf Richtigkeit, wenn die Voraussetzung, von der ausgegangen wurde, richtig ist; haben wir auf irgend welche Weise die Ueberzeugung gewonnen, dass die Ursache des freien Falles in einer constant wirkenden Kraft wirklich

zu suchen sei, dann können wir auch das Resultat der Rechnung getrost als das Gesetz des freien Falles betrachten: wäre andererseits die Voraussetzung der constanten Kraft nur hypothetischer Natur gewesen, so würden wir in der Uebereinstimmung der Resultate' von Rechnung und Beobachtung eine mächtige Stütze für die gemachte Hypothese finden. Ein Beweis für die Richtigkeit derselben läge darin aber keineswegs, denn diese Uebereinstimmung beweist nur die Zulässigkeit, keineswegs aber die Nothwendigkeit der gemachten Hypothese; man würde vielleicht auch von anderen Hypothesen ausgehend zu demselben Resultate gekommen sein, alle diese wären dann zulässig, wenngleich nur eine richtig sein kann. Die Geschichte der Physik zeigt uns zahlreiche hierhergehörige Beispiele, ich erinnere nur an den langen Streit zwischen Emanations- und Undulationstheorie des Lichtes; von zwei ganz differenten Hypothesen über die Natur des Lichtes ausgehend, war man da zu Resultaten gekommen, die beiderseits mit der Erfahrung in Uebereinstimmung waren, so dass beide Hypothesen als gleichberechtigt angesehen werden mussten, bis erst in später Zeit ein experimentum crucis zu Gunsten der Undulationstheorie entschied.

Wenn wir also im Nachfolgenden uns theils der experimentellen, theils der theoretischen Methode bedienen werden, so müssen wir uns dabei stets gegenwärtig halten, dass keine von diesen irgend einen inneren Vorzug vor der anderen hat, sondern dass es nur Utilitätsgründe sind, die uns bestimmen, in jedem gegebenen Falle die eine oder die andere zu wählen; während wir beim Experimentiren aus den Beobachtungsresultaten a posteriori auf die wirkenden Ursachen schliessen, gehen wir bei der theoretischen Behandlung eines Problemes von einer a priori gemachten Hypothese aus und verificiren diese hinterher durch den Vergleich ihrer Consequenzen mit den Ergebnissen der Erfahrung. Hierin liegt der wesentlichste Unterschied beider Methoden. — Nach diesen allgemeinen Andeutungen über die Behandlungsweise des Stoffes wollen wir zum eigentlichen Gegenstande übergehen.

I. Capitel.

Fundamentalversuche.

§ 1. Elektrostatische Grundversuche.

Ob ein Körper elektrisch sei oder nicht, das beurtheilen wir einzig und allein nach den Kräften, welche er auf andere Körper ausübt. Zunächst ist es das Auftreten gewisser Anziehungskräfte, das uns veranlasst, den Körper als in einem neuen, dem elektrischen Zustande befindlich zu betrachten; diese Anziehungskraft übt derselbe auf alle ihn umgebenden Körper aus, die, wenn sie genügend leicht beweglich sind, der Kraft auch Folge leisten und sich gegen den elektrischen Körper zu bewegen. Es kann diese Anziehungskraft nicht leicht mit einer anderen in der Natur allgemein verbreiteten verwechselt werden, mit der Gravitation, denn letztere ist so gering an Intensität, dass wir ihre Wirkung zwischen zwei Massen, mit denen wir experimentiren, nur äusserst schwer wahrnehmbar machen können, und ohne besondere Hilfsmittel dieselbe überhaupt nicht bemerken. Auch mit einer anderen, an Intensität ebenbürtigen Anziehungskraft, mit der eines Magneten kann die elektrische nicht leicht verwechselt werden, denn der Magnet wirkt, wenigstens in augenfälliger Weise, nur auf Körper von bestimmter chemischer Constitution, wie Eisen und Stahl, der elektrische Körper dagegen übt seine Anziehung auf alle Objecte unabhängig von deren chemischer Zusammensetzung aus. Wir werden also in der Eigenschaft eines Körpers, auf alle anderen Anziehungskräfte von beträchtlicher Intensität und auf bedeutende Distanz auszuüben einen genügenden Grund zu der Annahme finden, dass dieser Körper sich in einem neuen, dem sogenannten elektrischen Zustande befinde. Der Mittel, die wir besitzen, um einen Körper in diesen Zustand zu versetzen, gibt es mancherlei; das schon seit den ältesten Zeiten her gebräuchliche ist, wie bekannt, die Reibung. Wenn wir irgend einen Körper mit irgend einem andern reiben, so erhält er dadurch die Fähigkeit, Anziehungskräfte auf seine Umgebung auszuüben, d. h. er wird elektrisch; obgleich diese Eigenschaft eine ganz allgemeine ist und, wie gesagt, für alle Körper gilt, so zeigt sich doch, dass die Intensität der solchermassen erzeugten Elektrisirung bei verschiedenen Substanzen auch eine ganz verschiedene ist.

Am stärksten zeigt sich die Wirkung, wenn wir Substanzen wie Glas, Harz, Kautschuk, Papier, Pelzwerk, Hartgummi, Guttapercha u. dgl. der Reibung unterwerfen; am Bernstein (ἤλεκτρον)

wurde ja diese Eigenschaft am frühesten entdeckt. Wenn wir die gleiche Wirkung nicht auch an anderen Körpern, wie z. B. Flüssigkeiten und Metallen beobachten, so hat das seinen Grund nicht darin, dass bei Reibung dieser Substanzen keine Elektricität erzeugt wird, sondern nur in dem Umstande, dass auf diesen die durch die Reibung erzeugten elektrischen Ladungen schwerer haften bleiben und daher auch schwerer zu beobachten sind; dass sie aber doch auftreten, lässt sich durch geeignete Versuche sehr leicht nachweisen. Man hat sich in früherer Zeit vielfach bemüht, die verschiedensten Substanzen auf ihre Elektrisirbarkeit durch Reibung zu prüfen, um wo möglich irgend eine Gesetzmässigkeit zu entdecken; diese Versuche sind ziemlich fruchtlos geblieben und wir wollen uns daher auch nicht weiter damit beschäftigen.

Wenn wir also einem leicht beweglich aufgehängten Pendelchen, z. B. einer Hollundermarkkugel, oder einem Papierballon eine Glasstange nähern, die wir vorher mit einem (amalgamirten) Lederlappen gerieben haben, so werden wir eine Bewegung des Pendelchens wahrnehmen, die das Vorhandensein einer Anziehungskraft zwischen den beiden Körpern anzeigt; diese Anziehungskraft ist es, aus der wir auf den elektrischen Zustand der Glasstange schliessen. Wenn wir nun Alles sich selbst überlassen, so werden wir beobachten, dass mit der Zeit diese Anziehungskraft allmälig abnimmt, d. h. dass der elektrische Zustand der Glasstange oder die hypothetische, durch Reibung erzeugte elektrische Ladung derselben allmälig verschwindet. Wenn wir nach der Ursache dieser Erscheinung forschen, so finden wir, dass diese Ladung nicht wirklich verschwunden ist, sondern dass sie sich nur den umgebenden Körpern, der Luft mit ihrem Staub, der Hand oder der sonstigen Stütze der Glasstange mitgetheilt hat, so dass auf letzterer selbst gar keine oder nur mehr eine sehr geringe Ladung zurückbleibt. Diesen Process können wir auf künstlichem Wege noch wesentlich beschleunigen. Wenn wir z. B. mit der Hand, mit einem Metall oder mit irgend einem feuchten Körper über die ganze Oberfläche der Glasstange wegwischen, so hat dieselbe sofort ihre ganze Ladung und damit auch ihre Anziehungskraft auf das Pendelchen verloren. Weniger schnell gelangen wir zum Ziele, wenn wir dieselbe Procedur mit einem Seidentuch wiederholen, und gar nicht unter Anwendung eines Stückes Paraffin, Harz, Siegellack oder Guttapercha. Wir schliessen daraus, dass diese verschiedenen Substanzen nicht in gleichem Masse die Fähigkeit haben, eine elektrische Ladung von einem anderen Körper aufzunehmen, respective dieselbe an ferner

damit in Verbindung stehende Körper weiter abzugeben, oder dass sie — wie wir uns gewöhnlich auszudrücken pflegen — nicht die gleiche Fähigkeit haben, Elektricität zu leiten. Sowie wir in Bezug auf die Wärme gute und schlechte Leiter unterscheiden, so müssen wir es auch in Bezug auf die Elektricität thun, und es mag gleich hier erwähnt werden, dass zwischen diesen beiden Erscheinungen, der Wärmeleitung und der Elektricitätsleitung, nicht nur ein äusserlicher, sondern auch ein innerer Zusammenhang zu bestehen scheint, denn es findet sich fast ausnahmslos das Gesetz bestätigt, dass die besseren Wärmeleiter auch die besseren Elektricitätsleiter sind. Doch sind die Unterschiede im Leitungsvermögen für Elektricität bei verschiedenen Substanzen weit grössere, als in Bezug auf Wärme, wie später noch zu zeigen Gelegenheit sein wird.

Wir müssen demnach aus dem Angeführten schliessen, dass die Metalle und die feuchten Körper bessere Leiter der Elektricität sind als die Seide oder als Paraffin und Siegellack etc. Wenn sich auch zwischen diesen beiden Gruppen von Körpern durchaus keine scharfe Grenze ziehen lässt, da man eine continuirliche Reihe vom besten Leiter bis zum schlechtesten aufstellen kann, so wird man doch ganz passend die Körper, welche das eine Ende dieser Reihe bilden, als Leiter oder Conductoren bezeichnen, die vom andern Ende dagegen als Nichtleiter oder Isolatoren; wenn man ausserdem auch noch von sogenannten Halbleitern spricht und darunter alle Körper, die die Mitte der Reihe bilden, versteht (Holz, Wolle, Papier etc.), so hat das wohl keine präcise Bedeutung.

Aus dem Umstande, dass wir die geriebene Glasstange durch längere Zeit in der Hand halten können, ohne dass sie ihre elektrische Ladung verliert, müssen wir schliessen, dass das Glas selbst ein Isolator sei, denn sonst hätte seine Ladung ebenso durch die Hand auf unsere Körper übergehen müssen, wie dies der Fall ist, wenn wir mit der Hand über die ganze Glasstange wegwischen. Es sitzt also diese Ladung an der Oberfläche des Glases gleichsam fest, und wenn wir das untere Ende eines etwa 1 m langen Glasstabes in der Hand halten, so kann auf uns nur der Theil der Ladung übergehen, mit dem unsere Hand direct in Berührung kommt; einem Uebergang der Ladungen von den anderen Partien des Stabes auf unseren Körper setzt aber das Glas selbst ein Hinderniss entgegen.

Ebenso verhält sich die Sache, wenn wir mit einem geriebenen Harzstabe experimentiren; auch hier bleibt die Ladung auf demselben erhalten, weil Harz ein ausgezeichneter Isolator ist, und man erkennt

die Ursache. warum wir bei derartigen Versuchen immer mit Isola toren (Glas oder Harz) experimentiren, eben in dem Umstande. das auf diesen Körper die durch Reibung erzeugten elektrischen Ladungen leichter festzuhalten sind.

Auch die Gase müssen wir, wenigstens bei den gewöhnlichen Verhältnissen, für sehr schlechte Leiter oder für gute Isolatoren halten denn es wäre sonst nicht möglich, dass elektrische Ladungen sich längere Zeit auf einem Körper halten, der von Luft umgeben ist Wäre das nicht der Fall, wäre z. B. die Luft ein guter Leiter, dann könnten wir unter gewöhnlichen Verhältnissen überhaupt kein elek trisches Phänomen erzeugen, denn eine jede Ladung würde sich sofor im Raum zerstreuen; es ist das Auftreten elektrischer Erscheinungen direct an die Existenz von Isolatoren geknüpft. — Der hier berührte Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren wurde schon im Jahre 1720 von dem englischen Physiker Stephan Gray[1] entdeckt.

Wir kehren nun zu unserem Experimente mit dem Pendelchen zurück. Wenn wir versuchen demselben durch Berührung mit der ge riebenen Glasstange eine elektrische Ladung mitzutheilen, so wird dies so ohneweiters nicht gelingen, wir werden nach der Berührung an dem Pendelchen keine anderen Eigenschaften wahrnehmen wie vorher. Den Grund dieses Verhaltens werden wir leicht in dem Um stande finden, dass die durch die Berührung dem Pendelchen allen falls mitgetheilte Ladung durch die Aufhängevorrichtung weitergeleite wird und sich über die Erde vertheilt, so dass auf dem Pendelchen selbst keine irgend bemerkbare Ladung mehr zurückbleibt. Wollen wir eine solche also dauernd herstellen, dann müssen wir zwischen das Pendel und die Erde einen Isolator einschalten, der ein Ent weichen der Elektricität nach dieser Seite hin ebensowenig gestattet wie es die umgebende Luft nach den anderen Seiten hin thut. Wi werden also das Pendel etwa an einem Seidenfaden aufhängen und daran mit etwas Paraffin oder Siegellack befestigen; wenn wir nun eine Berührung mit der geriebenen Glasstange herstellen, so finden wir allerdings die Eigenschaften des Pendelchens verändert. Wir können nun mit demselben selbst alle Phänomene hervorrufen, die wir früher mit der Glasstange zu erzeugen im Stande waren, es wird andere leichte Körper — etwa ein zweites Pendelchen — anziehen und dieselben, wenn sie isolirt sind, durch Berührung elektrisch machen mit einem Worte, es ist selbst ein elektrischer Körper geworden

[1]) Phil. Trans. 1731.

Berühren wir es mit der Hand, so vertheilt sich seine Ladung wieder über unseren Körper und die Erde, und es erscheint wie vollkommen unelektrisch. Es ist selbstverständlich, dass wir auf solche Weise mit unserem Glasstabe nicht beliebig viele isolirte Pendelchen laden können, sondern dass bei einer jeden solchen Uebertragung die ursprüngliche Ladung der Glasstange etwas abnimmt; die Summe aller Ladungen auf dem Pendelchen und der Glasstange zusammen bleibt constant, es findet bei diesem Processe eben keine Erzeugung von Elektricität, sondern nur eine Neuvertheilung derselben statt. Aus dem Umstande, dass die Elektricität eines geladenen Körpers, wenn derselbe mit anderen Leitern in Contact gebracht wird, die dargebotenen Wege auch immer einschlägt, werden wir schliessen müssen, dass sie das Bestreben hat, sich über die Körper möglichst allseitig zu verbreiten; die Gesetze dieser Ausbreitung können wir aber erst später studiren.

Untersuchen wir nun, wie unsere geriebene Glasstange auf das Pendelchen wirkt, wenn wir die beiden Körper vorher zur Berührung gebracht haben. Diese Wirkung auf einen schon elektrischen Körper ist augenscheinlich eine ganz andere als auf einen unelektrischen. Das Experiment zeigt uns, dass bei allmäliger Annäherung der Glasstange an das Pendel letzteres zurückweicht, dass somit zwischen den beiden Körpern eine Abstossungskraft thätig ist. Man folgert die Existenz einer solchen Abstossungskraft gewöhnlich ganz allgemein aus diesem Versuche, das ist aber ganz unstatthaft, wie man gleich sieht, wenn man das Experiment noch weiter verfolgt.

Nähert man nämlich die Glasstange dem Pendelchen noch mehr, so nimmt die Abstossung allmälig wieder ab, um bei einer gewissen Distanz null zu werden und bei noch weiter fortgesetzter Annäherung beider Körper in Anziehung zu übergehen, die das Pendelchen bis zur Berührung mit der Glasstange treibt. Dabei zeigt sich die Distanz, bei welcher die Abstossung in Anziehung übergeht, wesentlich bedingt durch die Dimensionen der Körper und durch das Verhältniss ihrer Ladungen. Obgleich demnach der Satz, dass Theile ein und derselben ursprünglichen elektrischen Ladung sich abstossen, mit dem Ende dieses Experiments in Widerspruch zu stehen scheint, so hat derselbe doch ganz allgemeine Giltigkeit, denn dieser Widerspruch ist in der That nur ein scheinbarer, hervorgerufen durch eine Complication des Experimentes, die in § 8 näher betrachtet und erläutert werden soll.

Wir können uns von der Richtigkeit des ausgesprochenen Satzes vielleicht am besten auf folgende Weise überzeugen. Machen wir die

einzelnen Theile eines Leiters beweglich, doch so, dass sie bei ihren Bewegungen nicht ausser Zusammenhang mit einander kommen, und theilen wir dann diesem System eine elektrische Ladung mit, z. B. durch Berührung mit der geriebenen Glasstange, so sehen wir alsbald die einzelnen Theile des Leiters solche Bewegungen ausführen, die Abstossungskräften zwischen denselben entsprechen. Das ist z. B. der Fall in dem bekannten Experimente mit dem Papierbüschel, das sich sträubt, sobald man es elektrisirt; das Sträuben der Haare einer elektrisirten Person hat gleichfalls denselben Grund. Wie immer wir dieses Experiment variiren, der Erfolg bleibt stets der gleiche: zwischen den einzelnen Theilen eines elektrisirten Leiters, respective zwischen deren Ladungen, findet stets Abstossung statt, gleichgiltig auf welche Weise und wie stark der Leiter in den elektrischen Zustand versetzt wurde.

Wir können von diesem Umstande zur Construction eines Instruments Gebrauch machen, das uns dazu dienen soll, das Vorhandensein einer elektrischen Ladung auf einem Leiter zu erkennen. Wir brauchen zu diesem Zwecke offenbar nur einen Theil des Leiters beweglich zu machen und zu beobachten, ob auf denselben Abstossungskräfte wirken. Da es nun nicht gut thunlich ist, an jedem beliebigen Leiter derartige mechanische Veränderungen vorzunehmen, so construiren wir uns den beweglichen Theil ein- für allemal und bringen ihn in jedem gegebenen Falle mit dem zu untersuchenden Leiter in Contact, wodurch er ja — in elektrischer Beziehung — ein Theil dieses Leiters wird.

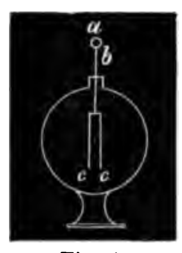


Fig. 1.

Diesem beweglichen Theil, den wir ein **Elektroskop** nennen, geben wir am passendsten die folgende Gestalt und Einrichtung (Fig. 1). An einem Metallstab *b* von etwa 10—15 cm Länge sitzt oben eine Metallkugel *a*; am unteren Ende trägt der Stab zwei möglichst feine, circa 5 cm lange und 0·5 cm breite Metallplättchen *c, c*, entweder aus Schlaggold oder aus Aluminium, die mit *b* und *a* metallisch verbunden sind. Theilt man nun dem Knopfe *a* eine elektrische Ladung mit, etwa dadurch, dass man ihn mit einem elektrisirten Körper berührt, so vertheilt sich diese auch über den Stab *b* und die Plättchen *c, c*, und da letztere sehr leicht beweglich sind, so wird sich die zwischen ihnen auftretende Abstossungskraft in einer Divergenz derselben erkenntlich machen. Wollen wir also untersuchen, ob ein Körper elektrisch sei, so haben wir ihn nur mit dem Knopfe *a* in Berührung zu bringen und zu beachten, ob die Plättchen *c, c* diver-

giren oder nicht. Von der Empfindlichkeit der letzteren hängt natürlich die Grösse der elektrischen Ladung ab, die wir mit dem Instrumente noch nachweisen können. Um die Metallplättchen vor Luftströmungen zu schützen, ist es nothwendig, dieselben in ein geschlossenes Gefäss, etwa eine Glaskugel, einzuschliessen, nur muss dann dafür gesorgt sein, dass der Stab *b* vollkommen isolirt sei.

Um die Wirksamkeit eines solchen Elektroskops zu beobachten, können wir es gleich dazu benützen, verschiedene Substanzen auf ihre Leitungsfähigkeit für Elektricität zu prüfen.

Wir laden zunächst das Elektroskop durch Bestreichen des Knopfes *a* mit einer geriebenen Glasstange, bis die Metallplättchen eine passende Divergenz anzeigen; berühren wir sodann den Knopf mit der Hand, so fallen die Plättchen augenblicklich in ihre frühere Ruhelage zurück, was uns anzeigt, dass die Ladung des Elektroskops durch unseren Körper auf die Erde übergegangen ist. Wir betrachten demnach die Hand und Alles, was dieselbe von der Erde trennt, sowie letztere selbst als verhältnissmässig gute Leiter. Laden wir nun das Elektroskop auf's Neue und berühren dessen Knopf mit einem Stück Paraffin oder Siegellack, das wir in der Hand halten, so sehen wir die Divergenz der Metallplättchen nicht verschwinden, die Ladung verbleibt auf dem Elektroskope: Paraffin und Siegellack sind also Isolatoren. Wiederholen wir denselben Versuch mit einem Stück Glas, das nicht besonders gereinigt ist, so werden wir in den meisten Fällen zwar kein ganz plötzliches Zusammenfallen der Plättchen wahrnehmen, es wird aber selten mehr als einige Secunden dauern, bis das Elektroskop seine Ladung verloren hat; wir haben es also hier mit einem mangelhaften Leiter oder, was dasselbe ist, mit einem schlechten Isolator zu thun. Der Grund hievon ist aber nicht im Glase selbst zu suchen, denn erwärmen wir dasselbe über einer Flamme und trocknen es sorgfältig, so ist aus dem schlechten Isolator plötzlich ein guter geworden, der dem Elektroskop seine Ladung so wenig entzieht wie das Paraffin oder das Siegellack. Man braucht das so gereinigte Glas aber nur etwas zu behauchen, um es gleich wieder in einen leitenden Körper zu verwandeln. In der sehr dünnen Wasserschichte, die sich auf dem Glase in Folge der hygroskopischen Eigenschaften desselben beim Liegen an der Luft niederschlägt, und die so dünn sein kann, dass man sie auf keine andere Weise nachzuweisen im Stande ist, liegt also der Grund von dessen mangelhafter Isolirung. Dass das Wasser thatsächlich die Elektricität gut leitet, das zeigt uns gleichfalls unser Elektroskop an, sobald wir zwischen

dessen Knopf und unseren Finger einen Wassertropfen bringen. Der Umstand, dass gerade Paraffin, Siegellack, Schellack u. dergl. ihre Isolirungsfähigkeit solange bewahren, hat seinen Grund darin, dass sich auf diesen Substanzen die Feuchtigkeit der Luft nicht in einer zusammenhängenden Wasserschichte wie auf dem Glase niederschlägt, sondern in einzelnen, von einander getrennten Tröpfchen, so dass sich nicht leicht eine ableitende Oberflächenschichte bildet.

Nicht nur das Wasser, sondern fast alle Flüssigkeiten (auch geschmolzenes Paraffin) erweisen sich bei Prüfung mit dem Elektroskop als mehr oder minder gute Leiter; gut isolirende Flüssigkeiten sind Benzol, Terpentinöl, Vaselinöl, Olivenöl. Es wurde schon erwähnt, dass die Gase wenigstens bei gewöhnlicher Temperatur sehr gute Isolatoren sind; ob auch bei höherer Temperatur, ist zweifelhaft. Viele Gase, wie z. B. die Verbrennungsgase der Flammen, sind es dann gewiss nicht mehr, denn bringen wir den Knopf des geladenen Elektroskops in den heissen Luftstrom über einer Flamme, etwa 20 bis 40 cm von derselben entfernt, so entladet es sich sehr rasch; dasselbe erfolgt, wenn wir den Knopf direct mit einer Flamme zur Berührung bringen. Es ist darum auch nicht möglich, ein Leitersystem, das eine Flamme enthält, dauernd zu elektrisiren, weil die Ladung sehr rasch durch die Flamme und den aufsteigenden Gasstrom entweicht.

Wenn man versucht, die Experimente mit dem Glasstabe und dem Pendelchen, die oben erwähnt wurden, so abzuändern, dass man an Stelle des Glasstabes einen Harzstab nimmt, den man durch Reiben mit Pelzwerk elektrisch gemacht hat, so kommt man zu sehr merkwürdigen Resultaten. Man beobachtet, dass der Harzstab das Pendelchen anzieht, auch dass er es abstösst, wenn es durch ihn elektrisirt wurde, es verhält sich also scheinbar ganz so wie das durch die geriebene Glasstange elektrisirte Pendel, und doch tritt zwischen beiden ein sehr auffallender Unterschied zu Tage; denn untersuchen wir die Wechselwirkung zwischen den beiden geriebenen Stäben und den zugehörigen Pendeln, so finden wir, dass jeder Stab sein Pendel abstösst, aber das andere anzieht, und zwar noch heftiger, als er ein ganz unelektrisches anziehen würde. Auch stossen sich die beiden Pendel nicht ab, wie es der Fall ist wenn beide durch die Glas- oder beide durch die Harzstange elektrisirt wurden, sondern sie ziehen sich an. Der Entdecker dieses merkwürdigen Verhaltens, der französische Gelehrte Du Fay[1]), erklärte dasselbe durch die Annahme zweier

[1]) Mém. de l'Acad. Paris. (1733—34.)

verschiedener Modificationen der Elektricität, die sich wechselweise anziehen, untereinander aber abstossen sollten. Es ist nicht gelungen eine etwaige dritte derartige Modification aufzufinden, sondern alle Körper, gleichgiltig auf welche Art sie elektrisirt wurden, sind entweder im Sinne der Glasstange oder in dem der Harzstange elektrisch. Man spricht daher von einer Glas- und von einer Harzelektricität oder auch von einer positiven und negativen und bezeichnet dementsprechend Körper als + oder — elektrisch, je nachdem sie im Sinne des Glases oder des Harzes elektrisirt sind. Doch haben wir diese Worte vorläufig nur als eine bequeme und treffende Ausdrucksweise für beobachtete Thatsachen anzusehen, nicht aber für eine Erklärung der letzteren.

Noch ein anderes für die Theorie der Elektricität sehr wichtiges Experiment muss hier erwähnt werden, das zuerst von dem deutschen Gelehrten Aepinus[1]) angestellt wurde. Wenn alle Körper durch Reibung elektrisch werden, so lässt sich erwarten, dass nicht nur die geriebene Glasstange, sondern auch der Körper, mit welchem sie gerieben wurde, elektrische Eigenschaften zeigen werde. Das ist auch in der That der Fall, nur nimmt man sie gewöhnlich nicht wahr, weil man das Reibzeug in der Hand hält und so jede Ladung, die auf demselben erzeugt wird, sofort ableitet: isolirt man aber dasselbe, so findet es sich gleichfalls elektrisch. Man kann den Versuch etwa so ausführen, dass man das Reibzeug einfach auf ein Stück Paraffin legt, letzteres in der Hand hält und so nach der Reibung das Reibzeug und die Stange am Elektroskop prüft. Diese Prüfung ergibt uns aber nicht nur, dass stets beide Körper elektrisch werden, sondern auch, dass sie stets in entgegengesetztem Sinne elektrisch werden, d. h. der eine positiv, der andere negativ; reiben wir den Glasstab, so wird dieser positiv und das Reibzeug negativ, reiben wir aber den Harzstab, so wird dieser negativ und dafür der reibende Pelz positiv. Dieses Gesetz gilt ganz allgemein; aber nicht nur, dass immer beide elektrischen Zustände erregt werden, sie werden auch stets in gleicher Quantität erregt. Das hat gleichfalls Aepinus zuerst gezeigt. Er nahm zwei mit isolirenden Handhaben versehene Scheiben, beklebte die eine mit Pelz und überzog die andere mit Harz. Wurden nun dieselben mittelst der Handhaben isolirt auf einander gerieben, so übten beide Scheiben nach der Trennung von einander kräftige elektrische Wirkungen auf Probekörper aus, die eine im positiven, die

[1]) Tentamen theoriae electricitatis et magnetismi. (1759.)

andere im negativen Sinne. Diese Wirkungen traten aber erst nach der Trennung auf, so lange die Scheiben, obwohl gerieben, aneinandergehalten wurden, wirkten sie nach aussen nicht, trotz ihrer Ladungen, d. h. die Kräfte waren gleich und entgegengesetzt. Da man nun die Kräfte den wirkenden Elektricitätsmengen proportional setzen muss, so ist daraus zu schliessen, dass bei der Reibung + und — Elektricität in gleichen Quantitäten erzeugt wurden. Das ist ein sehr wichtiger Satz, und ich will gleich hier hinzufügen, dass man überhaupt bei jeglicher Art der Elektricitätsentwicklung positive und negative in gleicher Quantität erzeugt; es ist unmöglich, die eine oder die andere allein oder im Ueberschusse hervorzurufen.

So viel vorläufig über das Allgemeine der elektrischen Grundphänomene.

§ 2. Theorien der Elektricität.

Es ist nicht mehr als natürlich, dass Phänomene von so wundersamer Art wie die elektrischen den Geist auf das lebhafteste aufforderten, nicht nur nach ihren Gesetzen, sondern auch nach ihren Ursachen zu forschen; wir haben daher aus der Zeit der Entdeckung der meisten dieser Phänomene, d. i. aus dem vorigen Jahrhunderte, eine Reihe von Hypothesen über das Wesen der Elektricität überliefert bekommen, von denen allen, so interessant sie auch sind, sich bisher keine vollkommen eingebürgert hat. Eine Betrachtung all dieser Theorien ist Gegenstand der Geschichte der Physik und würde weit über die hier zulässigen Grenzen hinausgehen; wir werden uns damit begnügen, aus denselben dasjenige herauszugreifen, was nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft am meisten Berechtigung zu haben scheint.

Angeregt durch die oben erwähnten Entdeckungen Du Fay's bezüglich der zweierlei elektrischen Zustände, hat der englische Gelehrte Rob. Symmer[1]) eine Theorie der Elektricität aufgestellt, die sich bis auf den heutigen Tag ganz unverändert erhalten und gegenwärtig noch die meisten Anhänger hat. Er nimmt an, dass es nicht eine, sondern zwei Arten der Elektricität gibt, eine positive oder Glas- und eine negative oder Harz-Elektricität. Diese beiden hätten wir uns vorzustellen als ausserordentlich feine Fluida, ähnlich dem Aether, die alle Körper zu durchdringen im Stande sind, ohne dass wir deren Existenz durch andere als elektrische Wirkungen wahr-

---

[1]) Phil. Trans. (1759.)

nehmen können. Diese beiden Fluida sollen die Eigenschaft besitzen, sich wechselseitig anzuziehen, untereinander aber sich abzustossen; auch sollen dieselben von vorneherein in jedem Körper in unendlicher Quantität vorhanden sein, doch da sie sich gegenseitig neutralisiren, so wird ein solcher Körper für gewöhnlich unelektrisch erscheinen. Erst wenn wir durch irgend einen Process, etwa durch Reibung, die beiden Fluida im Körper von einander trennen — wobei von dem einen mehr in den geriebenen Körper, von dem anderen mehr in das Reibzeug übergehen soll — werden wir elektrische Wirkungen nach aussen wahrnehmen. Diese Anschauung vom Wesen der elektrischen Vorgänge ist, wie gesagt, heute noch allgemein üblich; es lässt sich aber nicht leugnen, dass sie nach dem gegenwärtigen Stande der Wissenschaft den Stempel der Unwahrscheinlichkeit trägt, womit aber durchaus nicht gesagt sein soll, dass sie nicht seinerzeit berechtigt war und dem Fortschritte unserer Erkenntniss durch mehr als hundert Jahre die wesentlichsten Dienste gethan hat. Wir werden das Gleiche heutzutage auch von der Emanationstheorie des Lichtes sagen müssen und doch wird Jeder sich gerne vor Newton's Genie beugen. Mit der Symmer'schen Theorie, so leicht sich auch die elektrischen Grundversuche aus ihr erklären lassen, da sie eben für diese aufgestellt wurde, stösst man im weiteren Verlaufe auf Widersprüche mit der Erfahrung, die sich nur sehr schwer oder gar nicht lösen lassen; wir werden daher dieselbe gänzlich fallen lassen und die elektrischen Phänomene von einer ganz anderen Anschauung aus behandeln, die nicht nur mit der Erfahrung in vollkommenem Einklang steht, sondern uns in Bezug auf das Wesen derselben auch mehr als lediglich Worte bietet.

Diese Theorie, die im Nachfolgenden allein zu Grunde gelegt werden soll, ist noch etwas älter als die Symmer'sche und stammt von dem genialen Amerikaner Bejamin Franklin[1]). Ihr zufolge hätten wir es nicht mit zweien, sondern nur mit einer einzigen Elektricitätsart zu thun: von dieser enthält ein jeder Körper auch im unelektrischen oder neutralen Zustande eine gewisse Quantität, die sich aber nicht bemerkbar macht, weil eben alle anderen (unelektrischen) Körper der Umgebung in gleichem Maasse geladen sind. Erst wenn ein Körper einen Ueberschuss oder einen Mangel an Elektricität hat im Vergleich zum neutralen Zustande, wird er uns elektrisch gegen die übrigen erscheinen können, denn jetzt erst ist eine Differenz

---

[1]) Phil. Trans. (1751, 55, 57, 60, 62).

zwischen seinem physikalischen Zustande und dem der Umgebung vorhanden. Er wird im Falle eines Ueberschusses an Elektricität über den normalen Gehalt in dem einen Sinne elektrisch erscheinen, im Falle eines Mangels in dem anderen. Welcher von den beiden Zuständen einer positiven und welcher einer negativen Ladung entspricht, das lässt sich natürlich von vorneherein nicht bestimmen und ist überhaupt noch nicht bestimmt. Doch da wir mit dem Begriffe eines Ueberschusses den einer positiven Grösse unwillkürlich verbinden, so hat Franklin die Körper, welche Elektricität im Ueberschusse enthalten sollen, als positive bezeichnet, und, um keine Verwirrung in die Sache zu bringen, wollen wir auch diese Bezeichnung beibehalten. Doch muss ich gleich hier bemerken, dass wir im weiteren Verlaufe Thatsachen kennen lernen werden, welche mit viel Wahrscheinlichkeit dafür sprechen, dass die negative Elektricität die wirklich existirende ist, d. h., dass eine geriebene Harzstange einen Ueberschuss, eine geriebene Glasstange aber einen Mangel an Elektricität im Vergleich zum neutralen Zustande besitzt; doch ist das, wie gesagt, vorläufig nicht strenge zu beweisen, und wir werden die übliche Bezeichnung umsomehr beibehalten können, als das ja eben nur ein Sprachgebrauch ist und damit dem Wesen der Sache in keiner Weise nahe getreten wird.

Diese Franklin'sche Theorie von nur einer Elektricitätsart — die deshalb auch im Gegensatz zur Symmer'schen oder dualistischen als die unitarische bezeichnet wird — schliesst sich unseren heutigen Anschauungen auf anderen physikalischen Gebieten viel besser an und ist in neuerer Zeit auch von mehreren Seiten wieder energisch aufgenommen worden. In früheren Jahren hat man auch Wärme und Kälte als zwei verschiedene Dinge angesehen, die sich neutralisiren können, so wie die positive und negative Elektricität Symmer's; heute weiss man, dass man es da nur mit einem Mehr oder Weniger ein und desselben Agens zu thun hat. In Bezug auf die Wärme scheint uns ein Körper neutral zu sein, wenn er sich in demselben Zustande befindet wie seine Umgebung, er erscheint uns aber warm oder kalt, oder positiv und negativ in Bezug auf Wärme, je nachdem er höher oder tiefer temperirt ist als seine Umgebung. Und so wie ein sehr kalter Körper noch immer, absolut genommen, ein gewisses Wärmequantum enthält, so wird auch ein sehr stark negativ elektrischer Körper, absolut genommen, noch eine gewisse Menge Elektricität enthalten, wenn auch weniger als im neutralen Zustande. — Sowie im Hinblick auf die Wärme, so schliesst sich diese Hypothese von

nur einer Elektricitätsart auch in Bezug auf andere physikalische Gebiete an unsere heutigen Vorstellungen an, und wenn dieselbe noch nicht allgemein angenommen wurde, so hat das seinen Grund wohl zum grossen Theil in der Bequemlichkeit, die darin liegt, überlieferte Anschauungen beizubehalten.

Wir wollen nun versuchen, von der Franklin'schen Vorstellung ausgehend, die Gesetze der Wechselwirkung elektrischer Körper zu studiren. Dazu ist es nothwendig, gewisse Hypothesen über die Kräfte, die in Conglomeraten von ponderablen und elektrischen Massen auftreten, zu machen. Wir werden in dieser Beziehung dreierlei zu unterscheiden haben: 1. Kräfte zwischen ponderablen Massen, 2. Kräfte zwischen elektrischen Massen und 3. Kräfte zwischen ponderablen und elektrischen Massen. Die ersteren sollen Anziehungskräfte sein und dementsprechend mit + bezeichnet werden, die zweiten stets Abstossungskräfte, also —, und die dritten wieder Anziehungskräfte. Ueber die relativen Intensitäten, mit welchen diese drei Kräftearten wirken, ist es nicht nöthig irgend welche Annahmen zu machen. Die drei Hypothesen, welche wir also machen wollen, sind die: ponderable Massen ziehen sich an, elektrische Massen stossen sich ab, ponderable und elektrische Massen ziehen sich an. Damit haben wir auch die Summe aller Voraussetzungen, die zu einer vollständigen Durchführung der Franklin'schen Theorie nothwendig sind, erschöpft, d. h. aller Voraussetzungen, die von vorneherein willkürlicher Natur sind; wenn wir z. B. im Weiteren annehmen werden, dass die Wirkungen den wirkenden Massen proportional sind, so ist das keine Voraussetzung mehr, die speciell der Franklin'schen Theorie zu Grunde liegt. Auch wird sich aus dem Folgenden ergeben, dass es nicht einmal nothwendig ist, wirklich alle drei genannten Voraussetzungen zu machen.

II. Capitel.

Wirkung elektrischer Körper aufeinander.

§ 3. Wirkung eines neutralen Körpers auf freie Elektricität.

Wenn wir Anziehungskräfte annehmen zwischen den ponderablen Massen einerseits und zwischen diesen und den elektrischen Massen andererseits, und wenn wir uns letztere ursprünglich etwa gleichförmig im Raume vertheilt denken, so kommen wir von selbst zu der Vorstellung dass ein Körper aus einem Conglomerate von pon-

derablen Massen bestehe, den Molekülen, von denen ein jedes mit einer gewissen Menge elektrischer Masse gleichsam wie mit einer Hülle umgeben sei. Dass letztere eine bestimmte Grösse nicht überschreiten können, wird bedingt durch die Abstossung welche zwischen den einzelnen Elektricitätstheilchen auftritt, und das System wird sich im Gleichgewichte oder im neutralen Zustande befinden, wenn von demselben auf weitere Elektricitätstheilchen keine Wirkung, weder abstossende noch anziehende, mehr ausgeübt wird. Es ist vielleicht nicht überflüssig gleich hier zu bemerken, dass die Annahme eines Wechsels in der Quantität der elektrischen Masse eines Körpers beim Wechsel seines elektrischen Zustandes eine unnöthig specielle ist, es kann das Veränderliche auch noch etwas anderes sein, z. B. nicht die Masse selbst, sondern ein Bewegungszustand derselben; die Kräfte, welche der Körper nach aussen ausübt, würden dann nicht von der Quantität seiner elektrischen Masse, sondern von der Bewegungsquantität derselben abhängen und derjenige Körper würde neutral erscheinen, dessen elektrische (an Masse unveränderliche) Ladung denselben Bewegungszustand hätte, wie seine Umgebung. Diese Annahme würde sich unserer Vorstellung vom Wesen der Wärme auf das engste anschliessen, es ist aber bisher nicht möglich gewesen, zu ihren Gunsten mehr als diese Analogie anzuführen. Wir wollen daher bei der leichter fassbaren Vorstellung der Quantität elektrischer Masse als des Wirksamen stehen bleiben, wobei es uns unbenommen bleibt, jederzeit diesen Begriff durch Quantität der Bewegung in der Masse zu ersetzen.

Wir wollen bei den nachfolgenden Betrachtungen ponderable Massen stets durch die Buchstaben M, m etc. bezeichnen, elektrische Massen dagegen durch E, e, η etc. Einem neutralelektrischen Körper M wird eine gewisse Quantität Elektricität anhaften, E; wir wollen den Körper also durch das Symbol $\left(\frac{M}{E}\right)$ bezeichnen. Untersuchen wir nun, was sich aus der Wechselwirkung dieses Körpers und einer freien Elektricitätsmenge e ergibt. Die Wirkung von $\left(\frac{M}{E}\right)$ auf e setzt sich aus zwei Theilen zusammen: der Attraction zwischen M und e, und der Repulsion zwischen E und e. Als Kraftgesetz für diese Wirkungen wollen wir das für alle fernwirkenden Kräfte giltige annehmen, nämlich das Newton'sche Gravitationsgesetz, d. h. die Kräfte sollen proportional sein den wirkenden Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Distanzen.

Die Einheit der Kraft zwischen ponderablen Massen, d. h. die Kraft, welche zwischen zwei Masseneinheiten in der Distanz Eins thätig ist, wollen wir mit K bezeichnen, die Kraft zwischen der ponderablen Masse = Eins und der elektrischen Masse = Eins in der Distanz = Eins bezeichnen wir mit γ, und endlich die Einheit der Kraft zwischen elektrischen Massen mit χ. Von diesen Grössen sind K und γ stets positiv, weil sie Anziehungskräfte repräsentiren, dagegen ist χ immer negativ.

Ist die Distanz zwischen $\left(\frac{M}{E}\right)$ und $e = d$, so wird die Kraft zwischen beiden, wenn wir dieselbe mit F bezeichnen, gleich

$$F = \gamma \frac{M e}{d^2} - \chi \frac{E e}{d^2} \text{ oder gleich } \frac{e}{d^2} (\gamma \,.\, M - \chi \,.\, E).$$

Da das System $\left(\frac{M}{E}\right)$ sich im neutralen Zustande befindet, also auf ausserhalb befindliche Elektricitätsmengen keinerlei Wirkung ausüben soll, so muss $F = 0$ sein, d. h. es muss

$$\gamma M - \chi E = 0 \text{ oder } \gamma M = \chi E \text{ oder } \frac{M}{E} = \frac{\chi}{\gamma} \text{ sein.}$$

Da χ und γ Constante sind, so folgt daraus, dass im neutralen oder unelektrischen Zustande mit einer gewissen Menge ponderabler Materie auch immer die gleiche Quantität Elektricität verbunden ist. Hat man also verschiedene neutrale Körper $\left(\frac{M}{E}\right), \left(\frac{M'}{E'}\right), \left(\frac{M''}{E''}\right) \ldots,$ so gilt für alle die Relation:

$$\frac{M}{E} = \frac{M'}{E'} = \frac{M''}{E''} = \ldots\ldots = \frac{\chi}{\gamma}.$$

§ 4. Wirkung zweier neutraler Körper aufeinander.

Haben wir zwei neutrale Körper $\left(\frac{M}{E}\right)$ und $\left(\frac{M'}{E'}\right)$, so besteht die Wechselwirkung dieser aus vier Gliedern. Zwei von diesen ergeben die Summe 0, denn nach dem vorhergehenden Paragraphen ist die Wirkung von $\left(\frac{M}{E}\right)$ auf E' gleich Null. Es bleibt somit nur noch die Wirkung von $\left(\frac{M}{E}\right)$ auf M'. Bezeichnen wir diese mit F, so

erhalten wir, unter Voraussetzung einer Distanz d zwischen beiden Körpern,

$$F = K\frac{MM'}{d^2} + \gamma\frac{EM'}{d^2} = \frac{M'}{d^2}(KM + \gamma E) = \frac{MM'}{d^2}\left(K + \gamma\frac{E}{M}\right).$$

Das Verhältniss $\frac{E}{M}$ ist aber nach dem früheren ein constantes für alle Körper und gleich $\frac{\gamma}{\chi}$; wir erhalten somit

$$F = \frac{MM'}{d^2}\left(K + \frac{\gamma^2}{\chi}\right).$$

Man bemerkt, dass der Klammerausdruck nur constante Grössen enthält, wir können denselben etwa durch den Buchstaben C ersetzen und schreiben

$$F = C \cdot \frac{MM'}{d^2}.$$

Wir erhalten somit für die Wechselwirkung zweier unelektrischer Körper einen Ausdruck, der uns genau das durch die Erfahrung bestätigte Newton'sche Gesetz repräsentirt. Es steckt in dieser Formel aber noch ein sehr wichtiges Moment: wenn wir in dem Klammerausdrucke, der die Proportionalitätsconstante der Newton'schen Formel vorstellt, die Grösse K gleich Null setzen, so bleibt die Kraft F zwischen zwei neutralen Körpern doch noch proportional $\frac{MM'}{d^2}$. Die Grösse K stellt uns aber die Wirkung zweier ponderabler Masseneinheiten in der Distanz $= 1$ dar; wir können also eine Wirkung ponderabler Massen auf einander auch ganz leugnen und nur Kräfte zwischen solchen und elektrischen Massen annehmen, ohne dass wir mit der Erfahrung in Widerspruch kämen. Es ist das jedenfalls eine sehr bedeutsame Consequenz der Franklin'schen Theorie.

§ 5. Wirkung zweier elektrischer Körper aufeinander.

Es seien uns zwei elektrische Systeme in der Distanz d von einander gegeben, die wir durch die Symbole $\begin{pmatrix} M \\ E \\ e \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} M' \\ E' \\ e' \end{pmatrix}$ bezeichnen wollen, wo e und e' die den Körpern mitgetheilten Ladungen bezeichnen; diese können positiv oder negativ sein. Die Wechselwirkung dieser zwei Systeme wird sich aus neun Gliedern zusammensetzen, die wir der Reihe nach aufschreiben; wir erhalten so:

$$1)\ +K\cdot\frac{MM'}{d^2}\qquad 4)\ +\gamma\frac{ME'}{d^2}\qquad 7)\ +\gamma\frac{Me'}{d^2}$$

$$2)\ +\gamma\cdot\frac{EM'}{d^2}\qquad 5)\ -\chi\frac{EE'}{d^2}\qquad 8)\ -\chi\frac{Ee'}{d^2}$$

$$3)\ +\gamma\ \frac{eM'}{d^2}\qquad 6)\ -\chi\frac{eE'}{d^2}\qquad 9)\ -\chi\frac{ee'}{d^2}$$

Von diesen neun Gliedern stellt die Summe der beiden ersten, wie im vorigen Paragraphen gezeigt wurde, die allgemeine Gravitation der beiden Körper gegeneinander dar; bezeichnen wir diese mit G, so haben wir $1) + 2) = K\frac{MM'}{d^2} + \gamma\frac{EM'}{d^2} = G$. Ausserdem lässt sich leicht zeigen, dass die Glieder 3) und 6), 4) und 5), sowie 7) und 8) paarweise gleich und entgegengesetzt sind. Denn berücksichtigt man, dass allgemein nach § 3 $\frac{M}{E} = \frac{M'}{E'} = \frac{\chi}{\gamma}$ ist, so kann man in 3) statt γ den Ausdruck $\chi\frac{E'}{M'}$ setzen und erhält

$$3) = \chi\frac{E'}{M'}\cdot\frac{eM'}{d^2} = \chi\frac{E'e}{d^2},\ \text{das ist aber} = -6).$$

Durch analoge Substitution ergibt sich 4) = — 5) und 7) = — 8). Bezeichnen wir also die Wechselwirkung beider Systeme mit F, so erhalten wir

$$F = G - \chi\frac{ee'}{d^2}.$$

Also eine abstossende Kraft proportional den elektrischen Ladungen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung. Je nachdem wir für die Ladungen positive oder negative Grössen einführen, erhalten wir für

$$+e \text{ und } +e' \ldots\ldots F = G - \chi\frac{ee'}{d^2}$$

$$+e \text{ und } -e' \ldots\ldots F = G + \chi\frac{ee'}{d^2}$$

$$-e \text{ und } -e' \ldots\ldots F = G - \chi\frac{ee'}{d^2}$$

d. h. Anziehung für ungleichnamig elektrische Ladungen und Abstossung für gleichnamige.

Obgleich wir dieses mit der Erfahrung übereinstimmende Resultat hier ganz ungezwungen erhalten, könnte man dagegen doch folgendes

Bedenken vorbringen. Wenn wir zwei Körpern allmälig immer mehr und mehr ihren normalen Elektricitätsgehalt entziehen, also sie negativ elektrisiren, so beobachten wir eine immer stärker werdende Abstossung, wir entziehen ihnen durch diesen Process aber gerade dasjenige Agens, welches abstossend wirkt. Und würden wir sie ihres ganzen Elektricitätsgehaltes berauben, also sie sozusagen elektrisch auf den absoluten Nullpunkt bringen, so bliebe nichts mehr übrig, als die ponderablen Massen, welche entweder anziehend oder gar nicht, keinesfalls aber abstossend auf einander wirken. Wie ist nun die Abstossung zu erklären? Wir dürfen nicht vergessen, dass wir niemals in der Lage sind, mit nur zwei elektrischen Massen wirklich zu operiren, sondern es sind dieselben stets von anderen Elektricitätsmengen umgeben, die sich überall finden, wo ponderable Massen sind — vielleicht auch im leeren Raum. Die Luft also, welche unsere Versuchsobjecte umgibt, und alle anderen Körper der Nachbarschaft enthalten Elektricität im normalen Maasse, und die Bewegung, die wir an unseren Versuchskörpern wahrnehmen, ist die Folge der Differenzwirkung aller hier auftretenden Kräfte. Betrachten wir nun die Wirkung der normal elektrischen Umgebung auf einen negativ elektrischen Körper.

Es sei (Fig. 2) A ein Körper, der um den Betrag e weniger Elektricität enthalte als im normalen Zustande. In seiner Umgebung sind die normalen Elektricitätsmengen vertheilt und wir wollen den Raum durch die geschlossene Fläche B in zwei Theile theilen. Die ausserhalb B gelegene Elektricitätsmenge wollen wir mit η, die innerhalb B gelegene mit η' bezeichnen. Der Körper A befindet sich unter dem Gesammteinfluss aller dieser im Gleichgewichte, es muss also die Wirkung aller η auf ihn gleich und entgegengesetzt sein der aller η'. Wollen wir diese Wirkungen finden, so brauchen wir in Bezug auf den Körper A nur seine Differenz mit dem normalen Gehalte, also die Ladung $-e$ zu berücksichtigen. Bezeichnen wir die Wirkung des ausserhalb B gelegenen Raumes mit K_1 und die des innerhalb B gelegenen mit K_2, so haben wir $K_1 + K_2 = 0$ oder $K_1 = -K_2$.

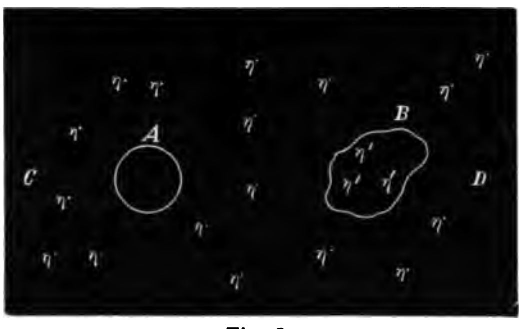


Fig. 2.

Es ist aber $K_1 = \Sigma \frac{e\eta}{d^2}$ und $K_2 = \Sigma \frac{e\eta'}{d^2}$, wenn wir mit d die Distanzen je zweier elektrischer Massen verstehen, und wenn wir Anziehungskräfte positiv zählen, oder es ist $\Sigma \frac{e\eta}{d^2} = - \Sigma \frac{e\eta'}{d^2}$.

Denken wir uns nun den Raum B von einem Körper erfüllt, der gleichfalls weniger Elektricität enthält als im normalen Zustande, dessen Symbol $\begin{pmatrix} M' \\ E' \\ -e' \end{pmatrix}$ wäre; es tritt nun an Stelle des η' die Elektricitätsmenge $(E' - e')$ und die Kraft K_2 übergeht in $K_2^1 = \Sigma \frac{e(E' - e')}{d^2}$. Die Gesammtwirkung F ist jetzt gleich $K_1 + K_2^1$ oder $F = \Sigma \frac{e\eta}{d^2} + \Sigma \frac{e(E' - e')}{d^2} = \Sigma \frac{e\eta}{d^2} + \Sigma \frac{eE'}{d^2} - \Sigma \frac{ee'}{d^2}$. Der dem Körper M' innewohnende normale Elektricitätsgehalt E' würde unter dem gleichzeitigen Einflusse der ponderablen Masse M' in Bezug auf jede äussere Elektricität im Gleichgewichte sein, also gerade so wirken wie die η' ohne ponderable Masse, die ja für sich allein im Gleichgewichte sind. Wir können daher setzen

$$\Sigma \frac{eE'}{d^2} = \Sigma \frac{e\eta'}{d^2} \text{ und da } \Sigma \frac{e\eta'}{d^2} = - \Sigma \frac{e\eta}{d^2}$$

ist, so erhalten wir schliesslich für die Gesammtwirkung:

$$F = - \Sigma \frac{ee'}{d^2}.$$

Es bezeichnet uns dieser Ausdruck eine Abstossung zwischen A und B; dieselbe ist aber dadurch bedingt, dass A mehr nach der Richtung C als nach der Richtung D im Raume gezogen wird, und der Körper B mehr nach D als nach C. Das was wir thatsächlich beobachten, ist auch nur, dass die Körper sich von einander entfernen, ob sie aber gestossen oder gezogen werden, das können wir nicht entscheiden. Dieser Einfluss des umgebenden Mittels bei elektrischen Phänomenen ist von der grössten Bedeutung und darf niemals ausser Acht gelassen werden, wir würden sonst zu ebenso falschen Resultaten kommen, als wenn wir aus dem Aufsteigen des Luftballons auf eine Abstossungskraft zwischen ihm und der Erde schliessen wollten; auch hier ist es die Wirkung des umgebenden Mittels, welches die scheinbare Abstossung verursacht.

Es liegt der Gedanke nahe, einen Körper seines ganzen normalen Elektricitätsgehaltes zu berauben und ihn so wirklich auf den oben

berührten absoluten Nullpunkt der Elektricität zu bringen. Hierüber kann vorläufig nur so viel bemerkt werden, dass nach Beobachtungen, welche später ausführlich zu berühren Gelegenheit sein wird, der absolute Nullpunkt soweit ausserhalb der uns erreichbaren Grenzen zu liegen scheint, dass gegenwärtig dahin abzielende Versuche nur eine sehr geringe Aussicht auf Erfolg haben.

§ 6. Experimentelle Bestätigung des gefundenen Kraftgesetzes.

Die Franklin'sche Theorie hat uns in Bezug auf die Wechselwirkung zweier elektrischer Körper, deren Ladungen e und e' sind, zu dem Ausdrucke geführt: $F = G - \chi \frac{e e'}{d^2}$, wo G die allgemeine Gravitation und $\chi \frac{e e'}{d^2}$ die durch die freien Elektricitäten bedingte Kraft bedeuten; wenn wir hingegen von der Symmer'schen Theorie der zwei Elektricitätsarten ausgehen, so erhalten wir einen etwas anderen Ausdruck, nämlich:

$$F = G - \chi \frac{e e'}{d^2} + \gamma \left(\frac{e}{M} + \frac{e'}{M'} \right).$$

Hier erscheinen auch noch die ponderablen Massen — abgesehen von der Gravitation G — wirksam und es müsste die Wirkung zweier elektrischer Körper auch von diesen, nicht nur von den elektrischen Ladungen, abhängen. Das steht aber mit aller Erfahrung in Widerspruch und es erscheint deshalb umsomehr geboten, diese Theorie fallen zu lassen. Das von der Franklin'schen Theorie geforderte Kraftgesetz hat sich dagegen experimentell vollständig bestätigt, wie im Folgenden näher gezeigt werden soll.

Eine Prüfung des elektrostatischen Kraftgesetzes muss nothwendigerweise in zwei Theile zerfallen: es muss erstens gezeigt werden, dass die Kraft den wirksamen Massen proportional ist, und zweitens, dass sie umgekehrt proportional ist dem Quadrate der Distanz dieser Massen von einander. Nach beiden Richtungen hin hat der französische Gelehrte Coulomb [1]) zu Ende des vorigen Jahrhunderts eine vollständige experimentelle Bestätigung des Gesetzes geliefert. Da es sich hier darum handelt, Intensitäten von Kräften zu messen, und zwar von verhältnissmässig schwachen, so musste in erster Linie eine passende Methode hierfür gewonnen werden. Coulomb hatte den genialen Gedanken, die

---

[1]) Mém. de l'Acad. Paris 1785.

elektrischen Kräfte durch die Torsionskraft eines Drahtes zu compensiren, ein Kunstgriff, von dem wir bis auf den heutigen Tag in unseren feinsten elektrometrischen Apparaten Gebrauch machen. Es ist diese Methode deshalb so fruchtbar, weil der Zusammenhang zwischen der Torsionskraft, d. h. der Kraft, mit welcher ein um seine Längsachse verdrehter Draht wieder in die Ruhelage zurückstrebt, und dem Torsionswinkel ein sehr einfacher ist. Es haben nämlich die diesbezüglichen Untersuchungen Coulomb's gezeigt, dass, wenn man dem Drahte passende Dimensionen gibt, d. h. ihn nicht zu kurz und nicht zu dick wählt, die Torsionskraft dem Torsionswinkel einfach proportional ist, und zwar innerhalb so weiter Grenzen, dass wir Torsionen von mehreren hundert Graden verwenden können, ohne dieselben zu überschreiten.

In Fig. 3 ist das Princip des Coulomb'schen Apparates, der sogenannten Drehwaage, veranschaulicht. Ein vertical herabhängender feiner und möglichst elastischer Draht 0 (die Fig. 3 stellt einen horizontalen Querschnitt dar), ist an seinem oberen Ende in einen Knopf festgeklemmt (in der Fig. 3 nicht gezeichnet), der mit einem Index an einer Kreistheilung drehbar ist; das untere Ende des Drahtes ist frei beweglich. Durch Drehung des oberen Knopfes kann man also den Draht um seine Längsachse drehen, respective tordiren, wenn das untere Ende nicht frei beweglich wäre. An letzterem ist ein horizontaler Schellackfaden befestigt, der an seinem einen Ende die kleine Hollundermarkkugel *b* und am anderen das Gegengewicht *c* trägt, das zugleich als Luftdämpfung wirkt, wenn man ihm die Scheibenform gibt. An dem cylindrischen Glasgehäuse, welches den Apparat umgibt, ist in der Schwingungshöhe des Fadens *b c* eine Kreistheilung angebracht, so dass eventuelle Ablenkungen desselben aus der Ruhelage an dieser abgelesen werden können. Es lässt sich ausserdem noch in den Apparat eine der beweglichen Kugel *b* an Grösse gleiche und ebenfalls gut isolirte Kugel *a* einführen, die während der Versuche ihren Platz nicht ändert und die wir als Standkugel bezeichnen wollen. Wollen wir mit diesem Apparate das Kraftgesetz in Bezug auf die Quantität prüfen, so verfahren wir folgendermassen. Wir bringen zunächst durch Drehung des Aufhängeknopfes die bewegliche Kugel gerade vor den Nullpunkt der Theilung, dann bringen wir die Standkugel an eben denselben Platz, wodurch *b* etwas zur Seite geschoben wird, aber in Folge der Torsion des Drahtes mit *a* in Berührung bleibt. Nun theilen wir den beiden

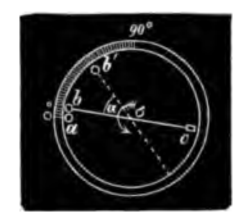


Fig. 3.

Kugeln irgend eine elektrische Ladung mit; diese wird sich — das können wir behaupten, ohne von den Gesetzen der Vertheilung irgend etwas zu wissen — auf beiden Kugeln gleichmässig ausbreiten, da ja alles um die Berührungsebene derselben symmetrisch ist; die Ladungen werden also e und e sein. In Folge der Abstossung, welche nun eintritt, wird sich die Kugel b nach b' begeben, was um so weiter von b abliegen wird, je grösser die Ladung und je geringer die Torsionskraft des Drahtes ist. Nun dreht man den Aufhängepunkt des Drahtes in der Richtung des Pfeiles, wodurch in Folge der gesteigerten Torsion die bewegliche Kugel sich wieder der Standkugel nähert; in einer angemessenen Entfernung davon lässt man dieselbe zur Ruhe kommen und liest den Winkel α (Fig. 3) zwischen der neuen und der ursprünglichen Ruhelage an der Theilung des Glascylinders, sowie an der Kreistheilung des Knopfes den hinzugekommenen Betrag der Torsion ab. Ist dieser etwa φ, so beträgt in dem Momente die Torsion $(\alpha + \varphi)$. Den Stand, welchen nun die bewegliche Kugel hat — wir wollen ihn etwa mit b'' bezeichnen — notirt man gleichfalls. Ist in dieser Lage die Entfernung beider Kugeln $= d$, so ist die wirksame Kraft $F = -\chi \cdot \frac{e\,e}{d^2}$, und diese wird eben compensirt durch die Torsion welche dem Torsionswinkel entspricht. Man hat also: $-\chi \cdot \frac{e \cdot e}{d^2} = p \cdot (\alpha + \varphi)$, wo p eine Constante ist, die von der Beschaffenheit des Aufhängedrahtes abhängt. Nun berühren wir a mit einer dritten ebenso grossen Kugel, die unelektrisch ist, dadurch entziehen wir a die Hälfte seiner Ladung; die Folge davon ist, dass jetzt die Abstossung zwischen a und b kleiner wird, somit b sich a nähert. Wollen wir b wieder an seinen Stand in b'' zurückbringen, so müssen wir etwas von der Torsion nachlassen, also den Knopf entgegen der Richtung des Pfeiles drehen; ist der dazu nöthige Winkel $= \varphi'$, so beträgt jetzt die Torsion $(\alpha + \varphi - \varphi')$ und es besteht die Relation:

$$-\chi \cdot \frac{e \cdot \frac{1}{2} e}{d^2} = p\,(\alpha + \varphi - \varphi').$$

Es ist also weiter

$$\frac{p\,(\alpha + \varphi)}{p\,(\alpha + \varphi - \varphi')} = \frac{-\chi \cdot \frac{e \cdot e}{d^2}}{-\chi \cdot \frac{e \cdot \frac{1}{2} e}{d^2}} \text{ oder } \frac{\alpha + \varphi}{\alpha + \varphi - \varphi'} = 2.$$

Da die Winkel α, φ, φ' direct durch die Beobachtungen gegeben sind, so lässt sich so das Gesetz einfach prüfen. Die zahlreichen Versuche, welche Coulomb unter den grössten Vorsichtsmassregeln ausgeführt hat, haben zu einer entschiedenen Verification des Gesetzes geführt.

Auch die Abhängigkeit der Kraft von der Distanz der wirksamen Massen lässt sich ähnlich prüfen. Wir laden a und b wie früher und beobachten den Ablenkungswinkel α, bei welchem b in Folge der Torsion im Gleichgewichte gehalten wird; wir haben nun einerseits die Kraft $-\chi \frac{e \cdot e}{d^2}$ und andererseits die Torsion $p \cdot \alpha$, also $-\chi \frac{e \cdot e}{d^2} = p \cdot \alpha$. Nun drehen wir den Knopf in der Richtung des Pfeiles beliebig weit, dadurch übergeht die Distanz beider Kugeln in d_1 (d und d_1, sind aus den Winkeln zu berechnen) und die Torsion in α' mehr den Betrag φ, um den wir den Knopf gedreht haben. Es besteht nun die Relation:

$$-\chi \cdot \frac{e\,e}{d_1^2} = p \cdot (\alpha' + \varphi).$$

Die Verbindung beider Gleichungen liefert $\frac{d_1^2}{d^2} = \frac{\alpha}{\alpha' + \varphi}$; da alle diese Grössen durch die Beobachtung gegeben sind, so ist auch hier eine Prüfung der supponirten Gesetze möglich. Auch diese fiel vollständig bestätigend aus.

So einfach das Princip dieser Experimente scheint, so schwierig sind dieselben auszuführen; abgesehen davon, dass es schon an und für sich schwer ist, einen Körper so gut zu isoliren, dass eine gewisse Elektricitätsmenge einige Minuten auf demselben ungeschwächt verharrt, tritt bei diesen Versuchen auch noch der Einfluss des später zu erläuternden Phänomens der Induction störend auf.

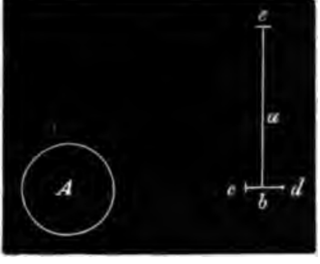


Fig. 4.

Coulomb hat sich bei seinen Untersuchungen auch noch einer zweiten, etwas einfacheren Methode [1]) bedient, die noch kurz erwähnt werden soll.

Hängt man an einem einfachen Coconfaden a (Fig. 4), der im Punkte e befestigt ist, einen leichten Querarm b auf, der ganz ähnlich construirt ist wie bei der Drehwaage, so ist die Torsion eines solchen einfachen Seidenfadens so gering, dass der Arm in jedem Azimuth

[1]) l. c.

in Ruhe bleibt; die Torsion ist vollkommen zu vernachlässigen. Bringt man also b aus seiner Ruhelage, so macht es nicht um dieselbe Schwingungen, wie in der Drehwaage unter dem Einflusse der Torsion, sondern es bleibt in der neuen Lage, die man ihm gegeben hat, in Ruhe. Wirkt auf b aber eine Anziehungskraft etwa in Folge einer Ladung, welche die Kugel A besitzt, und bringt man es nun aus seiner Ruhelage, so wird es um dieselbe Pendelschwingungen in der Horizontalebene ausführen, deren Schwingungsdauer durch die zwischen b und A herrschende Anziehungskraft bestimmt wird. Bei passender Veränderung der elektrischen Ladungen oder der Entfernung $A\,b$ wird man durch Beobachtung der Schwingungsdauer das Kraftgesetz prüfen können.

Der Querbalken b besteht aus einem Schellackstift, der vorn ein leitendes Scheibchen c und rückwärts das Gegengewicht d trägt; das Ganze muss möglichst leicht construirt sein, damit ein möglichst feiner, also torsionsloser Aufhängefaden verwendet werden kann. Will man das Kraftgesetz in Bezug auf die Quantitäten prüfen, so verfährt man folgendermassen. Man ladet c z. B. positiv und ertheilt dann der gleichfalls gut isolirten Kugel A eine beträchtliche negative Ladung; nun versetzt man b in Schwingung und beobachtet die Schwingungsdauer. Ist diese gleich t, und nennen wir die Kraft, welche zwischen A und c wirkt, F, so besteht die bekannte Relation:

$$t = \pi \sqrt{\frac{C}{F}},$$

wo C eine Constante ist, die von den Dimensionen des Pendels abhängt. Nun berühren wir die Kugel A mit einer zweiten, genau gleichen, wodurch wir ihre Ladung halbiren, und beobachten nach Entfernung der letzteren wieder die Schwingungsdauer. Jetzt finden wir dieselbe $= t_1$ und die wirkende Kraft sei nun $= F_1$, so hat man:

$$t_1 = \pi \sqrt{\frac{C}{F_1}} \text{ oder } \frac{t}{t_1} = \frac{\sqrt{F_1}}{\sqrt{F}} \text{ oder } \frac{F_1}{F} = \frac{t^2}{t_1^2}.$$

Das Verhältniss $\frac{t^2}{t_1^2}$ ist direct der Beobachtung entnommen. Nach dem supponirten Kraftgesetz müssten die Kräfte F und F_1 aber auch folgenden Gleichungen genügen:

$$F = \chi \frac{e \cdot e'}{d^2}; \; F_1 = \chi \frac{\frac{1}{2} e \cdot e'}{d^2},$$

wenn $-e$ die Ladung von A, $+e'$ die von c und d ihre Distanz bezeichnet. Es müsste also auch sein

$$\frac{F}{F_1} = 2 \text{ oder nach dem früheren } \frac{t_1^2}{t^2} = 2.$$

Diese Relation hat sich auch durch die Experimente Coulomb's bestätigt.

Gleicherweise lässt sich das Kraftgesetz in Bezug auf die Distanz aus den Schwingungsbeobachtungen prüfen.

Wir laden A und c in der Weise wie früher und messen ihre Distanz d, für welche wir vorläufig die Entfernung zwischen c und dem Mittelpunkt der Kugel setzen wollen. Ist unter den gegebenen Umständen die Schwingungsdauer $= t$, so hat man wieder $t = \pi \sqrt{\frac{C}{F}}$, wo F die jetzt in der Distanz d wirksame Kraft ist. Ohne an den Ladungen etwas zu verändern, lassen wir die Distanz d in d_1 übergehen und beobachten das zugehörige $t_1 = \pi \sqrt{\frac{C}{F_1}}$. Das Verhältniss der jetzt thätigen Kraft F_1 zu der früheren ist uns also wieder gegeben durch $\frac{F_1}{F} = \frac{t^2}{t_1^2}$. Aus dem Kraftgesetze finden wir aber

$$F = \chi \frac{e \cdot e'}{d^2} \text{ und } F_1 = \chi \frac{e \cdot e'}{d_1^2}, \text{ also } \frac{F_1}{F} = \frac{d^2}{d_1^2}.$$

Ist letzteres richtig, so muss die Beobachtung demnach die Gleichung $\frac{d}{d_1} = \frac{t}{t_1}$ verificiren, was bei Coulomb's Versuchen auch der Fall war.

Nach alledem müssen wir es als experimentell erwiesen betrachten, dass zwei elektrisirte Körper mit einer Kraft auf einander wirken, die den Ladungen direct und dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist. Bezüglich des letzteren Punktes muss noch Einiges erwähnt werden. Die Versuche Coulomb's wären exact, wenn die Ladungen wirklich in Punkten concentrirt wären; sie sind aber auf Kugeln von mehr oder minder grossen Dimensionen vertheilt, und es fragt sich, welchen Ort im Raum man für eine solche Ladung in die Rechnung einzuführen hat. Es wurde bisher dafür der Mittelpunkt der Kugeln angenommen, und es lässt sich in der That leicht nachweisen, dass diese Annahme gerechtfertigt ist; schon Newton hat bei seinen Untersuchungen über die Gravitation

den Beweis geliefert, dass die Masse einer Kugel, wenn dieselbe nur symmetrisch um den Mittelpunkt angeordnet ist, nach aussen gerade so wirkt, als wäre sie im Centrum der Kugel vereinigt. Wir können denselben Beweis beibehalten, indem wir nur an Stelle ponderabler Massen elektrische setzen, für welche ja das gleiche Kraftgesetz giltig ist. Wir brauchen auch vorläufig gar keine Annahme darüber zu machen, ob die elektrische Ladung nur auf der Oberfläche der Kugel sitzt oder im ganzen Innern vertheilt ist, denn wenn wir beweisen, dass die Ladung einer Kugelschale so wirkt, als befände sie sich im Centrum derselben, so ist es natürlich gleichgiltig, ob die ganze Ladung der Kugel in dieser einen Kugelschale sitzt oder auch noch in allen concentrischen, da sie in letzterem Falle gleichfalls so wirken würde, als wäre sie im Centrum. Vorausgesetzt wird nur, dass die Vertheilung auf oder in der Kugel, deren Symmetrieverhältnissen entsprechend, in Bezug auf jede durch den Mittelpunkt gehende Ebene symmetrisch sei.

Es sei O (Fig. 5) das Centrum der geladenen Kugel und $s\,s'$ ein unendlich kleines Flächenstückchen der äussersten Kugelschale, deren Wirkung auf den Punkt P untersucht werden soll. In letzterem befinde sich etwa die Elektricitätsmenge $-\,e$, während die Kugelschale positiv geladen sein soll mit der Quantität $+\,E$. Die Dichte der letzteren oder die Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit sei ρ; bezeichnen wir noch das Element $s\,s'$ mit $d\,\omega$ und dessen Distanz von P mit l, so erhalten wir für die Kraft zwischen $d\,\omega$ und P, wenn wir dieselbe mit F bezeichnen:

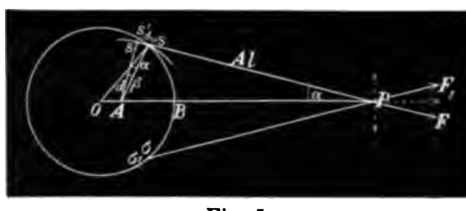


Fig. 5.

$$F = \chi\,\frac{\omega \cdot \rho \cdot e}{l^2}.$$

Von dieser Kraft kommt aber offenbar nur die in die Richtung $O\,P$ fallende Componente zur Wirkung, da die darauf senkrechte durch die Gegenwirkung F_1 des zu $s\,s'$ symmetrisch gelegenen Flächenstückchens $\sigma\,\sigma'$ aufgehoben wird. Wir haben also von F nur die eine Componente zu nehmen und erhalten für die thatsächliche Wirkung K zwischen $d\,\omega$ und P:

$$K = \chi\,\frac{d\,\omega\,\rho\,e}{l^2}\,\cos\alpha.$$

Wir bezeichnen uns nun den zu dem Punkte O, B und P conjugirten Punkt A; diesen finden wir, indem wir von P aus einen tangirenden Kegel an die Kugel legen und von irgend einem Punkte der Berührungslinie ein Loth auf OP fällen. Der Fusspunkt des Lothes ist der Punkt A. Es besteht dann die bekannte Relation:

$$OA : OB = OB : OP \text{ oder } OA \cdot OP = R^2,$$

wenn wir den Kugelradius mit R bezeichnen. Verbinden wir den Punkt s mit den Punkten O, A und P, so erhalten wir zwei ähnliche Dreiecke; denn wegen des gleichen Verhältnisses zweier homologer Seiten hat man $\triangle\, OAs \sim \triangle\, OsP$. Der Winkel bei s ist somit gleichfalls der Winkel α.

Beschreiben wir nun von A aus einen Kreis mit dem Radius $As = r$; vom Punkte A aus gesehen, erscheint das Flächenstückchen $s\,s'$ unter dem räumlichen Gesichtswinkel $d\beta$, seine Projection $s\,s''$ auf die um A gelegte Kugel hat daher die Grösse $r^2 d\beta$. Die beiden Flächen $s\,s'$ und $s\,s''$ schliessen mit einander aber auch den Winkel α ein, da ihre Verticalen sO und sA diesen Winkel bilden. Man hat also:

$$r^2\, d\beta = d\omega \cdot \cos \alpha.$$

Substituiren wir das in den früheren Ausdruck für K, so erhalten wir

$$K = \chi \frac{\rho \cdot e}{l^2} r^2\, d\beta = \chi\, \rho\, e\, d\beta\, \frac{r^2}{l^2}.$$

Der Quotient $\frac{r^2}{l^2}$ ist aber für alle Punkte s der Kugeloberfläche eine constante Grösse, denn aus der Aehnlichkeit der Dreiecke OAs und OsP folgt: $r : R = l : OP$ oder $\frac{r}{l} = \frac{R}{OP}$. Bezeichnen wir die Distanz des Punktes P vom Kugelmittelpunkte durch D, so können wir auch schreiben

$$\frac{r}{l} = \frac{R}{D},$$

was eben für alle Punkte ein und derselben Kugelschale einen constanten Werth repräsentirt.

Wir haben also $K = \chi \cdot \rho \cdot e \cdot \frac{R^2}{D^2} \cdot d\beta$.

Die Wirkung Φ der gesammten Kugelschale erhalten wir, wenn wir den Gesichtswinkel $d\beta$ wachsen lassen, bis er den ganzen Raum umspannt; es wird also

$$\Phi = \chi\,\rho\,e\,\frac{R^2}{D^2}\,\Sigma\,d\beta = \chi \cdot \rho \cdot e\,\frac{R^2}{D^2} \cdot 4\,\pi,$$ da $\Sigma\,d\,\beta$ gleich $4\,\pi$ ist [1].

Da aber $4\,\pi\,R^2$ nichts anders ist als die Oberfläche der Kugel und ρ die Dichte der Elektricität auf derselben, so ist $4\,\pi\,R^2\,\rho$ die Gesammtladung E und die Wirkung übergeht in

$$\Phi = \chi \cdot \frac{E \cdot e}{D^2},$$

d. h. die Kraft ist ganz dieselbe, als wäre die Elektricitätsmenge E im Centrum der Kugel vereinigt. Da das nicht nur für die Oberfläche, sondern für alle concentrischen Schalen gilt, so bleibt der Satz auch noch aufrecht, wenn die wirksamen Massen sich im Innern der Kugel befinden, wie dies z. B. bei der Gravitation der Fall. Bei den Versuchen Coulomb's sind also alle Distanzen von den Kugelmittelpunkten aus zu zählen; dabei ist aber nicht zu vergessen, dass diese Betrachtung nur gilt, wenn die Anordnung der Elektricität symmetrisch um den Kugelmittelpunkt ist, und wir werden gleich ein Phänomen kennen lernen, das eine solche Anordnung und damit auch die Ausführung der Coulomb'schen Versuche ausserordentlich erschwert.

§ 7. Wirkung eines elektrischen Körpers auf einen unelektrischen.

Wir betrachten nun die Wirkung eines elektrischen Körpers vom Symbol $\begin{pmatrix} M \\ E \\ e \end{pmatrix}$ auf einen unelektrischen vom Symbol $\begin{pmatrix} M' \\ E' \end{pmatrix}$. Diese Wirkung setzt sich aus zwei Theilen zusammen: aus der Kraft zwischen $\begin{pmatrix} M \\ E \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} M' \\ E' \end{pmatrix}$ und der Kraft zwischen e und $\begin{pmatrix} M' \\ E' \end{pmatrix}$. Erstere erscheint nach den Ausführungen des § 4 als allgemeine Gravitation, denn sie ist ja die Wirkung zweier neutraler Körper auf einander; letztere dagegen — die Wirkung eines neutralen Körpers auf freie Elektricität — ist nach § 3 gleich Null. Es ist daher die Wirkung

[1] Diese Relation ergibt sich aus Folgendem: Das Flächenstück $d\,\omega$ und der zugehörige Centriwinkel $d\,\beta$ hängen durch die Gleichung $d\,\omega = R^2\,d\,\beta$ zusammen; lassen wir nun $d\,\omega$ über die ganze Kugelfläche wachsen, so wird $\Sigma\,d\,\omega = R^2\,\Sigma\,d\,\beta$ oder $4\,R^2\,\pi = R^2\,\Sigma\,d\,\beta$ oder $\Sigma\,d\,\beta = 4\,\pi$.

zwischen einem elektrischen und einem neutralen Körper nicht anders als die zwischen zwei neutralen. Das scheint nun ein Widerspruch mit der Erfahrung zu sein, da wir ja gesehen haben, dass ein elektrischer Körper einen neutralen anzieht. Dieser Widerspruch löst sich bei näherer Betrachtung aber auf und führt uns zu einem neuen und höchst wichtigen Phänomen, dem der Induction oder Influenz. Die Wirkung von $\binom{M'}{E'}$ auf e ist Null, weil die Anziehung zwischen M' und e gleich und entgegengesetzt ist der Abstossung zwischen E' und e. Da diese beiden Kräfte nicht nur von den Massen, sondern auch von den Distanzen derselben abhängen, so wird die Resultirende nur solange gleich Null sein können, als diese Distanzen sich gleich bleiben. Wäre die Elektricitätsmenge E' unveränderlich mit der Masse M' verbunden, d. h. wäre der Körper ein absoluter Isolator (und zwar in jedem seiner kleinsten Theile), so würde auch keine Kraft zwischen ihm und e thätig sein. Hat man es aber mit einem Leiter zu thun, d. h. kann sich die Elektricität E' in dem Körper verschieben, dann wird sie, da sie für sich allein auf der Masse M' im Gleichgewichte ist, der Abstossung von e Folge leisten, und ihr Schwerpunkt wird nun weiter von e entfernt sein als der der Masse M', d. h. es wird eine Anziehung zwischen $\binom{M'}{E'}$ und e resultiren. Dieses Phänomen der Neuvertheilung der Elektricität in einem Körper unter dem Einflusse einer äusseren Elektricitätsmenge hat man Influenz oder elektrostatische Induction genannt. Man sieht, dass es nicht möglich ist — da es absolute Isolatoren nicht gibt — die Wirkung eines elektrischen Körpers auf einen unelektrischen zu prüfen, indem durch die Anwesenheit einer Elektricitätsmenge irgendwo im Raum gleichzeitig alle anderen Körper aus dem neutralen in den elektrischen Zustand versetzt werden. Dieses Phänomen der Induction wurde zuerst von Canton [1]) eingehender studirt und beschrieben.

III. Capitel.

Induction.

§ 8. Allgemeiner Charakter der Induction.

Wir wollen im Folgenden eine bestimmte graphische Darstellung für Elektricitätsvertheilungen anwenden; wir wollen in der Zeichnung einen Körper mit einer punktirten Linie so umgeben, dass deren Ab-

[1]) Phil. Trans. X. (1753.)

stand von der Oberfläche desselben in jedem Punkte der dort haftenden Elektricitätsmenge proportional ist, und zwar sollen diese Abstände nach aussen gezählt werden, wenn die Ladung positiv und nach innen, wenn sie negativ ist. In Fig. 6 *a* stellt uns demnach *A* eine gleichförmig positiv geladene Kugel dar und *B* eine ebensolche, aber negativ geladene. Hätte ein Körper gar keine freie Elektricität, so würde die punktirte Linie mit der Oberfläche desselben zusammenfallen; diese Bezeichnungsweise wollen wir in Zukunft, wo es zur Veranschaulichung nöthig ist, beibehalten.

Die Wirkung eines positiv oder negativ geladenen Körpers wird durch Fig. 6 *b* respective *c* versinnlicht; die positive Ladung von *A* wirkt auf die Normalladung von *B* abstossend, in Folge dessen letztere zum Theile vom Ende α auf β überströmt, und zwar so lange, bis die Abstossung von Seiten der in β angehäuften Elektricität auf ein nachströmendes Theilchen gleich der Abstossung von *A* auf dasselbe geworden ist. Der dann eintretende Gleichgewichtszustand ist eben durch Fig. 6 *b* versinnlicht; das Ende α wird negativ, β positiv. Zwischen α und β wird sich etwa bei γ eine Zone finden, welche ganz unelektrisch ist und die so den Körper *B* in einen negativen und einen positiven Theil zerlegt. Aber auch die ursprüngliche Ladung auf *A* kann unter dem Einfluss der Neuvertheilung auf *B* nicht in Ruhe bleiben.

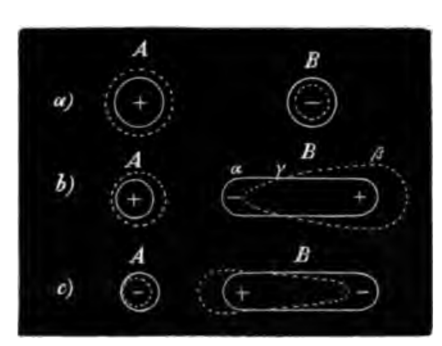


Fig. 6.

Während der Annäherung von *A* an *B* war die Ladung des ersteren in jedem Momente von der ponderablen Masse in *B* ebenso stark angezogen, wie von dessen normalem Elektricitätsgehalte abgestossen, also im Gleichgewicht; sobald aber die Neuvertheilung an *B* beginnt, überwiegt die Anziehung der ponderablen Masse *B* über die elektrische Abstossung und die Ladung von *A* sucht sich dementsprechend gegen *B* hin zu bewegen. Die Dichte der Elektricität auf der Kugel *A* wird daher grösser sein auf der Seite gegen *B* zu als auf der entgegengesetzten. War die Kugel *A* ursprünglich negativ geladen, so ist der Process ein ganz analoger und durch die Fig. 6 *c* dargestellt.

Es wird sich nun darum handeln, diese Beziehungen auch experimentell zu bestätigen.

Wir wählen hierzu am besten einen Apparat, der der Anordnung in Fig. 6 *b* entspricht und der schon von Aepinus angewendet wurde. Eine isolirt aufgestellte und positiv geladene Kugel *A* (Fig. 7) nähern wir dem gleichfalls isolirten Conductor *B*; an letzterem befinden sich eine Reihe leichter Pendelchen, etwa Hollundermarkkügelchen an Fäden, die denselben Zweck haben wie die Metallplättchen im Elektroskop, nämlich zu divergiren sobald sie elektrisch sind und dadurch das Vorhandensein einer Ladung an dem Punkte, wo sie sich befinden, anzuzeigen. Sobald *A* und *B* genügend nahe an einander gebracht sind, bemerken wir, dass die Pendel bei α und β stark divergiren, also eine starke Ladung anzeigen, das Pendel bei γ dagegen hängt ganz normal, und die zwischenliegenden divergiren mit einer mittleren Intensität. In quantitativer Beziehung trifft also die früher betrachtete Vertheilung ein; aber auch in qualitativer, denn wir bemerken, dass alle Pendel auf der Seite α gegen *A* hingezogen werden, die auf der Seite β dagegen nicht, im Gegentheil, wenn die Entfernung von *A* nicht zu gross ist, so bemerken wir, dass sie von *A* abgestossen werden. Das beweist uns, dass, wenn *A* positiv war, es auch die Seite β ist, dass α dagegen sich wie ein negativ elektrischer Körper verhält. Diese Versuchsanordnung ist vollkommen zweckmässig und einwurfsfrei, nicht so die später in Gebrauch gekommenen Modificationen, z. B. jene, bei welcher in α und β zwei kleine Stäbe aufgesetzt sind, von denen die Pendel herabhängen; da entfernt sich zwar in α auch das Pendel vom Stab, aber nichts beweist, dass das eine Folge der Abstossung zwischen Pendel und Stab ist, da ja ersteres auch direct von *A* angezogen wird. Auch die Anordnung von Riess, bei welcher sich *B* in verticaler Lage über *A* befindet, ist schlecht, denn die längs *B* herabhängenden Pendel divergiren in α viel weniger als in β in Folge der Anziehung von *A*, und es hat daher den Anschein, als wäre die Ladung in α viel schwächer als in β, was nicht der Fall ist.

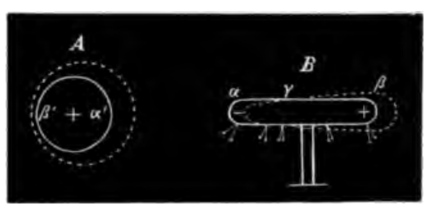


Fig. 7.

Wir können uns auch noch auf eine andere Art von der Elektricitätsvertheilung bei der Induction überzeugen.

Wäre z. B. der Körper *B* (Fig. 7) bei γ theilbar, und würden wir die beiden Theile während der Induction von einander trennen, so müsste der eine negativ, der andere positiv elektrisch sein. Wir

können den Versuch machen, ohne den Körper B wirklich zu zertheilen; wenn wir nämlich eine kleine Metallkugel, die an einem isolirenden Stiele sitzt, während der Induction bei α an B anlegen, so bildet sie ja einen Theil von B und muss daher jetzt weniger Elektricität enthalten als im normalen Zustande. Entfernen wir also dieselbe von B und aus dem Bereich von A, so muss sie negativ elektrisch erscheinen. Legen wir die Probekugel aber bei γ an, so wird sie unelektrisch, und legen wir sie bei β an, so wird sie positiv elektrisch sein müssen. Alle diese Beziehungen lassen sich leicht bestätigen, wenn wir das Elektroskop zu Hilfe nehmen. Gesetzt wir hätten die Probekugel bei α angelegt; wir nehmen sie von dort weg und berühren damit den Knopf a unseres Elektroskopes (Fig. 1).

Sogleich sehen wir die Metallstreifen $c\,c$ divergiren, d. h. die Kugel war elektrisch. Um nun zu entscheiden, ob die Kugel + oder — war, benützen wir gleich das Phänomen der Induction; wir reiben ein Stück Siegellack, wodurch dasselbe bekanntlich negativ elektrisch wird, und nähern dasselbe dem Knopf a, durch die dabei auftretende Induction wird der Knopf a + und die Metallstreifen —. Wäre das Elektroskop ganz ungeladen gewesen, so müssten letztere schon durch diese — Ladung allein divergiren; allein wir haben demselben schon durch die Probekugel eine gewisse Ladung mitgetheilt gehabt, in Folge deren bereits Divergenz eingetreten war. Es ist klar, dass letztere, wenn sie die Folge einer negativen Ladung war, durch die Induction des Siegellacks noch vermehrt werden muss; war sie aber durch eine positive Ladung hervorgerufen, so muss sie beim Annähern des Siegellacks verringert werden. Auf diese Weise lässt sich entscheiden, ob die dem Elektroskop mitgetheilte Ladung eine positive oder negative war. Der Versuch zeigt uns nun, dass die Probekugel dem Ende α eine negative, dem Ende β eine positive und bei γ gar keine Ladung entnimmt.

Auf gleiche Weise lässt sich zeigen, dass die Probekugel von der inducirenden Kugel A, je nachdem man sie bei α' oder β' anlegt, ganz verschiedene Elektricitätsmengen aufnimmt, was die Ungleichförmigkeit der Ladung auf A beweist.

Aus der Darstellung, die wir vom Vorgange der Induction gegeben haben, folgt unmittelbar, dass die positiven und negativen Ladungen des inducirten Körpers in quantitativer Beziehung einander unter allen Umständen gleich sein müssen, denn der Mangel an Elektricität auf der einen Seite ist ja die Folge des Ueberschusses auf der anderen, oder umgekehrt.

Die Richtigkeit dieses Satzes wird durch alle Experimente bestätigt. Entfernen wir z. B. die inducirende Kugel *A* (Fig. 7), so verschwindet sofort jede Divergenz der Pendel, d. h. der Körper *B* ist wieder unelektrisch wie früher; oder machen wir letzteren bei γ wirklich theilbar und übertragen wir die Ladungen der einzelnen Theile nach einander auf einen dritten, so bleibt auch dieser unelektrisch, u. dergl. mehr.

Wir haben bisher nur den Fall betrachtet, dass der inducirte Körper isolirt war; wir wollen diese Bedingung nun fallen lassen. Wenn wir den Körper *B* (Fig. 7), während er der Induction von *A* unterworfen ist, ableitend mit der Hand berühren oder auf irgend eine andere Weise mit der Erde verbinden, so bemerken wir, dass die Pendel der Seite α noch stärker divergiren als bisher, diejenigen der Seite β dagegen zusammenfallen; die Indifferenzzone γ ist verschwunden. Der Grund dieses Verhaltens ist leicht einzusehen. Denken wir uns an das Ende β des Conductors *B* (Fig. 7), während derselbe isolirt ist, einen grossen unelektrischen und gleichfalls isolirten Körper angelegt, so wird ein Theil der von *A* abgestossenen positiven Elektricität in diesen übergehen, und dadurch wird die Zone γ etwas gegen β zu rücken. Wenn wir uns den angelegten Körper nun immer mehr vergrössert denken, so wird die Zone γ schliesslich das Ende β erreichen und auf den grossen Körper übergehen. Ganz dasselbe haben wir aber bei Verbindung von *B* mit der Erde. Da letztere gegen *B* unendlich gross ist, so wird alle positive Elektricität von *B* auf die Erde übergehen und die Indifferenzzone γ wird sich irgendwo auf der Erde befinden. Im abgeleiteten Zustande bleibt somit *B* negativ elektrisch zurück, und die Vertheilung der Ladung wird so sein, wie es Fig. 8 veranschaulicht. Auch das Ende β ist jetzt negativ, und wenn die Pendel dort bei der gewöhnlichen Versuchsanordnung nicht divergiren, so hat das seinen Grund darin, dass wegen der grösseren Entfernung von *A* die Dichte der negativen Elektricität in β unverhältnissmässig kleiner ist als in α.

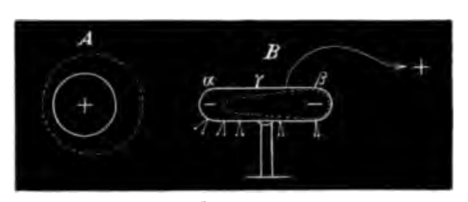


Fig. 8.

Bei jeder Induction kann somit die eine Elektricität vom inducirten Körper beliebig weggeleitet werden, die andere nicht; man unterscheidet daher gewöhnlich zwischen freier und gebundener Elektricität, doch ist dieser Ausdruck insofern unglücklich gewählt, als

er zu der Meinung Veranlassung geben kann, dass Elektricität im gebundenen Zustande nach aussen nicht so wirkt wie in freiem Zustande. Das ist aber durchaus nicht wahr, die Wirkung ist stets die gleiche, nur scheint gewöhnlich gebundene Elektricität nach aussen nur schwach oder gar nicht zu wirken, weil ihr stets die bindende Elektricität — die ja immer vorhanden sein muss, wo gebundene ist — entgegenwirkt.

Bei dem eben besprochenen Falle der Ableitung ist es ganz gleichgiltig, an welchem Punkt von B wir dieselbe anbringen; wir können den Draht, der B mit der Erde verbinden soll, an das Ende β oder an α anlegen. Der Erfolg ist stets derselbe. Das scheint auf den ersten Blick unwahrscheinlich, denn leiten wir in α ab, so muss die abgestossene positive Elektricität, bevor sie zur Erde strömen kann, sich in B von β nach α, also der Abstossung entgegen bewegen. Der Grund, warum dies doch möglich ist, kann hier noch nicht vollständig erörtert werden, es sei nur erwähnt, dass der Ableitungsdraht, während er dem Ende α genähert wird, gleichfalls der Induction von Seiten der Kugel A ausgesetzt ist, und dass sein gegen α gewendetes Ende, weil er mit einem sehr grossen Körper, der Erde, in Verbindung steht, noch stärker negativ wird als α selbst; bei der Berührung verbinden wir also α mit einem noch stärker negativen Körper, und es muss daher negative Elektricität von diesem auf B übergehen. Dieser Process ist aber in Allem und Jedem gleich einem Uebergange positiver Elektricität von B auf den Ableitungsdraht respective die Erde. Nach unseren Anschauungen heisst ja einem Körper negative Elektricität entziehen i. e. ihm seinen Mangel an Elektricität entziehen nichts anderes als ihm Elektricität zuführen.

Wenn wir die positiv geladene Kugel A dem isolirten Conductor B nähern, dann letzteren mit einem dritten Körper C verbinden, so wird dieser gleichfalls positiv; unterbrechen wir nun die Verbindung zwischen B und C und entfernen wieder A, so bleibt B negativ elektrisch zurück. Diese Ladung können wir nun zum grössten Theil auf einen vierten Körper, D, übertragen, indem wir diesen mit B verbinden. Dann können wir den ganzen Process von vorne beginnen lassen und durch abermaliges Annähern der Kugel A in B freie positive Elektricität erzeugen; wir können so durch Wiederholung der beschriebenen Operationen die weiteren Körper C', C'' . . positiv und die Körper D', D'' . . negativ laden. Durch diese Anhäufung freier elektrischer Ladungen schaffen wir uns einen Arbeitsvorrath, für welchen offenbar eine äquivalente mechanische Arbeit geleistet

werden muss. Diese findet sich auch dadurch verursacht, dass wir eine Anziehungskraft zu überwinden haben, wenn wir den positiven Körper *A* von dem abgeleiteten und negativ elektrischen Körper *B* wieder entfernen wollen. Auf diesem Principe, durch mechanische Arbeit positive und negative Ladungen in bedeutender Quantität zu erzielen, beruhen die sogenannten Influenz-Elektrisirmaschinen, und es ist bekannt, dass das Drehen der influenzirenden Scheibe einer solchen eine bedeutend grössere mechanische Arbeit erfordert, wenn sie geladen ist, als im ungeladenen Zustande; dieses Plus an mechanischer Arbeit entspricht eben dem durch die erzeugten Elektricitätsmengen repräsentirten Arbeitsvorrathe.

Es wurde schon erwähnt, dass wir in dem Phänomen der Induction, wie es vorstehend beschrieben wurde, auch die Ursache der Anziehung erblicken müssen, die ein elektrischer Körper auf einen unelektrischen ausübt; denn da der Schwerpunkt des negativ elektrischen Theiles von *B* (Fig. 6 *b*) dem Körper *A* näher ist als der Schwerpunkt des positiven Theiles, so kann daraus nur eine Anziehung resultiren. Man sieht ohne weiters ein, dass die Grösse dieser Anziehung wesentlich bedingt ist durch das Verhältniss der Distanzen dieser beiden Schwerpunkte vom anziehenden Körper; so muss z. B. diese Anziehung gleich Null werden, wenn die Dicke des inducirten Körpers gleich Null ist, und sie wird mit der Längsausdehnung desselben wesentlich wachsen. Unter übrigens gleichen Umständen wird dieselbe also ihren grössten Werth erreichen, wenn wir den inducirten Körper leitend mit der Erde verbinden und dadurch seine Länge — in elektrischer Beziehung — unendlich gross machen. Es ist auch eine bekannte Thatsache, dass leichte Körperchen, z. B. Hollundermarkkügelchen oder Papierschnitzel, von einem elektrischen Körper viel lebhafter angezogen werden, wenn sie auf einer leitenden Unterlage ruhen, als wenn sie isolirt sind.

Ein vollkommener Isolator, d. h. ein Körper, der eine Verschiebung seines Elektricitätsgehaltes im Innern absolut nicht zulässt, müsste nach dem Vorstehenden von einem elektrischen Körper auch gar nicht angezogen werden. Nun kennen wir zwar Substanzen, wie z. B. das Paraffin, die einen geladenen Conductor auch bei längerer Berührung durchaus nicht entladen, die also vollkommene Isolatoren zu sein scheinen, aber wir kennen keinen Körper, der nicht von einem elektrischen angezogen würde. Es ist das kein unlösbarer Widerspruch mit unseren Anschauungen, es führt uns das nur zu einer etwas modificirten Vorstellung von der Constitution eines Iso-

lators. Es wurde schon von Faraday [1]) die Ansicht ausgesprochen, dass selbst die best isolirenden Substanzen, wie Paraffin, Schellack etc. nicht absolute Isolatoren seien, sondern ein Gemisch von solchen mit guten Leitern; in der That denken wir uns zwischen die absolut isolirende Masse eines Körpers kleine leitende Partikelchen eingesprengt, die aber untereinander in keinem Zusammenhange stehen, so erhalten wir einen Körper, der in elektrischer Beziehung alle jene Erscheinungen darbieten muss, die wir thatsächlich an Isolatoren wahrnehmen. Würden wir z. B. einen solchen Körper in die Hand nehmen und damit eine geladene Kugel berühren, so könnte deren Ladung nicht entweichen, da zwischen ihr und der Hand sich keine continuirliche Reihe von Leitern vorfindet; es würde sich ein solcher Körper in dieser Beziehung also wie ein absoluter Isolator verhalten. Setzen wir denselben aber der Induction eines geladenen Leiters aus, so müssen Phänomene auftreten, wie wir sie bei absoluten Isolatoren nicht beobachten könnten. Die Ladung der Kugel *A* (Fig. 9) wird auf die in der isolirenden Masse des Körpers *B* eingelagerten leitenden Partikel inducirend wirken und in einem jeden von diesen wird die bekannte Neuvertheilung der Elektricität eintreten. Im Ganzen wird sonach der Schwerpunkt der negativen Massen näher an *A* liegen wie der der positiven und es wird zwischen *A* und *B* Anziehung eintreten. Die Grösse dieser Kraft wird von der Menge und Grösse der leitenden Partikel abhängen und umsomehr sich der Wirkung auf einen Leiter nähern, je mehr die isolirende Masse in *B* gegen die leitende zurücktritt.



Fig. 9.

Die Anordnung der wirksamen Massen in einem solchen der Induction unterworfenen Isolator ist ganz analog der der Elementarmagnete in einem durch Annähern eines Magnetpols magnetisch erregten weichen Eisenstücke; so wie hier die Wirkung aller kleinen Magnete nach aussen sich durch zwei Pole ersetzen lässt, so fällt auch beim inducirten Isolator die Wirkung aller einzelnen Partikel mit jener zusammen, die der Anordnung auf einem inducirten Leiter entspricht, nur wird sie unter übrigens gleichen Umständen in letzterem Falle grösser sein. — Wie wir bei Besprechung der Dielektrica noch ausführlicher sehen werden, sind die leitenden Partikel eines Isolators

[1]) Experim. Res. 11. Reihe. § 1164.

nichts anderes als die Moleküle der Substanz selbst, die durch den leeren Raum von einander getrennt sind.

Man kann diese Verhältnisse durch ein einfaches Experiment illustriren; wir hängen einen stabförmigen Isolator, etwa eine lange Siegellack- oder Ebonitstange, in der Mitte an einem leitenden Faden oder feinem Drahte auf, so dass derselbe wie eine Declinationsnadel in der Horizontalen schwingen kann und bedecken die eine Hälfte desselben mit Staniol, so dass wir diese dadurch in einen Leiter verwandeln. Wenn wir nun eine geriebene Glasstange der isolirenden Seite nähern, so bemerken wir eine Anziehung; dasselbe tritt ein, wenn wir sie der leitenden Seite nähern, aber in einem etwas stärkeren Masse, wie meist schon der Augenschein lehrt. Doch kann man sich davon noch genauer überzeugen, wenn man die möglichst gleichmässig geriebene Glasstange parallel dem aufgehängten Stabe nähert; es wird dann immer die leitende Seite stärker angezogen, was aus der entsprechenden Drehung des Stabes erhellt. Zur Controle kann man auch den Glasstab umkehren und der nun eintretende gleiche Effect lehrt, dass das nicht etwa die Folge einer ungleichförmigen Elektrisirung des Glasstabes war.

Derartige Versuche wurden auch messend verfolgt, so z. B. von Matteuci[1]) nach der Coulomb'schen Methode der Schwingungen; er untersuchte, in welchem Verhältniss die Kräfte standen, die zwischen dem elektrisirten Coulomb'schen Pendel und verschiedenen Kugeln aus Blei, Harz etc. auftraten, die dessen Induction unterworfen waren. Für Kugeln von 15 cm Durchmesser, die sich 100 mm vom Pendel entfernt befanden, erhielt er je nach dem Materiale, aus dem sie bestanden, folgende relative Kräfte:

Blei	1
Schwefel	0·607
Harz	0·476

Es ist also die auftretende Kraft grösser bei dem leitenden Blei als bei den nachfolgenden isolirenden Substanzen.

Wenn wir das Vorangegangene zusammenfassen, so müssen wir sagen, dass die Grösse der Induction, welche zwischen zwei Leitern, z. B. den Körpern A und B in Fig. 7, auftritt, von sehr mannigfachen Umständen abhängt; zunächst kommt die Ladung von A in Betracht, und es kann keinem Zweifel unterliegen, dass mit einem Wachsen derselben auch die Anziehung zwischen A und B wächst,

[1]) Ann. de ch. et de phy. (3.) XXVII.

doch zeigt eine einfache Ueberlegung, dass letztere nicht proportional der Ladung wächst, sondern schneller als diese. Denn bezeichnen wir mit $+E$ die Ladung von A, mit $-e$ und $+e$ die dadurch erzeugten Ladungen auf B sowie durch r_1 und r_2 die Entfernungen der Schwerpunkte der letzteren von A (wobei wir vorläufig die Ladung auf A als unveränderlich und im Centrum vereinigt betrachten), so erhalten wir für die Anziehung F den Ausdruck:

$$F = \chi \cdot \frac{E\,e}{r_1^2} - \chi \frac{E\,e}{r_2^2} = \chi \cdot E \cdot e \left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Verdoppeln wir nun die Ladung auf A, so werden die Ladungen auf B auch vermehrt werden, um die Grössen $-\eta$ und $+\eta$, so dass wir für die nunmehrige Anziehung F_1 erhalten:

$$F_1 = \chi \cdot \frac{2\,E\,(e+\eta)}{r_1^2} - \chi \cdot \frac{2\,E \cdot (e+\eta)}{r_2^2} = \chi \cdot 2\,E\,(e+\eta)\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right).$$

Die Grössen r_1 und r_2 bleiben unverändert; man hat somit für das Verhältniss der Kräfte in beiden Fällen:

$$\frac{F}{F_1} = \frac{E \cdot e}{2\,E\,(e+\eta)} = \frac{1}{2 + 2\,\frac{\eta}{e}},$$

d. h. während die Ladung in A von 1 auf 2 wächst, steigt die Anziehungskraft von 1 auf $\left(2 + 2\,\frac{\eta}{e}\right)$.

Ausser von der Grösse der Ladung von A hängt aber die Wirkung auf B auch noch von der Entfernung ab und es folgt aus dem allgemeinen Kraftgesetz unmittelbar, dass diese Wirkung rasch mit der Entfernung abnimmt und im Unendlichen gleich Null wird. Da diese Abnahme proportional dem Quadrate der Entfernung erfolgt, so wird man kräftige Inductionswirkungen stets nur auf verhältnissmässig kleine Abstände hin hervorrufen können.

Auch die Dimensionen und die Lage des inducirten Körpers B gegen den inducirenden werden eine sehr wesentliche Rolle spielen. denn sobald die beiden Distanzen r_1 und r_2 merklich gleich werden, verschwindet jede Inductionswirkung; gleicherweise ist auch zu beachten, dass die ursprüngliche Ladung auf A nicht in Ruhe bleibt, sondern eine neue Gleichgewichtslage einnimmt, wodurch wieder die Distanzen r_1 und r_2 je nach den Dimensionen von A verändert werden. Wenn wir schliesslich noch erwähnen, dass auch die Natur der Körper A und B von bedeutendem Einflusse auf die Grösse der Induction sind, insoferne sie nämlich mehr oder minder gute Leiter

oder Isolatoren sein können, so geht daraus wohl zur Genüge hervor, dass die Intensität der Kraft, die zwischen einem elektrischen und unelektrischen Körper thätig ist, eine sehr complicirte Function der jeweiligen Umstände ist, mit deren allgemeiner Charakterisirung wir uns vorläufig begnügen wollen.

Da das Phänomen der Induction stets auftritt, wenn ein elektrischer Körper von anderen Körpern umgeben ist, so werden wir demselben bei keinem Experimente entgehen können; es wird daher nothwendig sein, noch auf einige allgemeine Beziehungen hinzuweisen, von denen wir später öfters Gebrauch machen werden. Wenn sich in der Nachbarschaft eines elektrischen Körpers *A* mehrere Leiter oder Isolatoren *B*, *C*, *D* etc. befinden, so werden nicht nur diese alle der Induction von *A* aus unterworfen sein, sondern sie werden sich auch gegenseitig je nach ihrer Lage und ihren Dimensionen elektrisch beeinflussen müssen. Wenn z. B. wie in Fig. 10 dem positiven Körper *A* ein unelektrischer *C* gegenübersteht, so kann es nicht gleichgiltig sein, ob sich zwischen diesem und *A* noch ein dritter Körper *B* befindet oder nicht; denn da letzterer der Induction durch *A* unterworfen ist, so wirkt jetzt auf *C* nicht nur die Ladung von *A*, sondern auch noch die von *B*, und da von letzterem die positiv elektrischen Massen näher an *C* sich befinden wie die negativ elektrischen, so muss durch die Dazwischenkunft von *B* die Wirkung von *A* auf *C* noch verstärkt werden. Diese Verstärkung wird offenbar um so beträchtlicher sein, einen je grösseren Raum zwischen *A* und *C* der Körper *B* ausfüllt. Man sieht — und das wird für spätere Beobachtungen noch von Wichtigkeit sein — dass so durch nahe aneinander gelagerte leitende Partikelchen, wenn dieselben auch unter einander isolirt sind, die Wirkung einer elektrischen Ladung fast ungeschwächt auf grosse Distanzen übertragen werden kann.



Fig. 10.

So wie der Körper *B*, wenn er sich isolirt zwischen *A* und *C* befindet, die Wirkung dieser beiden auf einander verstärkt, so kann er dieselben auch schwächen, wenn er ableitend mit der Erde verbunden oder in einer zu *A C* senkrechten Richtung sehr ausgedehnt ist. In diesem Falle entweicht die positive Ladung von *B* in die Erde oder in die entfernten Partien von *B*, und *C* steht nur unter dem Einflusse des positiven *A* und des negativen *B*; durch letzteres muss aber des ersteren Wirkung geschwächt werden.

Wir können diese Verhältnisse sehr leicht durch das Experiment verificiren, wenn wir A durch die geriebene Glasstange, B durch einen isolirt aufgestellten Metallschirm und C durch unser Elektroskop ersetzen.

Letzteres zeigt durch die Divergenz seiner Metallplättchen den Grad der Einwirkung von A an, und diese Divergenz vermehrt sich noch etwas, wenn wir den Metallschirm B isolirt dazwischenschieben, vorausgesetzt, dass dieser keine grosse Querdimension hat. In dem Momente aber, wo wir diesen ableitend mit der Hand berühren, ohne an der Stellung der drei Körper gegen einander etwas zu ändern, verschwindet die Divergenz im Elektroskope fast vollständig, zum Beweise, dass jetzt der Einfluss von A durch den von B fast ganz paralysirt ist. Unterbrechen wir jetzt die Ableitung von B, so dass es wieder isolirt ist, und entfernen A, so überwiegt nun die auf B zurückgebliebene negative Ladung über die jetzt weiter entfernte von A, und das Elektroskop divergirt abermals.

Wenn wir aber in beiden Fällen den Sinn dieser Divergenz prüfen, z. B. durch Annähern einer geriebenen Siegellackstange an den Knopf des Elektroskops, so finden wir, dass es im ersten Falle unter dem Einflusse einer positiven, im zweiten unter dem Einflusse einer negativen Ladung divergirte.

Bei einer Anordnung also wie in Fig. 11, wo sich zwischen dem positiven Körper A und dem unelektrischen C ein zur Erde abgeleiteter Metallschirm B befindet, wird letzterer den Körper C fast vollständig vor der Einwirkung von A schützen, und wir sagen ganz passend, es befinde sich C in dem elektrischen Schatten von B.

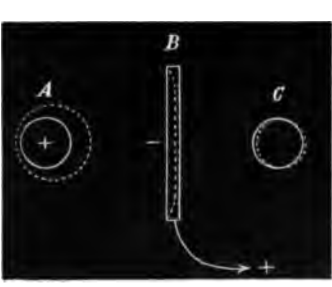


Fig. 11.

Diese Schutzwirkung von B auf C wird eine absolut vollständige — wie wir später noch ausführlicher sehen werden — wenn der Körper B so beschaffen ist, dass er den einen der Körper A oder C ganz umschliesst; wir haben also darin einen sehr bemerkenswerthen experimentellen Behelf, denn es kommt dabei gar nicht auf die Form oder Grösse von B an, es muss dasselbe nur irgend eine geschlossene, leitende und mit der Erde verbundene Fläche bilden, die den Raum in zwei von einander ganz gesonderte Theile zerlegt. Befindet sich in dem einen Theile irgendwelche Elektricität, so ist vor deren Einwirkung doch jeder Körper im ganzen anderen Theil des Raums ge-

schützt, gerade so als ob gar keine Elektricität vorhanden wäre. Experimentiren wir also mit elektrischen Körpern, und wollen wir einen bestimmten der Wirkung aller anderen entzogen haben, ohne ihn räumlich zu entfernen, so genügt es, denselben mit irgend einer zur Erde abgeleiteten und selbst leitenden Hülle zu umgeben. Von diesem Kunstgriff wird man oft Gelegenheit haben Gebrauch zu machen.

Wenn, wie früher gezeigt wurde, der Körper *B* in Fig. 10 durch seine Dazwischenkunft die Wirkung von *A* auf *C* verstärkte, so sind wir also nicht mehr berechtigt, die Kraft zwischen zwei Körpern lediglich als Function ihrer Ladungen und deren Entfernungen von einander aufzufassen, wie dies bei Annahme des Coulomb'schen Kraftgesetzes der Fall ist, sondern werden dieselbe auch als von dem Zwischenmedium abhängig betrachten müssen. Dieses Zwischenmedium muss der Natur der Sache nach ein Isolator sein, wir haben aber gesehen, dass diese sich so verhalten, als würden sie zum Theil aus leitenden Partikeln bestehen, und gerade für diese Anordnung passt unser Schema in Fig. 10. Es wird also die Kraft, die wir thatsächlich zwischen zwei Körpern beobachten können, auch noch von der Natur des Zwischenmediums abhängen und unser Kraftgesetz müsste genauer so formulirt werden:

$$F = \chi \cdot K \cdot \frac{e e'}{r^2},$$

wo K eine Constante ist, die nur von der physikalischen Natur des Zwischenmediums abhängt und deren Werth für jeden Isolator ein bestimmter ist. Letzteres gilt aber naturgemäss auch nur insolange als der Isolator isotrop ist, denn sonst, etwa bei krystallinischer Structur desselben variirt der Werth von K mit der Richtung im Isolator. Dieser Einfluss des Zwischenmediums ist durchaus nicht gering und wir können denselben schon mit ganz einfachen Hilfsmitteln ersichtlich machen. Wenn wir z. B. eine geladene Kugel in geringer Distanz über dem Knopf des Elektroskops fixiren, so beobachten wir eine gewisse Divergenz der Metallplättchen, die uns ein Maass der Einwirkung der Kugel auf das Elektroskop ist. Sobald wir nun zwischen letzteres und die Kugel eine isolirte Metallplatte von einigen Millimetern Dicke und geringem Durchmesser einschieben, so beobachten wir, wie schon erwähnt wurde, eine Vermehrung der Divergenz. Dasselbe werden wir auch wenngleich in geringerem Maasse wahrnehmen, wenn wir statt der Metallplatte eine solche aus Paraffin, Ebonit oder sonst einer isolirenden Substanz verwenden, nur müssen wir dabei beachten,

dass diese nicht selbst elektrisch sei, was gewöhnlich der Fall ist, und sie deshalb vor dem Versuche einige Male mit der Flamme eines Bunsen'schen Brenners bestreichen, wodurch ihr eine eventuelle Ladung entzogen wird. Also auch bei Zwischenschaltung eines festen Isolators erhalten wir eine kräftigere Wirkung, als wenn blos Luft die beiden Körper trennt, und es wird uns dies erklärlich, wenn wir bedenken, dass im Paraffin oder Ebonit zahlreiche kleine Leiter durch die Neuvertheilung der Elektricität auf ihnen die isolirende Distanz gleichsam verkürzen. Noch weiter gehend werden wir auch voraussehen, dass die Wirkung in Luft oder sonst einem Gase eine andere sein muss als im leeren Raum, denn ein Gas müssen wir auffassen als ein Conglomerat räumlich von einander getrennter, also isolirter kleiner Leiter, der Moleküle. Auch diese Differenz zwischen der Wirkung im gaserfüllten und im leeren Raum lässt sich durch das Experiment nachweisen, aber freilich nicht auf so einfache Weise wie in den früheren Fällen, denn diese Differenz ist schon äusserst gering und erfordert zu ihrer Auffindung besondere Hilfsmittel. Eben aus dieser Kleinheit müssen wir schliessen, dass die Moleküle in den Gasen unter gewöhnlichen Verhältnissen noch viel weiter auseinanderliegen als die leitenden Partikelchen in den Isolatoren.

Wenn wir also von Kräften, die zwischen elektrischen Körpern thätig sind, auf die Quantität der Ladungen schliessen, so müssen wir eigentlich stets die Natur des Mediums, durch welches hindurch die Kräfte wirken, mit in Rücksicht ziehen; in den meisten Fällen pflegen wir uns diese Vernachlässigung aus eben den Gründen zu gestatten, aus welchen wir bei gewöhnlichen Wägungen den Auftrieb in der Luft nicht berücksichtigen oder bei der Bestimmung des Brechungsexponenten eines Körpers die Lichtgeschwindigkeit in Luft statt im leeren Raum zu Grunde legen.

Steht einem positiv elektrischen Körper A ein mit der Erde verbundener Leiter B gegenüber, so nimmt letzterer in Folge der Induction eine negative Ladung an; es ist ohneweiters einleuchtend, dass diese die Wirkung des positiven A auf alle etwa sonst noch vorhandenen Körper schwächen wird mit Ausnahme derjenigen, welche zwischen A und B gebracht werden, denn befindet sich ein dritter Körper C in solcher Entfernung, dass dagegen die Distanz AB nur klein ist, so werden die Wirkungsrichtungen von A und B nahezu zusammenfallen, und da die Kräfte in entgegengesetztem Sinn wirken, so werden sie sich gegenseitig schwächen. Rückt aber C näher heran, so kann diese Schwächung auch in Verstärkung übergehen, wie das

evident ist für alle Punkte einer Kugel, die AB zum Durchmesser hat; denn sobald der Winkel, den die beiden Kräfte mit einander bilden, gleich oder kleiner als ein rechter wird, ist die Resultirende jedenfalls grösser als jede der Componenten, wobei jedoch vorausgesetzt ist, dass die Ladungen von A und B als punktförmig concentrirt angenommen werden können. Fällt der Körper C gerade in die Verbindungslinie von A und B, so summiren deren Wirkungen sich einfach. Bei sehr vielen Anordnungen wird aber die Distanz AB gegen die Entfernung von C sehr klein sein, und es wird daher die Wirkung auf C wesentlich kleiner sein, als wenn nur eine der Ladungen A oder B vorhanden wäre. Wir sagen daher, diese Ladungen seien gebunden oder condensirt und nennen ein solches System AB einen Condensator.

Um die wesentliche Eigenschaft eines solchen, nämlich bei starken Ladungen auf in der Nähe befindliche Körper doch wenig zu wirken, möglichst hervortreten zu lassen, werden wir dafür sorgen müssen, dass die Ladungen sich so nahe als möglich an einander befinden, und da diese Ladungen auch beträchtlich sein sollen, so müssen wir den zwei Theilen des Condensators auch eine beträchtliche Ausdehnung geben. Wir gelangen so zur üblichen Construction des Plattencondensators; denn geben wir den beiden Körpern A und B die Form von Platten, so haben wir beide Bedingungen erfüllt, es können die Ladungen bedeutende sein und sie können sehr nahe aneinander gebracht werden. Haben wir also eine isolirte, etwa kreisförmige Metallplatte mit einer positiven Ladung versehen und wollen wir die Wirkung derselben nach aussen abschwächen, so nähern wir ihr eine zweite parallele und zur Erde abgeleitete Platte bis auf eine möglichst geringe Distanz, die in der Praxis bis auf Bruchtheile eines Millimeters herabsinken kann. Die Wirkung dieses Vorganges ist aus Fig. 12 ersichtlich. So lange die abgeleitete und unelektrische Platte B von der + elektrischen und isolirten Platte A weit entfernt ist (Fig. 12 *a*) wirkt letztere stark auf das darunter befindliche Elektroskop, und zwar in der bekannten Weise; sobald wir aber die Platte B an A heranbringen, entwickelt sich in B eine

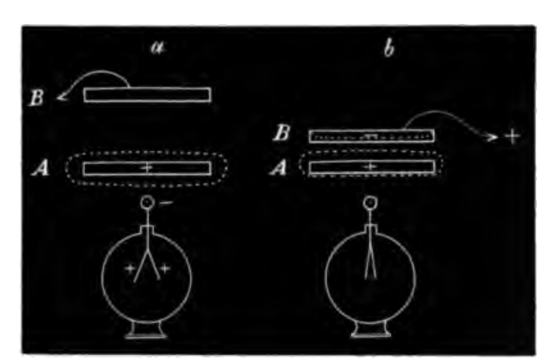


Fig. 12.

negative Ladung, welche nun die Wirkung des positiven A auf das Elektroskop so abschwächt, dass letzteres gar nicht merklich mehr afficirt wird.

Man kann einem solchen Condensator natürlich eine sehr verschiedene Form geben, doch haben sich in der Praxis nur dreierlei Arten besonders bewährt: der hier erwähnte Plattencondensator, wohl die älteste Form, die schon von Franklin in der nach ihm benannten Tafel zur Anwendung gebracht wurde; ferner der Kugelcondensator, bei welchem die beiden Körper A und B concentrische Kugelschalen bilden, und endlich die bekannte Leydnerflasche. Jede von diesen Anordnungen bietet gewisse Vortheile dar; so ist z. B. die Leydnerflasche zum Experimentiren sehr bequem, da man sie überall ohne besonderes Stativ verwenden kann, auch ist sie leicht herstellbar und vermag im Vergleich zum Plattencondensator grosse Ladungen aufzunehmen. Der Kugelcondensator bietet den grossen Vortheil, dass bei ihm allein die Vertheilung der angesammelten Elektricitäten genau bestimmbar ist, und der Plattencondensator schliesslich besitzt die ihm allein zukommende Eigenschaft, dass die beiden Theile sich beliebig von einander entfernen lassen; letzterer Umstand ist aber bei vielen Untersuchungen und Experimenten von besonderer Wichtigkeit.

Im Condensator besitzen wir auch ein Mittel, um auf einem Körper eine grössere Quantität Elektricität anzuhäufen, als dies unter gewöhnlichen Verhältnissen möglich ist. Verbinden wir z. B. einen Körper A mit irgend einer Elektricitätsquelle, so wird von dieser so lange Elektricität auf A überströmen, bis die Abstossung von Seiten der dort schon angehäuften auf die nachströmende Elektricität der Kraft gleich wird, welche letztere hinüberzutreiben strebt. Stellen wir nun dem Körper A einen anderen mit der Erde verbundenen Leiter B gegenüber, so wirkt die entgegengesetzte Ladung, welche dieser nun annimmt, nach aussen der Ladung von A entgegen und es können daher von der Elektricitätsquelle neue Mengen auf A übergehen. Wenn wir nun letztere Verbindung unterbrechen und den Körper B entfernen, so haben wir A mit einer weit grösseren Elektricitätsmenge geladen, als dies ohne Zuhilfenahme von B möglich gewesen wäre.

Wie schon öfters zu bemerken Gelegenheit war, ist die Erscheinung der Induction bei gar keinem elektrischen Experimente auszuschliessen; wir müssen uns daher daran gewöhnen, stets auf dieselbe Rücksicht zu nehmen, da sonst irrthümliche Resultate unvermeidlich wären. Um nur einen solchen Fall zu erwähnen, bei

dem eine Vernachlässigung der Inductionswirkung zu ganz falschen Resultaten führt, erinnere ich an die Versuche Coulomb's mit der Drehwaage. Da handelt es sich um die Grösse der abstossenden Kraft zwischen zwei gleich geladenen und gleich grossen Kugeln in einer bestimmten Distanz. Für diese Distanz setzt man gewöhnlich die Entfernung der beiden Kugelmittelpunkte von einander, und man könnte dies auch mit voller Berechtigung thun, wenn die Elektricitätsladungen gleichmässig über jede der Kugeln vertheilt wären. Das kann aber nicht mehr der Fall sein, sobald diese so nahe gebracht werden, dass sie merkliche Kräfte auf einander ausüben, sondern die Vertheilung wird jetzt in Folge der Induction eine solche sein, wie sie Fig. 13 darstellt. Die Schwerpunkte der beiden elektrischen Ladungen liegen beträchtlich weiter auseinander als die Kugelcentren und soll das Experiment mit der Rechnung übereinstimmen, so muss diese neue Distanz derselben zu Grunde gelegt werden. Da nun diese an der direct beobachteten Entfernung der Kugeln anzubringende Correctur nur schwer zu bestimmen, auch für jede Kugelgrösse und Distanz eine andere ist, so gehören die Coulomb'schen Versuche, wenn sie exact ausgeführt sein sollen, zu den allerschwierigsten.



Fig. 13.

Es ist leicht einzusehen, dass die erwähnte Correctur nur klein ist, so lange die verwendeten Kugeln sehr klein sind, bedient man sich aber grösserer und gar anders geformter Körper, so wird man ohne Berücksichtigung der Induction in die grössten Irrthümer verfallen. So ist es z. B. Harris [1]) gegangen, der die Versuche Coulomb's wiederholte und dabei dessen Kraftgesetz durchaus nicht bestätigt fand; das war aber trotz der Richtigkeit seiner Beobachtungen und der Richtigkeit des Coulomb'schen Gesetzes ganz natürlich, weil er die Wirkung der Induction vollständig ausser Acht liess. Harris machte bei dieser Gelegenheit auch die Beobachtung — die schon in § 1 erwähnt wurde — dass ein stark positiv elektrischer Körper einen schwach positiven nur ausserhalb einer gewissen Entfernung abstosst, innerhalb derselben aber ihn anziehe und schloss daraus gleichfalls auf die Unrichtigkeit des Coulomb'schen Gesetzes. Dabei wird aber wieder der Fehler der Vernachlässigung der Induction begangen. Die ganz richtige Beob-

[1]) Phil. Trans. 1836. II.

achtung erklärt sich folgendermassen: in grosser Entfernung tritt Abstossung auf, weil die auf dem schwach elektrischen Körper B durch Induction erzeugten positiven und negativen Ladungen erstens nur sehr schwach sind und zweitens nahe die gleiche Distanz vom stark geladenen Körper A haben: rückt aber B näher an A heran, so werden die inducirten Ladungen stärker, ihre Distanzen von A unterscheiden sich schon beträchtlich und es muss daher ein Punkt kommen, von welchem an die Anziehung durch Induction die Abstossung zwischen den ursprünglichen Ladungen überwiegt. Von da ab wird B von A angezogen.

Die Lage des Punktes, bei welchem dieser Uebergang von Abstossung in Anziehung stattfindet, hängt ganz ab von dem Verhältniss der beiden ursprünglichen Ladungen und von den Dimensionen der Körper; nur für ursprünglich gleiche Ladungen auf gleichen Körpern findet in jeder Distanz Abstossung statt.

Auch die Person des Experimentators ist der Induction unterworfen, und nicht nur diese, sondern alle Geräthe, Möbel etc., die sich im Experimentirraume vorfinden, ja selbst die Wände des letzteren; wir müssen uns gegenwärtig halten, dass wenn wir glauben, mit einer gewissen Elektricitätsmenge allein arbeiten zu können, dies immer ein Irrthum ist. Bringen wir z. B. eine positiv geladene Kugel isolirt in ein Zimmer hinein, so sind in demselben Momente alle Wände und Flächen desselben durch Induction mit negativen Ladungen versehen, und zwar ist deren Summe — wenn der Raum ein geschlossener ist — gerade so gross wie die positive Ladung unseres Versuchskörpers. Da diese Ladungen gewöhnlich verhältnissmässig weit entfernt sind, so vernachlässigen wir ihren Einfluss auf die Experimente, das ist aber nicht mehr thunlich, wenn ein oder der andere Theil der inducirten Körper — und dazu gehört auch der Experimentator selbst — dem Versuchsobjecte zu nahe kommt.

IV. Capitel.

Vertheilung der Elektricität auf Leitern im Allgemeinen.

§ 9. Allgemeines über die Vertheilung der Elektricität auf den Körpern.

Wir haben bisher im Allgemeinen die Kräfte betrachtet, welche elektrische Ladungen auf einander ausüben, ohne besonderes Gewicht darauf zu legen, wie diese auf den Körpern vertheilt sind; wir wollen nun an die Frage herantreten, wie gross ist die Elektricitäts-

menge an jedem Punkte des Körpers, wenn wir demselben ein gewisses Elektricitätsquantum mittheilen und dasselbe ohne äussere Einflüsse zur Ruhe kommt. Da müssen wir zunächst zwei Fälle unterscheiden: ist der Körper, den wir laden, ein Isolator oder mangelhafter Leiter, so hängt die Vertheilung der Elektricität auf ihm ganz von den jeweiligen und zufälligen Umständen ab, so dass es nicht möglich ist, einen allgemeinen Gesichtspunkt für diesen Fall zu gewinnen; die Ladung pflanzt sich in einem solchen Isolator gewöhnlich von der Stelle aus, wo wir sie zuführen, sehr langsam durch das ganze Innere fort, so dass ein solcher, wenn er längere Zeit mit einer Elektricitätsquelle in Verbindung war, nicht nur an seiner Oberfläche, sondern in seiner ganzen Masse geladen erscheint. Diese Ladung haftet aber mit einer gewissen Intensität und entweicht nur ebenso langsam wie sie aufgenommen wurde. Ist daher z. B. ein Stück Paraffin oder Siegellack, das man als Isolirungsmittel benutzt hat, im Laufe des Gebrauches elektrisch geworden, so entzieht man ihm durch Ableitung seiner Oberfläche auch nur die dort haftende Ladung und bald dringen aus dem Innern wieder neue Elektricitätsmengen hervor; es hilft dann nur ein gänzliches Umschmelzen, wobei alle Elektricität abgeleitet und das Isolirungsmittel wieder unelektrisch wird. — Ist der zu ladende Körper aber ein guter Leiter, dann kennen wir zwar auch nur in den wenigsten Fällen die Elektricitätsvertheilung vollkommen genau, aber es lassen sich stets gewisse Bedingungen angeben, denen dieselbe unter allen Umständen gehorchen muss.

Man hat zunächst auf experimentellem Wege versucht, über diese Bedingungen ins Reine zu kommen; wohl eine der ersten Fragen, auf die man dabei stossen musste, ist die, ob die chemische Natur des Leiters auf die Ladung, welche er annimmt, von Einfluss ist. Diese Frage hat schon Coulomb durch das Experiment in verneinendem Sinne beantwortet; wenn er in seiner Drehwaage Kugeln aus den verschiedenartigsten Metallen anwendete, so blieb der Erfolg, nämlich die Kraft, die sie aufeinander ausübten, unter übrigens gleichen Umständen immer derselbe. Es nehmen also gleich grosse Kugeln aus Eisen, Kupfer, Blei, Messing etc. von ein und derselben Elektricitätsquelle auch stets gleiche Quantitäten auf. Man hat auch auf keine andere Weise bisher einen Einfluss der Natur des Körpers auf die Vertheilung seiner Ladung nachweisen können, so dass wir vollkommen berechtigt sind anzunehmen, dass ein solcher Einfluss überhaupt nicht existirt.

Mit der Coulomb'schen Drehwaage lässt sich noch ein zweiter wichtiger Versuch ausführen; wenn wir in derselben zwei Paare gleich

grosser Kugeln verwenden, von denen das eine massiv, das andere aber hohl ist, so werden wir diesen Unterschied durch keinerlei Unterschied in der elektrischen Wirkung wahrnehmen. Die Hohlkugeln laden sich genau mit denselben Quantitäten wie die Vollkugeln und ihre Wirkung aufeinander ist dieselbe wie bei letzteren. Wir müssen daraus schliessen, dass in beiden Fällen die Vertheilung der Elektricität die gleiche ist, dass also nicht die ganze Masse der Leiter mit Elektricität geladen wird, sondern dass diese sich nur an der Oberfläche derselben vorfindet. Dieser Satz, dass Elektricität, wenn sie auf einem Leiter im Gleichgewichte ist, sich nur an der Oberfläche aufhält, lässt sich durch zahlreiche Experimente bekräftigen und kann auch, wie wir später sehen werden, theoretisch bewiesen werden. Von den bekannten Versuchen, welche diesen Satz illustriren, will ich nur einen erwähnen, der von Faraday herrührt. Man ersetzt den Knopf des Elektroskops durch eine horizontale Metallplatte und legt auf diese eine etwa 1 m lange Metallkette; ladet man nun das Elektroskop bis zu einer passenden Divergenz der Metallplättchen und hebt mittelst eines isolirenden Hakens die Kette an einem Ende langsam in die Höhe, doch so, dass ihr zweites Ende stets mit der Platte des Elektroskops in Verbindung bleibt, so bemerkt man ein allmäliges Zurückgehen der Divergenz. Lässt man die Kette wieder langsam in ihre ursprüngliche Lage zurück, so steigt auch die Divergenz wieder bis zum anfänglichen Betrag. Bei diesem Versuche bleibt die Masse des geladenen Körpers (Elektroskop + Kette) ungeändert, aber die freie Oberfläche wird durch das Abwickeln der Kette vergrössert respective wieder verkleinert beim Zurückfallen derselben. Da ein und dieselbe Elektricitätsmenge also einmal auf einer kleineren und dann auf einer grösseren Oberfläche ausgebreitet ist, so kann im letzteren Falle auf einem bestimmten Stück derselben, z. B. den Metallplättchen, nur eine geringere Quantität sich vorfinden und die Divergenz muss abnehmen. Es ist selbstverständlich, dass der Versuch nur gelingen kann, wenn die Oberfläche der Kette von derselben Grössenordnung ist wie die der übrigen Theile des Elektroskops, da sonst einer unmerklichen Aenderung der Oberfläche auch nur eine unmerkliche Aenderung der Divergenz entsprechen würde.

Als erste Bedingung für die Vertheilung der Elektricität auf einem Leiter werden wir also die ansehen, dass die ganze Ladung sich nur über die Oberfläche, nicht aber auch im Innern desselben ausbreitet. Wir können gleich hinzufügen, dass, wenn der Körper keinen äusseren Einflüssen unterworfen ist, wie z. B. Induction durch

einen anderen, sondern wenn seine elektrische Ladung nur der eigenen Wechselwirkung folgt, dass dann die Ladung immer über die ganze Oberfläche continuirlich ausgebreitet ist, gleichgiltig welche Form letztere hat. Es kann die Quantität der Ladung pro Flächeneinheit von Punkt zu Punkt sehr beträchtlich variiren, es kann fast die ganze Ladung auf einem verschwindend kleinen Theil der Oberfläche concentrirt sein, aber es ist nicht möglich, dass irgend ein noch so kleiner Theil derselben ganz ohne Ladung sei; dieser Satz, den wir gleichfalls erst später beweisen können, gilt aber, wie gesagt, nur dann, wenn die Ladung keinen äusseren Kräften unterworfen ist, also bei einer Vertheilung, die wir die normale nennen. Tritt Induction auf, dann werden wir an dem Körper, wie das früher schon erörtert wurde, positiv und negativ elektrische Theile unterscheiden können, die durch eine ganz unelektrische Zone von einander getrennt sind.

Aber nicht nur die Grösse der Oberfläche auch deren Form ist für die Vertheilung der Ladung massgebend; zwei Leiter von ganz gleich grosser, aber verschieden geformter Oberfläche werden unter übrigens gleichen Umständen sehr verschiedene Ladungen aufnehmen. Theilt man ihnen aber auf irgend eine Weise gleiche Ladungen mit, so werden diese nach aussen doch ganz verschieden wirken, weil die Vertheilung derselben im Raum eben nicht die gleiche ist. Wir dürfen uns daher nicht wundern, dass Harris [1]), als er die Versuche Coulomb's wiederholte, dabei aber statt Kugeln ganz beliebig geformte Körper, Kegel etc. anwendete, zu Resultaten kam, die mit den Berechnungen nach Coulomb's Gesetz nicht stimmten. Auf Kugeln fällt der Schwerpunkt der elektrischen Ladung mit dem geometrischen Schwerpunkt des geladenen Körpers zusammen und man kann die Lage des letzteren für die des ersteren nehmen; das gilt aber für anders geformte Körper durchaus nicht mehr, es liegt z. B. bei einem Kegel der Schwerpunkt der Ladung viel näher an der Spitze, als der der Masse. — Wir werden nach alledem sagen müssen, dass die Vertheilung der Elektricität auf einem Leiter wesentlich durch die Grösse und Form von dessen Oberfläche bedingt ist, aber gar nicht durch die Anordnung der Masse in seinem Innern.

Ist auf einem beliebigen Leiter eine Elektricitätsmenge normal vertheilt, so folgt schon aus der Natur des Gleichgewichtszustandes, dass ein jedes Theilchen dieser Ladung nur Kräften unterworfen sein

---

[1]) l. c.

kann, welche senkrecht auf die Oberfläche in dem entsprechenden Punkte stehen und nach auswärts wirken; denn wären dieselben gegen das Innere des Körpers gerichtet, so könnte das betreffende Theilchen ihnen folgen und es wäre eben noch kein Gleichgewichtszustand erreicht. Dasselbe gilt für eine schief nach auswärts gerichtete Kraft. Wäre z. B. die resultirende Wirkung aller Theilchen e' e'' . . . (Fig. 14) auf das Theilchen e nach R gerichtet, so würde diese Kraft sich in die Componenten P und Q zerlegen, parallel und senkrecht zur Oberfläche im Punkte e. Von diesen würde Q wegen des begrenzenden Isolators keine Bewegung von e hervorrufen, wohl aber P und es müsste sich e so lange in der Oberfläche verschieben, bis $P = o$ wird. Ist also Ruhe eingetreten, so können die resultirenden Kräfte nur senkrecht zur Oberfläche und nach aussen wirken; sie äussern sich als Zug auf die Oberfläche und suchen letztere zu vergrössern. Diese Kräfte, deren Wirkung wir gewöhnlich elektrische Spannung oder elektrischen Druck nennen, können sehr beträchtlich sein und sie führen bei entsprechender Steigerung entweder zu einer Entladung der Elektricität in Funkenform, wenn die Bedingungen günstig sind, oder zu einem Aufreissen und Zertrümmern der Oberflächen, wobei dann die Ladung zugleich mit kleinen Körpertheilchen in der Richtung der Normalen die Oberfläche verlässt.

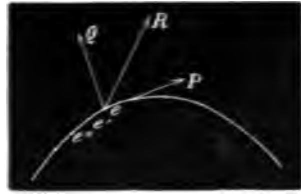


Fig. 14.

Es folgt aber aus der Natur des Gleichgewichtszustandes auch, dass eine über einen Leiter normal vertheilte Ladung, sei dieser nun massiv oder hohl, auf keinen Punkt im Innern irgend eine Kraft ausüben kann: denn gesetzt wir hätten es mit einem massiven Körper zu thun und es würde die Resultirende aller Kräfte der oberflächlichen Ladung auf einen Punkt im Innern nicht gleich Null sein, so müsste dort Induction auftreten und freie Elektricität sich von diesem Punkte im Innern an die Oberfläche begeben; es wäre also noch kein Ruhezustand erreicht. Soll demnach dieser hergestellt sein, so muss die Ladung so vertheilt sein, dass sie auf keinen Punkt im Innern eine Kraft ausübt, respective auf keine dort etwa befindliche Elektricität. Da nun die Vertheilung einer Ladung auf einem hohlen Körper ganz die gleiche ist wie auf einem massiven von derselben Form und Grösse und da die Kraft auf irgend einen Punkt nur von dieser Vertheilung abhängt, so wird auch obiger Satz nicht nur für massive, sondern für beliebige Leiter Geltung haben.

Man kann das eben ausgesprochene Gesetz durch einen einfachen Versuch illustriren. Man isolirt zu diesem Zwecke eine horizontale Metallplatte von ihrer Unterlage durch ein Stück Paraffin und setzt auf diese das Elektroskop. Die Metallplatte muss so gross sein, dass sie allseitig unter dem Fusse des Elektroskops genügend hervorragt, um eine Glocke aus Drahtgeflecht über letzteres stürzen und auf die Platte aufsetzen zu können. Die Glocke und die Platte bilden so einen allseitig geschlossenen und isolirten Leiter, in dessen Innerem sich das Elektroskop befindet. Ladet man nun das Gehäuse auch beliebig stark, so wird man doch keinerlei Wirkung auf das Elektroskop wahrnehmen, zum Beweise, dass die Ladung wirklich auf das Innere nicht wirkt.

Es müsste bei diesem Versuche streng genommen die Glocke nicht aus Drahtgeflecht, sondern etwa aus Blech oder Staniol hergestellt sein, da ja der Raum ein geschlossener sein soll, allein um das Elektroskop im Innern beobachten zu können, muss man wohl irgendwelche Oeffnungen lassen, da es durchsichtige feste Leiter nicht gibt; wenn die Maschen des Gitters nicht zu weit sind, etwa 1 cm^2 nicht übersteigen, so kann man die Vertheilung auf einer solchen Glocke als identisch ansehen mit der auf einer massiven. Um sich davon zu überzeugen, wie gross die Ladung der Glocke war — es genügt die Bestreichung mit einer geriebenen Glasstange — nimmt man von irgend einem Punkte derselben durch Anlegen einer Probekugel etwas weg, hebt die Glocke auf und berührt das Elektroskop mit der Probekugel. Die nun eintretende Divergenz lässt einen Schluss auf die Grösse der Ladung zu. Es ist aber einleuchtend, dass selbst bei einer beträchtlichen Ladung, wenn nur die Glocke gross genug ist, keine Einwirkung auf das Elektroskop bemerkt werden kann, wie immer auch diese Ladung vertheilt sein mag, einfach weil ihre Entfernung eine zu grosse ist; es muss daher noch gezeigt werden, dass nicht in diesem Umstande, sondern wirklich in der Art der Vertheilung der Ladung die Ursache der absoluten Ruhe des Elektroskops zu suchen sei. Dieser Nachweis lässt sich sehr leicht führen. Man entfernt zu diesem Zwecke den metallenen Teller, auf welchem das Elektroskop stand, setzt letzteres direct auf den Tisch und stülpt die Glocke darüber, doch so, dass sie vom Tisch durch drei Paraffinstücke getrennt ist. Wir haben jetzt das Elektroskop wieder in einem leitenden Gehäuse, aber es ist von demselben nicht mehr vollständig umgeben, da der Boden desselben fehlt. Laden wir nun die Glocke wie früher, so zeigt das Elektroskop sofort eine starke Divergenz,

denn jetzt fehlen die Ladungen des Bodens, die im früheren Versuche die Wirkung der übrigen paralysirt hatten: es ist damit erwiesen, dass die frühere Ruhe des Elektroskops nicht eine Folge der zu grossen Entfernungen der elektrischen Massen, sondern deren besonderer Vertheilung war.

Noch durch einen anderen Versuch können wir recht deutlich zeigen, dass die Ladung eines Leiters auf das Innere desselben nicht wirkt. Wir ersetzen den Knopf des Elektroskops wieder durch eine Platte und stellen auf dieselbe einen unten geschlossenen Metallcylinder, etwa 30 cm hoch und 10 cm im Durchmesser; wir laden nun diesen und das Elektroskop zusammen entweder direct durch Berührung mit der geriebenen Glasstange oder durch Induction, indem wir dieselbe nur nähern, den Cylinder mit dem Finger ableiten, wieder isoliren und die Glasstange entfernen. Das ganze System ist dann negativ geladen und der grösste Theil dieser Ladung wird über den Cylinder ausgebreitet sein: die Divergenz des Elektroskops gibt uns ein Mass der Ladung. Lassen wir nun von oben leitende Körper in den Cylinder hineinfallen, etwa Schrotkörner oder Stücke von Staniol, so können wir denselben bis zur Häfte anfüllen, ohne dass an der Divergenz des Elektroskops sich eine merkliche Aenderung zeigt. Es besteht also zwischen diesen Leitern im Innern des Cylinders und dessen Ladung aussen keine Wechselwirkung, oder besser gesagt nur eine äusserst geringe, denn der Cylinder ist nicht vollkommen geschlossen, sondern oben offen, und es muss daher eine solche Wirkung wenn auch in sehr geringem Betrage noch vorhanden sein. Dieselbe wird um so bedeutender, je mehr wir den Cylinder anfüllen, denn je näher die hineingeworfenen Stücke der Oeffnung kommen, unter einem um so grösseren Gesichtswinkel erscheint dieselbe von ihnen aus; sobald aber der Gesichtswinkel des offenen Raums nicht mehr zu vernachlässigen ist gegen den des bedeckten, können wir den betreffenden Punkt auch nicht mehr als in einem geschlossenen Gefässe befindlich betrachten. Wenn die Stücke im Innern sich der Oeffnung nähern, so tritt ihre Oberfläche an die Stelle des fehlenden Stückes der äusseren und nimmt dementsprechend einen gewissen Theil der Ladung auf, was durch eine Verringerung der Divergenz im Elektroskope angezeigt wird.

Wir wollen nun versuchen, uns ein Bild von der Elektricitätsvertheilung für einen bestimmten, aber möglichst einfachen Fall zu verschaffen, etwa für den Fall, dass eine ausgedehnte ebene Platte durch Deformation allmälig in eine Kugelschale übergeht. Denken

wir uns eine kreisförmige ebene Platte A (Fig. 15 a) und dieselbe zunächst ganz gleichförmig mit positiver Elektricität belegt. Es ist klar, dass die Theilchen e in der Mitte der Scheibe in Folge der Symmetrie der Anordnung in Ruhe bleiben werden, nicht so die excentrisch gelegenen e_1 e_2 . . ., auf welche Abstossungskräfte wirken, deren Richtung ungefähr durch die Pfeile angedeutet ist und deren in die Oberfläche fallenden Componenten eine Verschiebung elektrischer Massen gegen den Rand E_1 E_2 der Platte im Gefolge hat. Wenn Gleichgewicht eingetreten ist, so werden wir also auf der Platte eine vom Centrum gegen den Rand zu wachsende Dichte der Elektricität, d. h. Elektricitätsmenge per Flächeninhalt vorfinden, doch wird die Vertheilung so sein müssen, dass sie symmetrisch ist nach jeder geometrischen Symmetrieebene der Platte. Entsprechende Punkte oben und unten werden also gleiche Ladungen haben, ebenso alle Punkte der Oberfläche, welche gleich weit vom Centrum abstehen. Die schliessliche Vertheilung wird also ungefähr so sein, wie sie die punktirte Linie vorstellt.

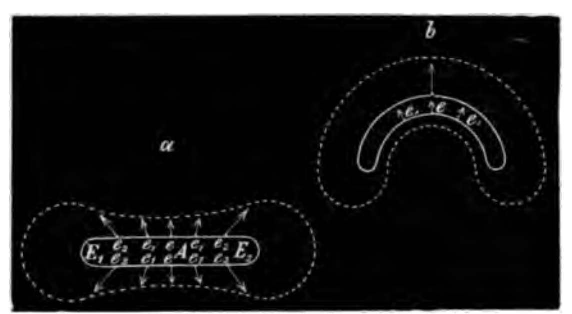


Fig. 15.

Lassen wir nun die Platte sich so deformiren, dass sie ein Stück einer Kugelschale bildet (Fig. 15 b), so wird die Vertheilung auch eine wesentlich andere werden müssen. Auf die Theilchen e e_1 . . . werden nun Kräfte ausgeübt, die gegen das Innere zu wirken und welche Elektricität so lange von der concaven auf die convexe Seite treiben, bis die abstossende Kraft von daher genügend gross wird, um ein weiteres Ueberströmen zu verhindern; die punktirte Linie gibt ein Bild des schliesslichen Gleichgewichtszustandes. Es lässt sich leicht einsehen, dass dieser Uebergang von der inneren auf die äussere Fläche noch zunehmen muss, wenn die Krümmung wächst, und dass schliesslich, wenn aus der Platte eine Hohlkugel geworden ist, sich auf der inneren Fläche gar keine Elektricität mehr vorfinden wird. Letzteres geht aus dem Umstande hervor, dass, wie schon erörtert wurde, die äussere Ladung auf eine innere etwa noch vorhandene nicht wirkt, letztere selbst aber auf jedes ihrer Theilchen eine Kraft ausüben würde, die gegen das Innere des Körpers, respective gegen

die äussere Seite hin gerichtet ist; ist in dieser Richtung der Bewegung der Elektricität nichts im Wege stehend, so müsste die ganze Ladung, ihrer eigenen Wechselwirkung folgend, von innen nach aussen sich begeben. Haben wir also auf der ebenen Platte auf jeder Seite die Elektricitätsmenge Q gehabt, so wird sich auf der daraus gebildeten Kugelschale aussen die Quantität 2 Q und innen 0 vorfinden.

Aus dieser Betrachtung lässt sich auch ganz im Allgemeinen ersehen, dass auf einem geladenen Körper die convexen Theile grössere Ladungen besitzen werden als die concaven; die grösste Dichte wird sich an Kanten, Ecken, Spitzen u. dergl. vorfinden.

Stellen wir ein offenes cylindrisches Metallgefäss auf eine isolirende Unterlage und laden dasselbe, so können wir mittelst einer Probekugel sowohl von innen als von aussen Probeladungen wegnehmen und am Elektroskop auf ihre Grösse prüfen; wir finden so, dass die der convexen Seite entnommenen Quantitäten immer grösser sind als die von der concaven Seite.



Fig. 16.

Der früher besprochene Fall der Umwandlung einer Kreisplatte in eine Kugelschale lässt sich auch mathematisch verfolgen, und man kann, wenn die Platte als unendlich dünn angesehen wird, für jede Entfernung vom Centrum die Dichte der Ladung angeben; liegen die betrachteten Punkte nicht zu nahe am Rande, für welche selbst sich die Dichte als unendlich ergibt, so können die berechneten Resultate als ein ziemlich treues Bild der Vertheilung an gleichgeformten, endlich dünnen Körpern gelten. Die Rechnung selbst, die zuerst von W. Thomson[1] ausgeführt wurde, interessirt uns hier vorläufig noch nicht und es sollen im Folgenden nur die Resultate derselben betrachtet werden.

Fig. 16 a stellt die Kreisscheibe dar, für deren 6 Punkte 1, 2 ... 6 die Berechnung gemacht ist. Punkt 1 ist das Centrum und die Punkte 2 ... 6 theilen den Radius in 6 gleiche Theile. Für die

[1] Papers on El. and Magn. pag. 178.

Figuren *b*—*h*, die Centriwinkeln von 10°—360° entsprechen, gelten die Zahlen für die entsprechend gelegenen Punkte. Geben wir den Körpern solche Ladungen, dass die mittlere Dichte (von Innen und Aussen) im Punkte 1 gleich 1 ist, so ergeben sich für die übrigen Punkte die folgenden Dichten:

a) Concav (oben)	Convex (unten)	*e)* Concav (oben)	Convex (unten)
Punkt 1 . . . 1·0000	1·0000	Punkt 1 . . . 0·1202	1·8798
„ 2 . . . 1·0142	1·0142	„ 2 . . . 0·1266	1·8862
„ 3 . . . 1·0607	1·0607	„ 3 . . . 0·1418	1·9014
„ 4 . . . 1·1547	1·1547	„ 4 . . . 0·1779	1·9375
„ 5 . . . 1·3416	1·3416	„ 5 . . . 0·2570	2·0166
„ 6 . . . 1·8091	1·8091	„ 6 . . . 0·4959	2·2555
b) Concav (oben)	Convex (unten)	*f)* Concav (oben)	Convex (unten)
Punkt 1 . . . 0·9136	1·0685	Punkt 1 . . . 0·0135	1·9865
„ 2 . . . 0·9457	1·0826	„ 2 . . . 0·0144	1·9874
„ 3 . . . 0·9920	1·1289	„ 3 . . . 0·0176	1·9906
„ 4 . . . 1·0858	1·2227	„ 4 . . . 0·0253	1·9983
„ 5 . . . 1·2722	1·4091	„ 5 . . . 0·0451	2·0181
„ 6 . . . 1·7386	1·8755	„ 6 . . . 0·1195	2·0925
c) Concav (oben)	Convex (unten)	*g)* Concav (oben)	Convex (unten)
Punkt 1 . . . 0·8636	1·1364	Punkt 1 . . . 0·0001	1·9999
„ 2 . . . 0·8776	1·1504	„ 2 . . . 0·0002	1·9999
„ 3 . . . 0·9236	1·1964	„ 3 . . . 0·0002	2·0000
„ 4 . . . 1·0165	1·2893	„ 4 . . . 0·0004	2·0001
„ 5 . . . 1·2884	1·5611	„ 5 . . . 0·0009	2 0006
„ 6 . . . 1·6652	1·9379	„ 6 . . . 0·0042	2·0040
d) Concav (oben)	Convex (unten)	*h)* Concav (oben)	Convex (unten)
Punkt 1 . . . 0·4459	1·5541	Punkt 1 . . . 0·0000	2·0000
„ 2 . . . 0·4469	1·5551	„ 2 . . . 0·0000	2·0000
„ 3 . . . 0·4828	1·5910	„ 3 . . . 0·0000	2·0000
„ 4 . . . 0·5566	1·6648	„ 4 . . . 0·0000	2·0000
„ 5 . . . 0·7065	1·8147	„ 5 . . . 0·0000	2·0000
„ 6 . . . 1·0933	2·2015	„ 6 . . . 0·0000	2·0000

Verfolgt man diese Zahlen genau, so sieht man, wie die Vertheilung auf der Kreisplatte allmälig in die der Kugel übergeht. Bei

der Kreisplatte ist der Unterschied auf beiden Seiten gleich Null, dagegen die Differenz zwischen Centrum und Rand im Maximum; je mehr die Platte sich krümmt, desto mehr verschwindet die letztere auf der convexen Seite, und desto schärfer tritt der Unterschied zwischen dieser und der concaven hervor, bis bei der Kugel schliesslich die ganze Ladung auf der äusseren Seite, und zwar vollkommen gleichmässig vertheilt erscheint.

§ 10. Allgemeine Gesetze über die Vertheilung auf Leitern.

Nach dem was bisher über die Vertheilung der Elektricität auf Leitern, die keinen äusseren Einflüssen unterworfen sind, gesagt wurde, können wir folgende allgemeine Gesetze aufstellen:

1. Im Gleichgewichtszustande befindet sich Elektricität nur an der Oberfläche der Körper, und zwar nur an der äusseren, nicht auch an der inneren, falls der Körper Hohlräume enthält.
2. Die Ladung ist stets continuirlich über die ganze Oberfläche ausgebreitet, d. h. es ist an keinem Punkte derselben die Dichte gleich Null.
3. Die Kräfte, welche die einzelnen Theile der Ladung auf einander ausüben, sind stets nach aussen gerichtet und senkrecht auf die Oberfläche an dem betreffenden Punkte.
4. Die Ladung ist immer so vertheilt, dass ihre Wirkung auf jeden Punkt im Innern des Körpers gleich Null ist.

Es könnte Wunder nehmen und ist in der That von vornherein durchaus nicht einleuchtend, dass es bei jeder beliebigen Form eines Körpers doch immer möglich ist, eine elektrische Ladung so auf demselben zu vertheilen, dass obige vier Bedingungen erfüllt sind; wir werden später Gelegenheit haben, zu beweisen, dass dem doch so ist und dass wir den ebenerwähnten noch folgende vier Gesetze hinzufügen können:

5. Es gibt für eine elektrische Ladung auf jeder beliebigen Körperform eine Gleichgewichtslage.
6. Es gibt für eine jede Körperform immer nur eine einzige Vertheilung der Elektricität, bei welcher sie im Gleichgewichte ist.
7. Das Gleichgewicht ist stets ein stabiles; wird dasselbe durch äussere Einflüsse (Induction) gestört, so kehrt nach dem Aufhören derselben die Ladung wieder in ihre ursprüngliche Ruhelage zurück.
8. Die Art der Vertheilung einer Ladung ist von der Quantität derselben unabhängig.

V. Capitel.

Specielle Fälle der Vertheilung.

§ 11. Vertheilung auf einem Ellipsoïd.

Die Berechnung der elektrischen Vertheilung auf speciellen Körperformen ist nur in den seltensten Fällen strenge durchführbar; wir wollen sie hier nur in Bezug auf einen Fall, das Ellipsoïd, ausführen, weil aus dieser Form durch geeignete Substitutionen sich leicht ein Schluss auf andere in der Praxis oft vorkommende Formen ziehen lässt.

Wir denken uns um den Punkt *o* (Fig. 17) ein Ellipsoïd mit den Halbaxen *a*, *b*, *c* gelegt und sollen nun auf demselben eine elektrische Ladung so vertheilen, dass sie den obigen vier Bedingungen genügt. Den Punkten 1 und 2 gemäss müssen wir dieselbe über die ganze Oberfläche continuirlich vertheilen und ausserdem soll sie gemäss Punkt 4 so angeordnet sein, dass ihre Wirkung auf jeden Punkt im Innern gleich Null ist. Ist aber letztere Bedingung erfüllt, so ist auch dem Punkt 3 genügt, denn ist die Wirkung auf jeden Punkt des Körpers — und dazu gehört auch die Oberfläche, denn sie befindet sich innerhalb der Ladung — gleich Null, so kann man eine kleine ideelle Elektricitätsmenge in jeder Richtung durch oder auf demselben verschieben, ohne dass man auf einen Widerstand durch elektrische Kräfte stösst. Damit ist aber ausgesprochen, dass die Kraftwirkung der gesammten Ladung in jedem Punkte der Oberfläche nur eine auf dieselbe normale Richtung nach auswärts haben kann. Würde man die ideelle Probeladung etwa in dieser Richtung bewegen, so würde man auch den Einfluss dieser Wirkung als Anziehung oder Abstossung — je nach dem Vorzeichen der Ladung — wahrnehmen.

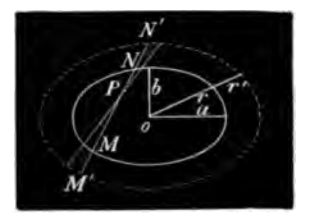
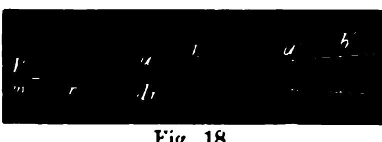


Fig. 17.

Wir hätten also unsere Ladung über das Ellipsoïd continuirlich so zu vertheilen, dass die Wirkung auf einen beliebigen Punkt im Innern gleich Null wird; dann haben wir allen Bedingungen genügt. Wir denken uns diese Vertheilung vorgenommen und das punktirte Ellipsoïd in Fig. 17 stelle uns die äussere Begrenzung der Ladung vor. In Wirklichkeit müssen wir uns dieselbe wohl als unendlich

dünn im Vergleich mit den Dimensionen der Körper denken, wenigstens lässt sich bisher auf keinerlei Weise eine Dicke derselben nachweisen: die elektrischen Massen hätten wir uns demnach als äusserst compressibel oder als sehr unelastisch vorzustellen. Wir wollen die Dicke der Ladungsschicht für die folgenden Betrachtungen als endlich ansehen und voraussetzen, dass die elektrischen Massen den Raum, den sie einnehmen, gleichmässig erfüllen. Die Raumdichte der Elektricität oder die Elektricitätsmenge, welche sich in der Volumseinheit vorfindet, wollen wir mit ρ bezeichnen. Wir werden uns mit dieser Vorstellung der Wirklichkeit beliebig nähern, wenn wir die Dicke der Ladung beliebig klein wählen: die Elektricitätsmenge, welche sich dann in dem Raume über der Flächeneinheit an irgend einem Punkte des Ellipsoïds vorfindet, ist das, was wir gewöhnlich die Flächendichte oder die Dichte schlechtweg an diesem Punkte nennen. Letztere Grösse wollen wir mit μ bezeichnen.

Es fragt sich nun, welche Form muss die äussere Begrenzung der Ladungsschichte haben, damit die Wirkung auf das Innere gleich Null wird. Um das zu finden, denken wir uns durch einen ganz beliebig gelegenen Punkt P einen Doppelkegel von äusserst kleinem Oeffnungswinkel gelegt, der aus der elektrischen Ladung die Raumstücke $N N'$ und $M M'$ herausschneidet. Es ist klar, dass wenn die Wirkung dieser zwei Massen auf den Punkt P gleich Null ist, dies auch von der ganzen übrigen Ladung gelten muss, da wir den Kegel in beliebiger Richtung durch P gelegt haben. Es wird aber die Wirkung der beiden Massen $N N'$ und $M M'$ dann einander gleich und entgegengesetzt, wenn die Längen $N N'$ und $M M'$ einander gleich sind. Denn befinde sich im Punkte P (Fig. 18) die elektrische Masse m, und sucht man die Kraft, welche auf dieselbe von der Masse in $a b$ ausgeübt wird, so erhält man zunächst für die Wirkung einer unendlich dünnen Schichte von $a b$, deren Höhe $d r$ sei, den Ausdruck:


Fig. 18.

$$d K = - \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega \cdot d r \cdot \rho}{r^2} = - m \omega \rho \cdot d r,$$

wo r die Distanz der Masse $a b$ von m, ω den sehr kleinen Oeffnungswinkel des Kegels und ρ die Raumdichte der Elektricität in $a b$ bezeichnet; $r^2 \omega$ ist die Fläche, welche von dem Kegel ω in der Distanz r vom Scheitel aus einer Kugelschale ausgeschnitten wird. Um die ganze Wirkung von $a b$ auf m zu finden, haben wir obigen Ausdruck zu

integriren und erhalten, wenn wir die Distanzen a und b von P aus zählen:

$$K = -m\,\omega\,\rho \int_a^b d\,r = -m\,\omega\,\rho\,(b - a).$$

Man sieht, dass diese Kraft ausser von den für den ganzen Kegel constanten Grössen m, ω und ρ nur noch von der Differenz $(b - a)$ oder der Dicke der wirksamen Masse abhängt; bezeichnen wir diese mit h, so haben wir

$$K = C \cdot h,$$

wo C eine für den ganzen Doppelkegel constante Grösse ist. Befindet sich sonst wo im Kegel noch die Masse $a'\,b'$ mit der Dicke h', so würde diese auf m die Kraft K' ausüben und es wäre

$$K' = C \cdot h'.$$

Wird also $h' = h$, so wird auch $K' = K$.

Die Bedingung für die Anordnung unserer elektrischen Ladung auf dem Ellipsoïd wird also die sein, dass jede Trajectorie, die wir durch irgend einen Punkt P im Innern desselben legen, die elektrische Schichte auf gleichen Strecken $N\,N'$ und $M\,M'$ schneidet. Sind diese gleich, so sind auch die Wirkungen der Massen in $N\,N'$ und $M\,M'$ auf P einander gleich und heben sich auf. Eine solche äussere Begrenzung der Ladung, die dieser Bedingung genügt, ist aber, wie sich leicht zeigen lässt, wieder ein Ellipsoïd, und zwar ein mit dem ursprünglichen concentrisches und homothetisches, d. h. ein solches, bei dem ein jeder Radius vector aus dem entsprechenden des inneren Ellipsoïdes durch Multiplication mit einer constanten Grösse erhalten wird. Bezeichnen wir diesen constanten oder Aehnlichkeitsfactor mit $(1 + \alpha)$, so ist ein jeder Radius vector r' des äusseren Ellipsoïdes gleich $r\,(1 + \alpha)$, wenn r den entsprechenden Radius vector des inneren Ellipsoïdes bezeichnet. Das gilt natürlich auch für die drei Halbaxen und bezeichnen wir die grösseren mit a', b', c', so haben wir:

$$a' = a\,(1 + \alpha),\; b' = b\,(1 + \alpha),\; c' = c\,(1 + \alpha).$$

Bezeichnen wir die Coordinaten des Punktes P, bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem, mit x, y, z und sei uns die Lage der Linie $N'\,M'$ gegeben durch ihre Richtungscosinusse u, v, w bezüglich der drei Axen, so werden die Coordinaten des Punktes N sein:

$$x + P\,N \cdot u,\; y + P\,N \cdot v,\; z + P\,N \cdot w$$

und die des Punkts M:

$$x - P\,M \cdot u,\; y - P\,M \cdot v,\; z - P\,M \cdot w.$$

Da die Punkte N und M der allgemeinen Gleichung ihres Ellipsoïdes $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ genügen müssen, so erhalten wir durch Substitution ihrer Coordinaten in dieser Gleichung:

$$\frac{(x + PN \cdot u)^2}{a^2} + \frac{(y + PN \cdot v)^2}{b^2} + \frac{(z + PN \cdot w)^2}{c^2} = 1$$

und

$$\frac{(x - PM \cdot u)^2}{a^2} + \frac{(y - PM \cdot v)^2}{b^2} + \frac{(z - PM \cdot w)^2}{c^2} = 1.$$

Wenn wir diese Gleichungen von einander subtrahiren, erhalten wir:

$$\frac{(x + PNu)^2 - (x - PM \cdot u)^2}{a^2} + \frac{(y + PNv)^2 - (y - PMv)^2}{b^2} +$$

$$+ \frac{(z + PNw)^2 - (z - PMw)^2}{c^2} = 0 \text{ oder:}$$

$$\frac{2x \cdot PN \cdot u + \overline{PN}^2 \cdot u^2 + 2xPM \cdot u - \overline{PM}^2 \cdot u^2}{a^2} +$$

$$+ \frac{2yPN \cdot v + \overline{PN}^2 \cdot v^2 \cdot + 2yPM \cdot v - \overline{PM}^2 v^2}{b^2} +$$

$$+ \frac{2zPNw + \overline{PN}^2 w^2 + 2zPMw - \overline{PM}^2 w^2}{c^2} = 0.$$

Wenn wir in diesem Ausdruck die Glieder, welche PN und PM in der ersten Potenz und jene welche sie in der zweiten Potenz enthalten, zusammenziehen, so kommen wir auf folgende Form:

$$(PN + PM)\left(\frac{2xu}{a^2} + \frac{2yv}{b^2} + \frac{2zw}{c^2}\right) +$$

$$+ \left(\overline{PN}^2 - \overline{PM}^2\right)\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}\right) = 0,$$

dividiren wir diese Gleichung noch durch $(PN + PM)$, so übergeht dieselbe in:

$$\frac{2xu}{a^2} + \frac{2yv}{b^2} + \frac{2zw}{c^2} + (PN - PM)\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2}\right) = 0 \ldots\ldots \text{I).}$$

Ganz dasselbe könnten wir in Bezug auf das äussere Ellipsoïd und die Punkte N' und M' ausführen und wir müssten offenbar zu einer ganz analogen Gleichung kommen, in der nur die Werthe PN, PM, a, b und c durch die analogen für das äussere Ellipsoïd geltenden

ersetzt sind; die Grössen x, y, z, u, v und w bleiben natürlich ungeändert. Wir würden demnach erhalten:

$$\frac{2xu}{a'^2}+\frac{2yv}{b'^2}+\frac{2zw}{c'^2}+(PN'-PM')\left(\frac{u^2}{a'^2}+\frac{v^2}{b'^2}+\frac{w^2}{c'^2}\right)=0\ldots\ldots\text{II}).$$

Da wir aber statt a' auch setzen können $a(1+\alpha)$, statt b', $b(1+\alpha)$ u. s. w., so besteht die Relation:

$$\text{II}=\frac{1}{(1+\alpha)^2}\,(\text{I}).$$

Multipliciren wir sonach die Gleichung II) mit $(1+\alpha)^2$, so erhalten wir:

$$\frac{2xu}{a^2}+\frac{2yv}{b^2}+\frac{2zw}{c^2}+(PN'-PM')\left(\frac{u^2}{a^2}+\frac{v^2}{b^2}+\frac{w^2}{c^2}\right)=0\ldots\ldots\text{III}).$$

Aus I) und III) folgt aber unmittelbar:

$$PN-PM=PN'-PM' \text{ oder } PM'-PM=PN'-PN.$$

Es ist also für den Fall, dass die elektrische Schichte von zwei concentrischen und homothetischen Ellipsoïden begrenzt wird, die Bedingung erfüllt, dass jede Trajectorie die Schale auf gleichen Strecken schneidet; die Wirkung einer solchen Schale, wenn die Raumdichte der Ladung überall constant ist, auf einen jeden Punkt im Innern ist somit gleich Null.

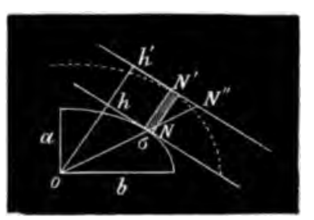


Fig. 19.

Um nun eine allgemeine Beziehung zwischen der Lage eines Punktes auf der Oberfläche des Ellipsoïdes und der Dichte der Elektricität in seiner Umgebung zu finden, betrachten wir den Punkt N (Fig. 19); die Elektricitätsmenge, welche über dem Flächenstückchen σ in dessen Umgebung lastet, ist gegeben durch die Grösse von σ, die Dicke der Ladungsschichte an diesem Punkte NN' und durch die überall als gleich vorausgesetzte Raumdichte der Elektricität ρ. Bezeichnen wir diese Elektricitätsmenge mit e, so erhalten wir:

$$e=\sigma\cdot NN'\cdot\rho,$$

NN' ist aber gleich hh', dem Abstande der Tangentialebenen in den ähnlich gelegenen Punkten N und N''; bezeichnen wir oh mit p, so ist $oh'=p(1+\alpha)$ und $hh'=p+\alpha p-p=\alpha\cdot p$. Es ist also:

$$e=\sigma\cdot\alpha\cdot p\cdot\rho.$$

Wählen wir das Flächestückchen σ so gross, dass es gleich der Flächeneinheit wird, so ist die Grösse e nichts anderes, als was wir

die Flächendichte am Punkte N, oder schlechtweg die Dichte der Elektricität im Punkte N nennen; bezeichnen wir diese durch μ, so wird:

$$\mu = \alpha \cdot p \cdot \rho.$$

Für die Gesammtladung auf dem Ellipsoïd gilt die Relation: $M = V \cdot \rho$, wo V das Volumen zwischen den beiden Ellipsoïdenschalen bedeutet. Dieses Volumen ist aber

$$v = \frac{4\pi}{3} a' b' c' - \frac{4\pi}{3} a b c = \frac{4}{3}\pi (a' b' c' - a b c) = \frac{4}{3}\pi a b c [(1 + \alpha)^3 - 1],$$

wo a' b' c', a b c wie früher die Halbaxen der Ellipsoïde und $(1 + \alpha)$ den Aehnlichkeitsfactor bezeichnen. Da wir für $(1 + \alpha)^3$ auch $1 + 3\alpha$ setzen können, so erhalten wir:

$$v = 4 \pi a b c \alpha$$

und für die Gesammtladung den Ausdruck:

$$M = 4 \pi a b c \alpha \cdot \rho.$$

Da aber nach dem früheren $\rho = \frac{\mu}{\alpha p}$ ist, so hat man $M = 4 \pi a b c \mu \cdot \frac{1}{p}$ oder für μ den Ausdruck:

$$\mu = \frac{M}{4 \pi a b c} \cdot p.$$

Es ist also die Dichte an irgend einem Punkte eines Ellipsoïdes proportional der Gesammtladung und dem Abstande des Centrums von der Tangentialebene an dem Punkte. Für die Endpunkte der Axen fällt der Werth von p mit den Werthen von a b c zusammen. Für diese Punkte ist also die Dichte den Halbaxen selbst proportional.

§ 12. Vertheilung der Elektricität auf Formen, die vom Ellipsoïd abgeleitet sind.

Lassen wir das Ellipsoïd in eine Kugel übergehen, so wird $a = b = c = p = R$, wenn R den Radius derselben bezeichnet; die obige Formel für μ übergeht dann in:

$$\mu = \frac{M}{4 R^2 \pi},$$

d. h. die Ladung ist ganz gleichmässig über die Oberfläche vertheilt, wie dies ja auch nach den Symmetrieverhältnissen bei der Kugel der Fall sein muss.

Lassen wir bei dem Ellipsoïde $a\,b\,c$ die eine Halbaxe c immer kleiner und kleiner werden, so übergeht das Ellipsoïd allmälig in eine unendlich dünne elliptische Platte von den Halbaxen a und b. Da, wenn $c = 0$ wird, auch p sich der Nulle nähert, übergeht der Quotient $\frac{p}{c}$ in den unbestimmten Ausdruck $\frac{0}{0}$, dessen Werth sich angeben lässt. Es ist allgemein:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}},$$

wenn die Coordinaten $x\,y\,z$ des zu p gehörigen Punktes vom Mittelpunkt des Ellipsoïdes aus gezählt werden.

Es wird dann

$$\lim \frac{p}{c} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \text{ und } \mu = \frac{M}{4\pi a b} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}.$$

Wird auch $a = b$, so übergeht die elliptische Platte in eine kreisförmige vom Radius a. Es wird dann

$$\mu = \frac{M}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{a^2}}} \text{ oder da } x^2 + y^2 = r^2 \text{ ist:}$$

$$\mu = \frac{M}{4\pi a^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a^2 - r^2}{a^2}}} = \frac{M}{4\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}.$$

Hier bezeichnet r die Entfernung des untersuchten Punktes vom Centrum der Platte.

Setzt man in dieser Formel $r = 0$, so erhält man die Dichte im Centrum; sie wird $\mu = \frac{M}{4\pi a^2}$, das ist genau so gross wie auf einer Kugel von gleichem Radius a und derselben Ladung. Setzt man $r = a$, so wird $\mu = \infty$, d. h. am Rande einer unendlich dünnen Kreisscheibe wäre die Dichte unendlich gross.

Es ist nicht schwer die factische Vertheilung der Elektriciät auf einer dünnen Scheibe mittelst der Probekugel zu prüfen, und man wird obige Formel bestätigt finden, so lange man nicht Punkte, die dem Rande zu nahe liegen oder diesen selbst untersucht, da für diesen Fall die Voraussetzungen der Berechnung der thatsächlichen Versuchsanordnung nicht mehr entsprechen. Auch darf man nicht

vergessen, dass, solange die Scheibe nicht sehr gross ist, durch das Anlegen der Probekugel die Elektricitätsvertheilung gestört wird und schon aus diesem Grunde eine scharfe Uebereinstimmung zwischen Rechnung und Beobachtung nicht zu erwarten ist. So fand Coulomb[1]) durch sehr sorgfältige Versuche bei einer dünnen kreisrunden Platte folgende Dichten:

Entfernung vom Centrum	Beobachtete Dichte	Berechnete Dichte
0 cm	1·000	1·000
2·7	1·001	1·020
5·4	1·005	1·090
8·1	1·170	1·250
10·8	1·520	1·667
12·15	2·070	2·296
13·5 (Rand)	2·900	∞

Vergleicht man hier die beobachteten und die nach obiger Formel berechneten Zahlen mit einander, so findet man für die ersten 5 eine ziemlich gute Uebereinstimmung: erst in der Nähe des Randes werden die Differenzen beträchtlich und wachsen natürlich sehr rasch.

Aus dem Umstande, dass auf einer unendlich dünnen kreisrunden Scheibe die Dichte der Elektricität am Rande unendlich gross wird, darf man aber keineswegs schliessen dass die ganze Ladung sich dort anhäufe; dieselbe bleibt continuirlich über die ganze Scheibe vertheilt und es lässt sich deren Betrag innerhalb eines jeden zum Rande concentrischen Kreises angeben. Wir wollen dies thun, weil sich daraus ein übersichtlicheres Bild der Vertheilung ergibt, als wenn man blos die Dichten in den einzelnen Punkten betrachtet. Wir denken uns zu diesem Zwecke zwei zum Rande concentrische Kreise auf der Scheibe gezogen, mit den Radien ρ und $\rho + d\rho$; den von diesen Kreisen begrenzten Ring können wir als gleichmässig mit Elektricität belegt ansehen, da seine Breite unendlich klein ist. Die Fläche dieses Ringes wird $= 2\pi\rho\, d\rho$ und seine Elektricitätsmenge $= 2\pi\rho\, d\rho \cdot \mu$, wenn wir mit μ die Dichte in der Distanz ρ vom Centrum bezeichnen. Suchen wir die Grösse der Ladung, die sich auf einer Kreisscheibe vom Radius r um das Centrum herum vorfindet und bezeichnen wir dieselbe mit q, so haben wir:

$$q = \int_0^r 2\pi\rho\, d\rho \cdot \mu.$$

[1]) Nach einer Angabe Biot's in dessen Traité II. 276.

Ersetzen wir hier μ durch seinen allgemeinen Werth, $\mu = \frac{M}{4\pi a} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - \rho^2}}$, wo M die Gesammtladung der Scheibe auf beiden Seiten und a deren Radius ist, so erhalten wir:

$$q = \frac{M}{2a} \int_0^r \frac{\rho\, d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = -\frac{M}{2a} \left[\sqrt{a^2 - \rho^2}\right]_0^r = -\frac{M}{2a} \left(\sqrt{a^2 - r^2} - a\right).$$

Denken wir uns also durch einen Kreis vom Radius r, der von $r = o$ bis $r = a$ wächst, die Kreisscheibe in zwei Theile zerlegt, so können wir nach obiger Formel berechnen, wie viel von der ganzen Ladung sich innerhalb und wie viel sich ausserhalb des Kreises r befindet. Nennen wir den ersteren Theil q_1 und den letzteren q_2, so erhalten wir folgende Tabelle, wobei zu bemerken ist, dass immer $q_1 + q_2 = \frac{1}{2} M$ sein muss, da M die Ladung auf beiden Flächen der Scheibe bedeutet.

$r = a \times$	$q_1 = M \times$	$q_2 = M \times$
0·0	0·000	0·500
0·2	0·015	0·485
0·5	0·066	0·434
0·6	0·100	0·400
0·8	0·200	0·300
0·866	0·250	0·250
0·9	0·282	0·218
1·0	0·500	0·000

Theilen wir also die Platte durch einen Kreis, dessen Radius gleich $0{\cdot}866 \cdot a$ ist, in zwei Theile, so befindet sich ausserhalb und innerhalb die gleiche Elektricitätsmenge.

Die Vertheilung der Elektricität auf einem langen Kreiscylinder, dessen Enden durch Halbkugeln gebildet werden, muss offenbar der an einem langgestreckten Ellipsoïde ähnlich sein; bei letzterem müssten wir die grösste Dichte an den Enden der grossen Axe finden und die kleinste in der Mitte. Coulomb[1]) hat auch den Fall eines solchen Cylinders untersucht, dessen Dicke ungefähr 5 cm und dessen Länge 80 cm betrug. Die beiden Enden waren durch Halbkugeln geschlossen. Setzt man die Dichte in der Mitte — wo sie am kleinsten gefunden wurde — gleich 1, so ergaben sich folgende Dichten:

[1]) Mém. de l'Akad. Paris 1788.

5	cm vom Ende	1·25
2·5	„ „ „	1·80
0	„ „ „	2·30

Würden sich die früher angegebenen Dimensionen, 5 cm und 80 cm, nicht auf einen abgerundeten Cylinder, sondern wirklich auf ein Ellipsoïd beziehen, so hätten die Dichten am Ende der kleinsten und grössten Axe sich verhalten müssen wie 2·5 : 40 oder wie 1 : 16, da an diesen Punkten die Dichten den Halbaxen selbst proportional sind. Statt dieses Verhältnisses wurde aber nur 1 : 2·3 gefunden; der grosse Unterschied rührt daher, dass das Ellipsoïd gegen das Ende viel spitziger verlaufen, also dort einen kleineren Krümmungshalbmesser haben würde, als dies beim Cylinder, der angewendet wurde, der Fall ist. Die beobachteten Zahlen geben daher auch nur ein qualitatives Bild der Vertheilung an einem gestreckten Ellipsoïde.

Denken wir uns einen Theil eines Leiters sehr rasch verjüngt, so können wir denselben ungefähr als das Ende eines sehr lang gestreckten Ellipsoïdes ansehen, es wird daher die Dichte an demselben auch sehr gross sein müssen im Vergleich mit den übrigen Theilen des Körpers; wo also an einem solchen sich Kanten, Ecken oder gar Spitzen befinden, dort wird auch der grösste Theil der Ladung angehäuft sein. Riess[1]) hat unter anderem die Vertheilung der Elektricität auf einem Körper untersucht, der aus zwei Kreiskegeln mit aneinander stossenden Basen gebildet war, deren Oeffnungswinkel 90°, respective 20½° betrugen. Fig. 20 gibt ein Bild der gefundenen Vertheilung. Auch hier ist zu berücksichtigen, dass die Differenz zwischen den Dichten der Spitzen und Seitenflächen durch das Anlegen der Probekugel beträchtlich vermindert wird, in Wirklichkeit also noch grösser wäre, als es aus den Zahlen der Figur hervorgeht.



Fig. 20.

Das, was man gewöhnlich die Spitzenwirkung nennt, ist nur eine Folge der eben betrachteten Umstände; je schärfer die Spitze ist, desto grösser wird an derselben die Dichte und damit auch, wie

[1]) Reib. El. I. p. 249.

wir später sehen werden, die Kraft welche die Elektricität vom Leiter wegzutreiben bestrebt ist. Wenn dieselbe also überhaupt so gross werden kann dass es zu einem gewaltsamen Entweichen der Ladung unter Durchbrechung des umgebenden Isolators kommt, so wird dies jedenfalls zuerst an den Spitzen geschehen müssen. Je mehr solche ein Körper besitzt und je schärfer dieselben sind, desto schwerer wird eine Ladung sich auf demselben zurückhalten lassen.

Man sucht daher bei Apparaten welche zu elektrostatischen Versuchen dienen sollen, nach Möglichkeit alle scharfen Kanten oder Spitzen zu vermeiden. An einer mathematischen Spitze — als dem Ende eines unendlich langen Ellipsoïdes — würde die Dichte unendlich gross sein und es wäre nicht möglich dass die Ladung auf einem Körper, der mit einer solchen Spitze versehen ist, bliebe.

Aus den Betrachtungen über die Vertheilung der Elektricität die wir bisher angestellt haben, lässt sich noch ein sehr wichtiger Schluss ziehen; das Coulomb'sche Kraftgesetz, demzufolge die Wirkung zwischen zwei elektrischen Massen umgekehrt proportional ist dem Quadrate ihrer Entfernung, ist zwar durch die Experimentaluntersuchungen Coulomb's selbst und später noch öfters bestätigt worden, allein jedem Experimente haftet eine gewisse Fehlergrenze an und innerhalb derselben lässt das Gesetz sich nicht controliren. Nun gehören gerade die betreffenden Versuche Coulomb's zu den schwierigsten, aus Gründen die schon auseinandergesetzt warden, es ist daher von grosser Wichtigkeit dass man aus der Art der Elektricitätsvertheilung auf Leitern die Richtigkeit dieses Gesetzes erschliessen kann. Wie wir gesehen haben, vertheilt die Elektricität sich auf einem Leiter immer so, dass die Summe aller Kräfte auf irgend einen Punkt im Innern gleich Null ist; denken wir uns eine geladene Kugel (Fig. 21), deren Flächendichte gleich μ sei und durch irgend einen Punkt P im Innern derselben einen Doppelkegel gelegt mit der Spitze in P und mit einem Oeffnungswinkel ω, den wir als sehr klein voraussetzen. Dieser Kegel wird aus der Kugelfläche zwei gegenüberliegende Stücke M und N herausschneiden, deren Wirkung auf eine im Punkte P etwa befindliche Probeladung von der Menge $= 1$ wir untersuchen wollen. Die elektrische Masse in M ist gleich $r_1^2 \omega \cdot \mu$ und in N gleich $r_2^2 \omega \cdot \mu$, wenn mit r_1 und r_2 die Entfernungen des Punktes P von M und N bezeichnet werden.

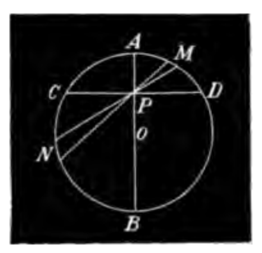


Fig. 21.

Die Kraft, mit welcher die Einheit der Elektricität auf eine ihr gleiche Menge in der Entfernung r wirkt, wollen wir mit $f(r)$ bezeichnen und vorerst voraussetzen, dass $f(r) = r^{-n}$ sei, dass die Kraft also nach irgend einer Potenz der Entfernung variire und zwar abnehme mit wachsender Entfernung, wie die Erfahrung lehrt, so wird daher n positiv sein. Nehmen wir n als kleiner als 2, so wird die Kraft langsamer abnehmen als die wirksame Fläche und damit auch die wirksame Masse wächst, und die Wirkung von N auf P wird grösser sein müssen als die von M. Lassen wir den Oeffnungswinkel des Kegels von 0 bis 2π wachsen, so geht daraus hervor, dass die Wirkung des Stückes CBD grösser ist als die der Calotte CAD.

Die Resultirende ist jedenfalls gegen das Centrum der Kugel gerichtet, und die Probemasse müsste sich vom Punkte P gegen O bewegen, kann nicht in Ruhe sein. Nehmen wir dagegen $n > 2$ an, so nimmt die Kraft mit der Entfernung schneller ab, als die wirksame Fläche und Masse wächst, und es müsste die Wirkung von M die von N überwiegen. Dies würde für einen Kegel vom Winkel 2π ausgedehnt gelten, da die Distanzen aller M kleiner sind als die der N, und daraus folgt, dass jetzt die Wirkung der Calotte CAD über die des Kugelstückes CBD überwiegen und die Probemasse sich von P nach A bewegen müsste. Es ist also wieder kein Gleichgewichtszustand erreicht, und es ist klar, dass, wenn der Punkt P in Ruhe bleiben soll, dies nur möglich sein wird, wenn $f(r) = r^{-2}$ ist.

Man kann aber auch ganz allgemein, ohne die beschränkende Annahme, dass die Kraft mit einer Potenz der Entfernung variire, den Beweis liefern, dass $f(r) = r^{-2}$ sein muss: denn wir können den Punkt P beliebig nahe an das Centrum der Kugel heranrücken und wählen ihn so, dass zwischen den Entfernungen PB und PA der Werth von $r^2 f(r)$ stets wächst beim Uebergang von einer Grenze zur anderen; es wird dies also auch für alle PM und PN gelten. Wiederholen wir nun die frühere Betrachtung, so ergibt sich, dass die Probemasse im Punkte P nur dann im Gleichgewichte sein kann, wenn

$f(r) = \frac{1}{r^2}$ ist, oder wenn $\overline{PN}^2 f(PN) = \overline{PM}^2 f(PM) = \text{Const.}$

Da wir den Radius der Kugel beliebig wählen können, und ebenso die Lage des Punktes P, so ergibt sich daraus ganz allgemein, dass ein jeder Punkt innerhalb einer homogen geladenen Kugelschale nur dann in Ruhe bleiben kann, wenn $r^2 f(r) = \text{Const.}$ oder

$$f(r) = \frac{\text{Const.}}{r^2} \text{ ist.}$$

Der Versuch, das Kraftgesetz aus der Vertheilung der Elektricität abzuleiten, wurde schon von Coulomb [1]) gemacht, doch mit der Beschränkung dass $f(r) = r^n$ gesetzt wurde, und noch früher von Cavendish (1773) unter derselben Voraussetzung. Letzterer berechnete, dass, wenn der Exponent n nur um 0·02 grösser oder kleiner als — 2 wäre, er das in seinen Experimenten hätte bemerken müssen. Er beobachtete nämlich die Wirkung die eine geladene Hohlkugel auf eine Vollkugel in ihrem Innern ausübte, und konnte so das Resultat der Messung mit der unter obiger Voraussetzung gemachten Rechnung vergleichen. Dieselben Versuche wurden in neuerer Zeit mit allen Hilfsmitteln die uns gegenwärtig zu Gebote stehen, wiederholt und zwar im Cavendish-Laboratorium; das Resultat der Messung war, dass im Ausdrucke $f(r) = r^{-2+p}$ die Zahl p keinesfalls grösser sein kann als $\pm$ 0·000046, was schon eine viel enger gezogene Grenze ist als bei den Versuchen Cavendish's und Coulomb's.

Unabhängig von der beschränkenden Voraussetzung dass $f(r)$ eine Potenz von r sei, hat den Beweis zuerst Laplace [2]) unter Zuhilfenahme ziemlich umfangreicher Rechnungen und später Bertrand [3]) in einer der obigen einfachen Darstellung ganz analogen Weise gegeben.

VI. Capitel.

Das Potential.

§ 13. Mathematischer Ausdruck für das Potential.

Wir haben bisher aus einer Reihe experimenteller Thatsachen einige Gesetze über das Verhalten elektrisirter Körper abgeleitet; beim weiteren Studium dieser Gesetze wird uns die Einführung eines neuen Begriffes, des Potentials, von ganz besonderem Vortheil sein, ja man kann sagen, dass man ohne Anwendung desselben überhaupt nicht zu einer klaren Vorstellung der Wirkungsweise elektrischer Massen kommt.

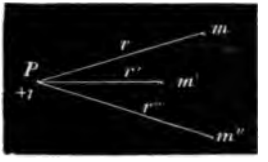


Fig. 22.

Wir wollen zunächst die Kraft betrachten die von beliebig im Raum vertheilten elektrischen Massen $m, m' \ldots$ (Fig. 22) auf eine Probeladung von der Menge + 1, also gleich der Einheit der positiven Elektricität ausgeübt

[1]) Mém. de l'Akad. Paris (1785).
[2]) Méc. cel.
[3]) J. de phys. (1873).

wird, wenn sich diese an irgend einem Punkte P im Raume befindet. Damit diese Kraft bestimmt sei muss uns die Lage des Punktes P und der Massen m, m' . . . gegeben sein.

Wir wollen diese auf ein beliebig gelegtes rechtwinkliges Coordinatensystem beziehen und bezeichnen die Coordinaten des Punktes P mit x, y, z, die von m mit ξ, η, ϑ, die von m' mit ξ', η', ϑ' u. s. f. Die Massen m . . . . wollen wir gleichfalls positiv wählen, d. h. voraussetzen, dass sie alle durch positive Elektricität gebildet werden. Die Kraft welche von m auf die Ladung $+ 1$ in P oder kurz gesagt auf P ausgeübt wird — wir bezeichnen sie mit K — wird sein:

$$K = - \frac{m}{r^2}.$$

Zerlegen wir diese in ihre drei Componenten parallel der x, y und z-Axe, so erhalten wir:

$$K_x = - \frac{m}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \right)$$

$$K_y = - \frac{m}{r^2} \left(\frac{\eta - y}{r} \right)$$

$$K_z = - \frac{m}{r^2} \left(\frac{\vartheta - z}{r} \right),$$

denn $\left(\frac{\xi - x}{r} \right)$, $\left(\frac{\eta - y}{r} \right)$ und $\left(\frac{\vartheta - z}{r} \right)$ sind die Richtungscosinusse von r bezüglich der drei Coordinatenaxen.

Führen wir die gleiche Zerlegung auch in Bezug auf die Kräfte aus welche P von den übrigen Massen m', m'' . . . erleidet, und summiren alle Componenten die in ein und dieselbe Richtung fallen, so erhalten wir die drei Componenten X, Y und Z der auf P ausgeübten Gesammtkraft parallel den drei Axen. Wir haben also:

$$X = - \Sigma \frac{m}{r^2} \left(\frac{\xi - x}{r} \right)$$

$$Y = - \Sigma \frac{m}{r^2} \left(\frac{\eta - y}{r} \right)$$

$$Z = - \Sigma \frac{m}{r^2} \left(\frac{\vartheta - z}{r} \right).$$

Es ist aber allgemein $r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\vartheta - z)^2$, und differentiiren wir diesen Ausdruck nach x, y und z, so erhalten wir:

$$\frac{\delta r}{\delta x} = - \frac{\xi - x}{r}; \quad \frac{\delta r}{\delta y} = - \frac{\eta - y}{r}; \quad \frac{\delta r}{\delta z} = - \frac{\vartheta - z}{r}.$$

Die Ausdrücke für die Kraftcomponenten übergehen somit in:

$$X = \Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta x}$$

$$Y = \Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta y}$$

$$Z = \Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta z}.$$

Betrachten wir nun die Function $V = \Sigma \frac{m}{r}$, die wir eben das Potential nennen das die Massen m, m' ... im Punkte P erzeugen; es ist klar dass die Differentiation dieser Function nach x, y und z uns Werthe liefert, die ihrer absoluten Grösse nach mit den für die Componenten X, Y und Z gefundenen übereinstimmen; denn es ist

$$\frac{\delta V}{\delta x} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta x}; \quad \frac{\delta V}{\delta y} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta y}; \quad \frac{\delta V}{\delta z} = -\Sigma \frac{m}{r^2} \frac{\delta r}{\delta z}.$$

Die Kraftcomponenten X, Y, Z erhalten demnach die folgenden Werthe:

$$X = -\frac{\delta V}{\delta x}$$

$$Y = -\frac{\delta V}{\delta y}$$

$$Z = -\frac{\delta V}{\delta z},$$

d. h. das Potential oder die Function $\Sigma \frac{m}{r}$ für irgend einen Punkt im Raum hat die bemerkenswerthe Eigenschaft, dass ihr Differentialquotient nach irgend einer Richtung numerisch gleich ist der Kraft welche auf eine positive Elektricitätsmenge gleich Eins in diesem Punkte nach dieser Richtung ausgeübt wird. Das Vorzeichen drückt uns aus dass eine positive Probeladung, wenn sie frei beweglich ist, sich unter dem Einflusse äusserer elektrischer Massen stets von Orten höheren Potentials zu Orten niedrigeren Potentials bewegen wird.

Es ist klar dass diese Betrachtungsweise sich nicht nur auf elektrische Vorgänge anwenden lässt, sondern auf alle die durch Kräfte hervorgebracht werden, die proportional den Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernung wirken, wie z. B. die Gravitation; es wurde diese wichtige Eigenschaft des Potentials

nach von Laplace[1]) zuerst beim Studium der Gravitation verwerthet und erst später von Poisson[2]) auf elektrische Kräfte übertragen. Unabhängig von diesen ist auch Green[3]) auf die Anwendung dieser wichtigen Function gekommen und ebenso Gauss[4]), der sie allgemein in die Wissenschaft eingeführt hat.

Man kann sagen dass erst seither die Elektricitätslehre eine gesicherte und wissenschaftliche Basis gewonnen hat, und dass die raschen Fortschritte derselben in neuerer und neuester Zeit zum grossen Theil der allgemeinen Einführung und Verwerthung dieses Begriffes zuzuschreiben sind.

§ 14. Physikalische Bedeutung des Potentials.

Wir wollen nun erörtern, welche physikalische Bedeutung dem Begriffe des Potentials zukommt. Gemäss der Defination $V = \Sigma \frac{m}{r}$ werden wir erwarten müssen dass an jedem Punkt im Raume das Potential einen bestimmten Werth hat, wenn die Vertheilung der elektrischen Massen eine bestimmte ist; da dieser Werth von der Anordnung aller elektrischen Massen im Raume abhängt, so kann es vorkommen, dass das Potential an Orten wo sich gar keine Elektricität befindet, höher ist als an solchen, wo elektrische Ladungen vorhanden sind. Wir müssen uns daher gewöhnen den Begriff des Potentials an einer bestimmten Stelle ganz von der Vorstellung elektrischer Ladungen die sich an derselben etwa befinden mögen, zu trennen, da das Vorhandensein eines Potentials an einem Orte gar nichts mit dem Vorhandensein oder Nichtvorhandensein einer Ladung an demselben zu thun hat.



Fig. 23.

Wir betrachten nun einen irgendwo im Raume gelegenen Punkt A (Fig. 23), in dem wir uns eine gewisse Menge $+ m$ Elektricität concentrirt denken und untersuchen, welche Wirkung dieselbe auf eine frei bewegliche Probeladung an irgend einem Punkte seiner Umgebung hervorbringt.

[1]) Méc. cél.

[2]) Mém. de l'Inst. (1811).

[3]) An essay of the application of math. analysis to the theory of El. and Magn. (1828).

[4]) Theoria attractionis etc. Crelle's J. (1811).

Das Potential in einem Punkte der sich in der Entfernung ρ von A befindet, ist gleich $\frac{m}{\rho} = V_\rho$, und die Kraft, welche auf die Elektricitätsmenge $+ 1$ in diesem Punkte nach irgend einer Richtung x ausgeübt wird, ist $= - \frac{\delta V}{\delta x}$; besteht die Probeladung aus $+ q$ Elektricitätseinheiten so erleidet sie eine Kraft $- q \frac{\delta V}{\delta x}$. Durch die Anwesenheit dieser Ladung q an irgend einem Orte wird natürlich der Werth der Potentialfunction im ganzen Raume ein etwas anderer als wenn nur die Ladung m in A allein zur Erzeugung dieses Potentials beitrüge; um die Verhältnisse vorläufig noch einfach und übersichtlich zu erhalten wollen wir daher annehmen, dass die Ladung q so klein sei gegen m, dass durch ihr Vorhandensein der Werth von V im ganzen Raume nicht wesentlich beeinflusst wird.

Es ist klar dass die Richtung der Kraft, welche von m auf q ausgeübt wird, an jedem Punkte des ganzen Raumes mit der Verbindungslinie von m und q zusammenfällt; wo immer wir die Ladung q hinbringen, wird sie sich, wenn sie frei beweglich ist, geradlinig von A wegbewegen und zwar bis in unendliche Entfernung. Den geometrischen Ort all der Lagen, welche eine solche frei bewegliche Ladung unter dem Einflusse des Punktes A successive einnimmt, nennen wir eine Kraftlinie, wobei jedoch diese Ladung natürlich ohne Trägheit vorausgesetzt ist. Eine solche Kraftlinie hat also die Eigenschaft dass sie von einer frei beweglichen Probeladung, die an irgend einen Punkt derselben gebracht wird, nicht mehr verlassen wird; die Richtung der Kraftlinie drückt in jedem Punkte ihres Verlaufes zugleich die Richtung der Kraft aus, welche an dieser Stelle des Raumes auf elektrische Massen thätig ist. In unserem einfachen Beispiele, wo im Raume nur eine einzige elektrische Masse m vorhanden ist, werden alle Kraftlinien gerade Linien sein die vom Punkte A in radialer Richtung bis in's Unendliche verlaufen, und da in jedem Punkt im Raume die Kraft eine bestimmte Richtung hat, so wird auch durch jeden Punkt eine Kraftlinie hindurchgehen. Das ist aber durchaus nicht immer nothwendig, wir werden Fälle kennen lernen, wo die Kraftlinien krumme Linien sind — bei Anwesenheit mehrerer wirksamer Massen — und wo nicht durch jeden Punkt im Raume eine Kraftlinie hindurchgeht.

Da der Werth des Potentials an irgend einer Stelle nur von m und ρ abhängt, so werden alle Punkte einer Kugelfläche, die um

A als Centrum gelegt ist, auch dasselbe Potential haben. Eine solche Fläche, längs welcher $V = \text{Const.}$ ist, nennen wir eine Niveaufläche oder Aequipotentialfläche; sie sind in unserem Beispiele sämmtlich concentrische Kugelflächen und werden von den Kraftlinien senkrecht durchschnitten. Das Kriterium einer Nieveaufläche ist also dass $V = \text{Const.}$ oder $\frac{\delta V}{\delta s} = o$ sei, wenn wir mit s irgend eine Richtung, die in die Fläche selbst fällt, bezeichnen. Daraus folgt aber allgemein dass bei ganz beliebiger Anordnung der wirksamen Massen im Raume die Niveauflächen von den Kraftlinien immer senkrecht durchsetzt werden müssen, denn wäre das nicht der Fall, so würde eine Componente der Kraft auch in die Fläche selbst fallen, was eben der gegebenen Bedingung $\frac{\delta V}{\delta s} = o$ widerspricht, da $\frac{\delta V}{\delta s}$ nichts anderes bedeutet, als den absoluten Werth der Kraft in der Richtung s. Ist uns also an irgend einem Punkte die Richtung der Kraftlinie gegeben, so kennen wir auch die der Niveaufläche welcher der betreffende Punkt angehört und umgekehrt. Hat man es nur mit einer einzigen wirksamen Masse zu thun so ist die Kraft in jedem Punkte eine nach Grösse und Richtung bestimmte, es kann daher auch durch jeden Punkt nur eine einzige Kraftlinie gehen und daher auch nur eine einzige Niveaufläche; daraus folgt, dass für diesen Fall sich weder Kraftlinien noch Niveauflächen untereinander schneiden können. Diese Bedingung fällt aber, wie wir sehen werden, weg, sobald mehrere wirksame Massen im Raume vertheilt sind.

Wir wollen nun die Umgebung des Punktes A oder, wie wir uns gewöhnlich auszudrücken pflegen, das elektrische Feld um den Punkt A näher betrachten. Dasselbe wird jedenfalls symmetrisch sein müssen bezüglich jeder Ebene die durch den Punkt A gelegt werden kann, d. h. in gleichen Abständen rechts und links von jeder durch A gelegten Ebene werden wir dasselbe Potential und dieselbe Kraft antreffen. Ferner werden alle Punkte $a, b, c \ldots$, die auf einer Kugelfläche liegen deren Centrum A ist, das gleiche Potential V haben; bewegen wir daher eine Probeladung längs dieser Kugelfläche, so wird auf dieselbe in jedem Punkte die Kraft $\frac{\delta V}{\delta s} = o$ wirken, wir werden also in dieser Bewegung durch die elektrische Masse m in A weder gehindert noch unterstützt werden, so dass wir ohne irgend eine Arbeitsleistung die Probeladung in beliebigen Kreisen um den Punkt A herumführen können. Sowie wir dieselbe aber von der

Nieveaufläche V auf eine andere V_1 bringen wollen, wodurch die Distanz vom Punkte A sich ändert, werden wir auf eine Kraft stossen, die, je nachdem V_1 innerhalb oder ausserhalb V liegt, unsere Bewegung hindert oder unterstützt; denn jetzt bewegen wir unsere Probeladung nicht mehr längs eines Weges wo $V = \text{Const.}$ ist, sondern wo V von Punkt zu Punkt variirt, und bezeichnen wir die Richtung unserer Bewegung mit n, so wird $-\frac{\delta V}{\delta n}$, d. i. die Kraft auf die Elektricitätseinheit in der Richtung n, einen endlichen Werth haben und unsere Bewegung hindern oder unterstützen, je nachdem wir uns A nähern oder uns von demselben entfernen.

Sobald wir also unsere Probeladung so bewegen, dass ihre Distanz von A sich ändert, wirkt auf dieselbe in der Bewegungsrichtung eine Kraft und das involvirt eine Arbeitsleistung während der Bewegung die von den elektrischen Kräften geleistet wird, wenn die Probeladung in ihrer Wirkungsrichtung sich bewegt oder von äusseren mechanischen Kräften geleistet werden muss, wenn die Bewegung der elektrischen Kraft entgegen vor sich gehen soll.

Wir wollen die Grösse dieser Arbeitsleistung bestimmen, wenn die Probeladung sich von einer Nieveaufläche mit dem Potential V_1 auf eine andere mit dem Potential V_2 begibt, also etwa von B_1 nach B_2. Im Punkte B_1 wirkt auf die Einheit positiver Elektricität in der Richtung n die Kraft $-\frac{\delta V}{\delta n}$; der Niveaufläche V_1 unendlich nahe liegt eine andere mit dem Potential $V_1 + d\,V_1$ in der Distanz $d\,n$ von V_1. Die unendlich kleine Arbeit $d\,L$, welche die Einheit der Elektricität leistet, wenn sie sich von B_1 längs der Kraftlinie nach $(V_1 + d\,V_1)$ begibt, ist daher

$$d\,L = -\frac{\delta V}{\delta n}\,d\,n$$

und die ganze Arbeit, die dem Uebergang von B_1 nach B_2 entspricht, wird:

$$L = -\int_{V_1}^{V_2} \frac{\delta V}{\delta n}\,d\,n = -(V_2 - V_1) = V_1 - V_2.$$

Bewegt sich von B_1 nach B_2 nicht die Einheit der Elektricität, sondern die Menge Q, so wird die treibende Kraft auch das Q-fache und damit
$$L = Q\,(V_1 - V_2).$$

Man sieht, dass der Werth der geleisteten Arbeit ausser von der Menge bewegter Elektricität, nur abhängt von den Potentialen

der beiden Niveauflächen die den Weg begrenzen, aber gar nicht von der Lage der Punkte B_1 und B_2 auf diesen Flächen. Hätten wir also Q von B_1 nach B_2 gebracht statt nach B_2, so wäre dabei genau dieselbe Arbeit geleistet worden. Denn wären V_1 und $V_1 + d\,V_1$ (Fig. 24) die beiden unendlich nahen Niveauflächen und hätten wir Q statt in der Richtung n in der Richtung s bewegt, so wäre der zwischen beiden Niveauflächen zurückgelegte Weg $= d\,s$ und die dabei geleistete Arbeit $d\,L = - \frac{\delta\,V}{\delta\,n} \cdot d\,s \cdot \frac{d\,n}{d\,s}$, da wir die Arbeit erhalten wenn wir die Kraft mit der Projection des zurückgelegten Weges auf die Kraftrichtung multipliciren und $\frac{d\,n}{d\,s}$ nichts anderes als der Cosinus des Winkels zwischen beiden Richtungen ist. Wir erhalten also wie früher $d\,L = - \frac{\delta\,V}{\delta\,n}\,d\,n$ und damit auch den gleichen Werth für L.

Bewegen wir demnach eine Elektricitätsmenge ganz beliebig in einem elektrischen Feld, so ist die dabei geleistete Arbeit proportional der Differenz der Potentiale des Ausgangs- und Endpunktes der Bewegung; bewegen wir die Ladung so, dass sie wieder zum Ausgangspunkte zurückkehrt, so ist die Summe aller geleisteten Arbeit gleich Null. Fragen wir in welcher Form diese Arbeit geleistet wird, so gibt uns die Formel für L zunächst den Aufschluss, dass die Arbeit immer positiv ist, d. h. von den vorhandenen elektrischen Kräften geleistet und somit gewonnen wird, wenn $V_1 > V_2$ ist, im anderen Falle dagegen ist die Arbeit negativ, d. h. sie muss durch äussere Kräfte den vorhandenen elektrischen Kräften entgegen geleistet werden. Es wird also eine positive Ladung, wenn sie frei beweglich ist, sich immer von einem höheren auf ein niedrigeres Potentialniveau begeben unter entsprechender Arbeitsleistung, dagegen wird sie von einem niedrigeren auf ein höheres nur durch äussere Kräfte gebracht werden können.

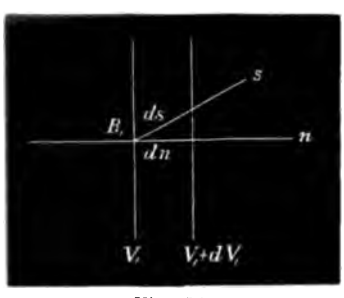


Fig. 24.

Haben wir also eine Ladung $+ q$ an irgend einem Punkte P_1 mit dem Potentiale V_1 und verbinden wir diesen z. B. durch einen Draht mit dem Punkte P_2 vom Potential V_2 und ist $V_1 > V_2$, so fliesst die Ladung q von P_1 nach P_2; die Arbeit $q\,(V_1 - V_2)$, welche sie dabei leistet, erscheint als Erwärmung des Verbindungsdrahtes und

es folgt aus der früher erörterten Constanz dieser Arbeit, dass die solchermassen erzeugte Wärmemenge W ganz unabhängig von der Form und den übrigen Eigenschaften des Drahtes ist. Wollen wir auf mechanische Weise die Ladung q wieder nach P_1 zurückbringen, so müssen wir dabei eine Arbeit L leisten die W äquivalent ist, also von der Grösse $L = A \cdot W$, wo A das Arbeitsäquivalent der Wärmeeinheit bedeutet.

Setzen wir in der früheren Gleichung

$$L = Q\,(V_1 - V_2)$$

$Q = 1$, so erhalten wir $L = V_1 - V_2$. Daraus ersehen wir, dass die Potentialdifferenz zwischen zwei Orten nichts anderes ist als die Arbeit, welche die Elektricitätsmenge $+1$ leistet, wenn sie sich von dem einen zum anderen bewegt. Setzen wir auch noch $V_2 = o$, d. h. verlegen wir den zweiten Ort in unendliche Entfernung von allen wirksamen Massen, so wird

$$L = V_1.$$

Das ergibt uns den Satz: das Potential eines Ortes ist gemessen durch die Arbeit welche die Elektricitätsmenge $+1$ leistet bei ihrer Bewegung von diesem Ort in unendliche Entfernung, oder auch durch die Arbeit welche wir leisten müssen, um die Elektricitätsmenge $+1$ aus unendlicher Entfernung an diesen Ort heranzubringen. Es ergibt sich so deutlich die physikalische Bedeutung des Begriffes Potential.

Aus dem Vorstehenden folgt, dass eine Elektricitätsmenge Q, wenn sie sich an einem Orte mit dem Potential V_1 befindet, einen Vorrath von Arbeit repräsentirt $= Q \cdot V_1$. Sie besitzt also eine Energie der Lage — denn dieser Arbeitsvorrath kommt ihr nur in Folge ihrer Anwesenheit auf der Niveaufläche V_1 zu — oder eine potentielle Energie; dieselbe übergeht zum Theil in kinetische, wenn sich Q von V_1 nach V_2 bewegt (wenn $V_1 > V_2$), es verbleibt dann noch an potentieller Energie der Rest $Q\,V_2$, während $Q\,(V_1 - V_2)$ sich in kinetische verwandelt hat. Der ganze Vorrath an Arbeit wird in kinetische Energie umgesetzt, wenn Q sich bis in unendliche Entfernung bewegt. Umgekehrt können wir durch mechanische Zurückführung von Q nach V_1 die ganze dabei geleistete Arbeit wieder in Form von potentieller Energie in Q aufsammeln.

Ein und dieselbe Elektricitätsmenge repräsentirt also unter verschiedenen Umständen sehr verschiedene Arbeitswerthe, indem diese nicht nur durch die Elektricitätsmenge, sondern auch durch deren Potential bestimmt werden.

Wir haben gesehen dass in einem elektrischen Felde die Kräfte immer so wirken, dass sie freie positive Elektricität von Orten höheren Potentials zu solchen mit niedrigerem zu treiben bestrebt sind. Ist also $V_1 > V_2$ und befindet sich in V_1 die Elektricitätsmenge $+q$ frei beweglich, so wird dieselbe nach V_2 getrieben werden. Wo also Potentialdifferenz ist, da wirkt auch eine treibende Kraft auf die Elektricität oder das, was wir eine elektromotorische Kraft nennen. Man darf aber diese beiden, elektromotorische Kraft und Potentialdifferenz, keineswegs einander äquivalent setzen, denn unter ersterer verstehen wir eine Kraft, letztere aber ist eine Arbeit; wir können nur sagen, überall wo Potentialdifferenz herrscht wirkt auch eine elektromotorische Kraft. Dieser Satz lässt sich nicht umkehren; nicht eine jede elektromotorische Kraft ist an die Existenz einer Potentialdifferenz auf dem Wege, auf dem sie wirkt, gebunden; wir werden Fälle kennen lernen, wo in einem Leiter der überall dasselbe Potential hat, Elektricität in Bewegung gesetzt wird und dadurch erst eine, der elektromotorischen Kraft noch dazu entgegenwirkende Potentialdifferenz geschaffen wird. Das ist z. B. der Fall bei der Induction elektrischer Ströme durch andere intermittirende Ströme.

§ 15. Graphische Darstellung des elektrischen Feldes.

Es ist zur Erlangung einer richtigen Vorstellung der Kraftwirkungen in einem elektrischen Felde von Vortheil, sich den Verlauf der Potentialfunction und der Kraft im Raum geometrisch durch Linien zu versinnlichen. Wir betrachten den Punkt A (Fig. 25) als den einzigen im Raum, in dem sich eine elektrische Ladung und zwar der Einfachheit wegen von der Grösse $+1$ befinden soll; wir wählen zwei auf einander senkrechte Kraftlinien X und Y zu Coordinaten, und construiren uns nach den bekannten Formeln die Curven VV und KK, welche uns den Verlauf von Potential und Kraft in der Richtung X angeben.

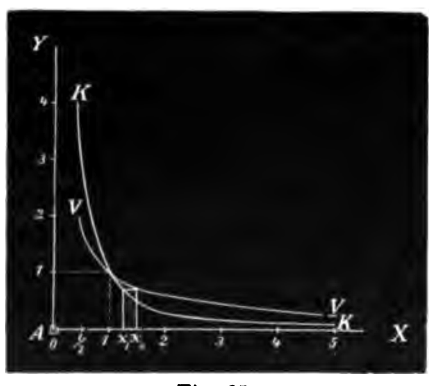


Fig. 25.

Wir rechnen dabei mit jener Kraft welche auf eine Probeladung gleich Eins ausgeübt wird, und haben somit $K = -\frac{1}{r^2}$ und $V = \frac{1}{r}$ zu setzen. Da K negativ ist, so hätte die Curve KK eigentlich auf die andere Seite der Abscissenaxe verlegt werden sollen, des besseren Vergleichs halber mit der Curve VV wollen wir aber im Folgenden stets jene Kraft als positiv zählen, die in der Richtung der positiven x wirkt.

Betrachten wir zunächst die Curve KK. Ihre Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{x^2}.$$

Tragen wir in einem beliebig gewählten Maassstabe alle r — die Distanzen von der wirksamen Masse in A — auf der Abscissenaxe auf und construiren die zugehörigen y, so ist der geometrische Ort aller Endpunkte der letzteren die Curve KK. Sie beginnt mit dem Werthe $y = \infty$ für $r = 0$, d. h. die Kraft ist im Punkte A unendlich gross; das ist nun ein Fall der in Wirklichkeit nicht eintreten kann, weil wir niemals eine endliche Elektricitätsmenge in einem Punkte concentriren können.

Aber wir können uns dieselbe auf einer beliebig kleinen Kugel um den Punkt A herum angehäuft denken, es wird dann K in der Nähe von A zwar gegen einen sehr hohen, aber doch endlichen Werth convergiren. Wir können die Kugel A sehr wohl so klein machen, dass das in Fig. 25 gezeichnete Stück der Curve KK der Wirklichkeit entspricht. Wird x immer grösser, so nähert sich y asymptotisch dem Werthe Null, den es in unendlicher Entfernung erreicht.

Wählen wir nun zwei Punkte x_1 und x_2 in den Entfernungen x_1 und x_2 von A und lassen wir die Elektricitätsmenge 1 sich von dem einen zum anderen bewegen, welche Arbeit wird dabei geleistet? Es lässt sich zeigen, dass diese Arbeit dargestellt wird durch die Fläche die in Fig. 25 schraffirt gezeichnet ist, und welche durch die zu x_1 und x_2 gehörenden Ordinaten, durch die Abscissenaxe und durch das zwischen x_1 und x_2 gelegene Stück der Curve KK begrenzt wird.

Denn diese Fläche F ist:

$$F = \int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{x^2} = -\left(\frac{1}{x_2} - \frac{1}{x_1}\right) = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}.$$

Nun ist aber $\frac{1}{x_1}$ das Potential im Punkte x_1 und $\frac{1}{x_2}$ das im Punkte x_2; die Differenz dieser Potentiale bedeutet aber, wie wir

gesehen haben, nichts anderes als die Arbeit, die unsere Probeladung beim Uebergang von x_1 nach x_2 leistet. Diese ist also durch die Fläche F wirklich dargestellt. Bewegt sich die Probeladung von x_1 bis in's Unendliche, so leistet sie eine Arbeit proportional der Fläche die von der Ordinate x_1, der Abscissenaxe und dem Stücke der Curve KK begrenzt wird, das sich von x_1 bis in's Unendliche erstreckt. Für diesen Fall wird $x_2 = \infty$ und $F = \frac{1}{x_1}$; lassen wir die Bewegung im Punkte $x = 1$ beginnen, bringen wir die Probeladung $+ 1$ also aus der Einheit der Entfernung von A bis in's Unendliche, so ist die geleistete Arbeit $= 1$. Die Fläche, welche sie darstellt, ist demnach gleich der Flächeneinheit oder dem Quadrate über der von uns gewählten Längeneinheit; sie ist in Fig. 25 durch das Quadrat mit punktirten Seiten versinnlicht. Aus dem Verlaufe der Curve KK in der Nähe von A ersieht man, wie rasch die Arbeit wächst die bei grösserer Annäherung an die wirksame Masse geleistet werden muss.

Wir wollen nun die Potentialcurve VV betrachten; ihre Gleichung ist:

$$y = \frac{1}{x}.$$

Auch hier wird für $x = 0$, $y = \infty$, d. h. die Curve nähert sich asymptotisch der Ordinatenaxe, was wieder nur für den ideellen Fall gilt dass die wirksame Masse in einem Punkte concentrirt ist; in Wirklichkeit wird sich y bei abnehmendem x einem vielleicht sehr hohen, aber jedenfalls endlichen Werthe nähern. Die Ordinate irgend eines Punktes x ist ein directes Maass der Arbeit welche die Probeladung leistet, wenn sie sich aus der Entfernung x bis in's Unendliche begibt, denn die Ordinate ist ja nichts anderes als das Potential am Punkte x. Bewegt sich die Probeladung also von x_1 nach x_2, so ist die damit verbundene Arbeitsleistung direct durch die Differenz der Ordinaten von x_1 und x_2 gemessen. Die Curve VV liefert uns aber auch ein Maass der an jedem Punkte herrschenden Kraft K, denn es ist:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2} = K.$$

Die Kraft an irgend einem Punkte x ist also gemessen durch die Neigung der Curve VV gegen die Abscissenaxe an dem betreffenden Punkte. Für $x = 1$ wird sowohl das Potential als die Kraft $= 1$, die Curven KK und VV schneiden sich daher in diesem Punkte,

und da hier $\frac{dy}{dx} = 1$ sein muss, so beträgt hier die Neigung von VV gegen die Abscissenaxe 45°. Für alle Distanzen kleiner als 1 ist sie grösser, für alle $x > 1$ ist sie kleiner als 45°. Wird x sehr gross, so verlaufen KK und VV nahezu parallel der Abscissenaxe, es wird also dann sowohl die Kraft als die per Längeneinheit zu leistende Arbeit von der Entfernung nahezu unabhängig.

In Fig. 26 sind zur besseren Versinnlichung des elektrischen Feldes eines einzelnen Punktes eine Reihe Niveauflächen gezeichnet, die so gewählt sind, dass die Potentialdifferenz zwischen je zwei benachbarten einen constanten Werth hat. Es ist dabei vorausgesetzt dass die wirksame Masse in $A = +1$ und der Abstand Aa gleich der Längeneinheit sei; das Potential in jedem der Punkte $a\,b\,c\,d\,e$ ist dann stets um 0·2 kleiner als in dem nächst vorangehenden. Es würde also eine gewisse Elektricitätsmenge bei ihrer Bewegung von a nach b genau so viel Arbeit leisten wie wenn sie sich von d nach e bewegte.

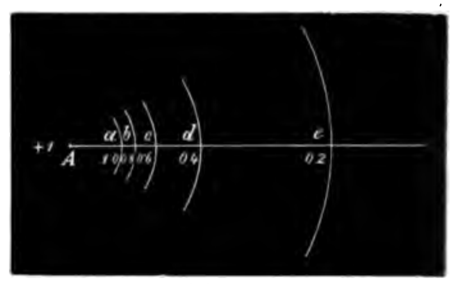


Fig. 26.

Je grösser die Entfernung eines Punktes im Raume von A wird, desto mehr nähert sich dort die Gestalt der Niveaufläche einer Ebene, und desto geringer wird die Aenderung des Potentials auf der Längeneinheit; in ausserordentlich grosser Distanz von A werden wir die Niveauflächen daher als parallele Ebenen auffassen können und die Kraftlinien als parallele Gerade welche erstere senkrecht durchsetzen. Die Aenderung des Potentials per Längeneinheit oder die Kraft wird dann als constant anzusehen sein längs Strecken die sehr klein gegen ihre Entfernung von A sind. Es ist kein Zufall dass hier der Parallelismus der Kraftlinien mit der Constanz der Kraft zusammenfällt, wir werden vielmehr sehen dass ganz allgemein die Kraftwirkung an einem Orte mit der Neigung der Kraftlinien gegen einander daselbst zusammenhängt. In der Richtung in welcher dieselben convergiren, werden wir immer eine Zunahme der Kraft, in der Richtung der Divergenz aber eine Abnahme derselben beobachten. Auf Strecken dagegen wo die Kraftlinien einander parallel verlaufen, ist auch die Kraft stets constant.

Ein solches elektrisches Feld, wo die Niveauflächen parallele Ebenen sind und die Kraft an jedem Punkte constant ist, nennen

wir ein homogenes. Es ist zur Herstellung eines solchen nicht nöthig dass wir die wirksame Masse wirklich in sehr grosse Entfernung verlegen — wodurch das Feld zwar homogen, die Kraft aber sehr klein würde — wir können das auch noch auf andere Weise erreichen, z. B. dadurch, dass wir einer positiv geladenen ebenen Platte in nicht zu grosser Distanz eine negativ geladene gegenüberstellen. Es sind dann die Niveauflächen in dem Zwischenraume Ebenen die den Platten parallel verlaufen, und die Kraft hat an allen Punkten dieses Raumes ein und denselben Werth. Das Potentialgefälle ist in einem solchen homogenen Feld ein lineares — der Werth $\frac{\delta V}{\delta n}$ in Richtung einer Kraftlinie ist constant für alle Punkte derselben — und würde also dargestellt durch eine gerade Linie deren Neigung gegen die Abscissenaxe die Grösse der Kraft in diesem Felde versinnlicht. Die Kraftcurve selbst wäre gleichfalls eine gerade Linie die parallel zur Abscissenaxe verläuft, und zwar in einem Abstande gleich der Tangente des Neigungswinkels der Potentialcurve.

Wenn wir von dem bisher betrachteten Falle des elektrischen Feldes wie es von einer einzigen wirksamen Masse erzeugt wird, zu dem complicirteren mit zwei oder mehr Massenpunkten übergehen, so treffen wir dabei auf nichts wesentlich Neues; da das Potential an jedem Punkte durch den Ausdruck $\Sigma \frac{m}{r}$ gegeben ist, so ist es auch für jeden Punkt leicht angebbar. Wollen wir uns ein Bild vom Verlaufe der Kraftlinien und Niveauflächen für einen bestimmten Fall verschaffen, so müssen wir den Ausdruck $\Sigma \frac{m}{r}$ für möglichst viele Punkte um die wirksamen Massen herum entwickeln und uns dann alle Punkte mit gleichem Potential durch Flächen verbunden denken; so erhalten wir die Niveauflächen. Ziehen wir dann noch von jedem Massenpunkte aus Linien, die in ihrem ganzen Verlaufe auf den durchschnittenen Niveauflächen senkrecht stehen, so haben wir auch die Kraftlinien. Die wirkliche Ausführung einer solchen Zeichnung ist natürlich um so einfacher je weniger Massenpunkte im Raume vertheilt angenommen werden, und je grösser die Anzahl der Symmetrieebenen ist denen ihre Anordnung entspricht.

Was diese Darstellung eines räumlichen elektrischen Feldes durch eine ebene Zeichnung anlangt, so wäre darüber im Allgemeinen Folgendes zu bemerken. Da die Niveauflächen in der Zeichnung als Linien erscheinen, nämlich als die Durchschnittslinien der Zeichen-

ebene mit den Niveauflächen, so werden die Abstände benachbarter Niveauflächen nur dann in der Zeichnung richtig zum Ausdrucke kommen wenn letztere von der Ebene der Zeichnung alle senkrecht durchschnitten werden; das wird immer dann der Fall sein wenn die dargestellte Schnittebene eine Symmetrieebene des elektrischen Feldes ist. Auf solche Symmetrieebenen wird sich also im Allgemeinen die Darstellung beschränken müssen. Bei dem elektrischen Felde das eine einzige Masse erzeugt, ist jede durch dieselbe gelegte Ebene auch eine Symmetrieebene, bei zwei Massenpunkten gilt das aber nur mehr von jenen Ebenen, die durch die Verbindungslinie derselben gehen.

Der Grund warum die Abstände der Niveaulinien in der Zeichnung den wirklichen Abständen der Niveauflächen entsprechen sollen ist der, dass die Zeichnung für jeden Punkt des elektrischen Feldes nicht nur die Richtung, sondern auch die Grösse der dort herrschenden Kraft angeben soll; die Richtung ist bestimmt durch die Richtung der den Ort passirenden Kraftlinie, d. h. durch die Normale an die betreffende Niveaufläche, soll aber auch die Intensität in der Zeichnung zum Ausdrucke kommen so muss aus derselben ein Maass des Werthes $\frac{\delta V}{\delta n}$ für die verschiedenen Punkte zu entnehmen sein. Das können wir dadurch erreichen, dass wir von den unendlich vielen vorhandenen Niveauflächen nur eine Gruppe herausgreifen und ihre Durchschnittslinien mit der Ebene der Zeichnung als Niveaulinien fixiren; diese Gruppe muss so gewählt sein, dass die Potentialdifferenz zweier benachbarter Niveauflächen eine constante Grösse für das ganze Feld ist, sowie wir dies z. B. in Fig. 26 schon gethan haben. Ist die Zeichnung nach diesem Principe angefertigt, dann können wir für zwei Punkte a und b des Feldes das Verhältniss der dort herrschenden Kräfte K_a und K_b ohne weiteres aus derselben entnehmen. Es ist $K_a = -\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_a$ und $K_b = -\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_b$; bezeichnen wir den Abstand zweier benachbarter Niveaulinien im Punkte a mit n_a und in b mit n_b, sowie die constante Potentialdifferenz zweier benachbarter Niveaulinien mit c, so ist:

$$\left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_a = \frac{c}{n_a} \text{ und } \left(\frac{\delta V}{\delta n}\right)_b = \frac{c}{n_b}, \text{ also ist } \frac{K_a}{K_b} = \frac{n_b}{n_a}.$$

Es ist also das Kraftverhältniss an zwei Punkten des elektrischen Feldes umgekehrt proportional den Abständen zweier benach-

barter Niveaulinien an diesen Punkten. Das gilt streng genommen allerdings nur wenn wir die Constante c sehr klein nehmen, d. h. die Niveaulinien sehr nahe aneinander zeichnen, denn $\frac{c}{n_a}$ ist eigentlich die mittlere Kraft zwischen zwei benachbarten Niveauflächen in der Nähe von a und nicht genau die Kraft im Punkte a selbst. Da wir aber die Niveaulinien beliebig dicht in unserer Zeichnung ziehen können, so ist auch in Bezug auf die Darstellung der Intensitäten eine beliebige Genauigkeit zu erreichen.

Man wird nach dem Vorstehenden beim Anblick einer derartigen Zeichnung sofort nicht nur die Richtung, sondern auch die Intensitäten der Kräfte an den verschiedenen Punkten des Feldes erkennen; dort wo die Niveaulinien am dichtesten aneinander liegen dort ist die Kraft ein Maximum.

Aus dieser Betrachtung ergibt sich auch der schon erwähnte wichtige Satz dass aus der Convergenz oder Divergenz zweier benachbarter Kraftlinien auf eine Zu- oder Abnahme der Kraft längs ihrer Richtung geschlossen werden kann; denn diese Convergenz ist nur die Folge von einem Näheraneinanderrücken der Niveauflächen in der betreffenden Richtung, sowie umgekehrt die Divergenz nur Folge des Auseinandertretens derselben ist. Dort wo die Kraftlinien einander parallel verlaufen, dort bleibt die Distanz der Niveauflächen und damit auch die Kraft constant. In den folgenden Beispielen wird vielfach Gelegenheit sein diesen Zusammenhang zu bemerken.

Man kann nach dem Vorgange Faraday's die Richtung und Intensität der Kraft an den verschiedenen Punkten eines Feldes auch durch die Kraftlinien allein zum Ausdrucke bringen, wenn man diese in einer bestimmten Vertheilung zeichnet; da aber durch die richtige Zeichnung der Niveauflächen dieser Zweck bereits erfüllt wird, so wollen wir im Nachfolgenden die Kraftlinien in ganz willkürlicher Vertheilung darstellen, so dass sie uns lediglich ein Abbild der Kraftrichtung, nicht aber der Intensität sind.

Im Folgenden sollen einige der am häufigsten vorkommenden Typen elektrischer Felder etwas näher untersucht werden; zunächst wollen wir den Fall betrachten, wenn im Raume zwei gleich grosse positive elektrische Massen vorhanden sind. Die ganze Figur wird natürlich eine Rotationsfigur um die Verbindungslinie der beiden Massen als Axe sein; unsere Zeichnung in Fig. 27 stellt somit einen Durchschnitt derselben mit irgend einer durch diese Axe gelegten Ebene dar. Für die weiteren Auseinandersetzungen wollen wir an-

nehmen, dass die in den Punkten P und P' concentrirten Massen jede gleich der Einheit sei, und dass die Distanz dieser Punkte 10 Längeneinheiten betrage.

Die Art und Weise wie die Figur 27 gewonnen wird, ist die folgende: man zeichnet sich zunächst das elektrische Feld welches jede der beiden Massen in P und P' für sich allein erzeugen würde; in denselben wären die Niveauflächen Kugelflächen und die Kraftlinien gerade Linien, die von P und P' auslaufen. In der Zeichnung würden die Niveauflächen von P und P' somit als Kreise erscheinen.

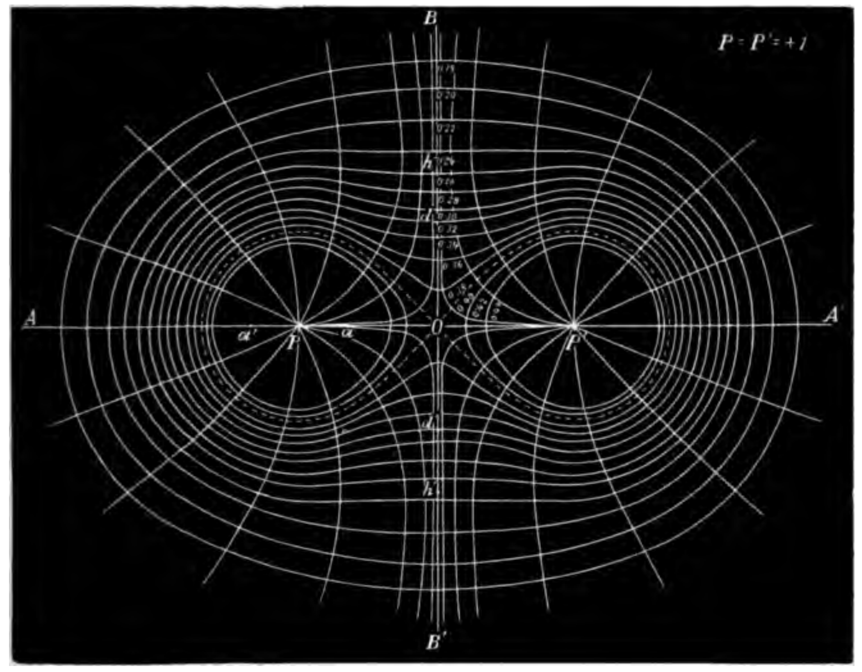


Fig. 27.

Dort wo zwei solche Kreise sich durchschneiden ist in Wirklichkeit das Potential gleich der Summe der beiden Potentiale, die den sich schneidenden Niveauflächen angehören. Indem man diese Summe für alle Durchschnittspunkte bildet und dann jene Punkte die dieselbe Summe haben mit einander verbindet, erhält man die Linien welche in der Figur dem Durchschnitte der wirklichen Niveauflächen mit der Ebene der Zeichnung angeben. Es ist klar dass diese um so exacter werden wird, je mehr Niveauflächen der primären elektrischen Felder man sich gezeichnet hat; in Fig. 27 sind letztere fortgelassen, um die Zeichnung nicht zu undeutlich zu machen, und nur die wirk-

lichen Niveau- und Kraftlinien gezogen. Letztere werden dadurch erhalten, dass man von P und P' Linien ausgehen lässt, die in ihrem ganzen Verlaufe auf den Niveauflächen senkrecht stehen. Die Zahlen, welche in Fig. 27 den Niveauflächen beigesetzt sind, geben den Werth des Potentials auf denselben unter den gemachten Voraussetzungen an. Die Potentialdifferenz je zweier benachbarter Niveaulinien beträgt 0·02.

In der Nähe der Punkte P und P', innerhalb solcher Distanzen welche gegen die Entfernung PP' sehr klein sind, werden die Niveauflächen nicht wesentlich durch die Anwesenheit der entfernteren Masse beeinflusst werden und demnach Kugelflächen sein; sobald aber die Entfernung der einen Masse gegen die der anderen nicht mehr sehr klein ist wird eine Deformation eintreten, in Folge deren die Niveaufläche gegen die andere Masse hin verlängert erscheint. Denn betrachten wir die beiden Punkte a und a', die gleich weit von P entfernt sind, so ist das Potential in a respective a':

$$V_a = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{PP' - Pa} \text{ und } V_{a'} = \frac{1}{Pa} + \frac{1}{PP' + Pa'},$$

es ist also $V_{a'} < V_a$, d. h. die Niveaufläche welche durch a geht, schneidet auf der anderen Seite von P die Symmetrielinie AA' in einem Punkte der näher an P liegt als der Punkt a, oder die Niveaufläche ist gegen P' zu ausgebaucht. Das Gleiche wird um P' herum stattfinden, wie ja überhaupt die ganze Figur zur Ebene BB' symmetrisch sein muss, die auf PP' in der Mitte senkrecht steht.

Ein Blick auf die Fig. 27 lehrt, dass nicht alle Niveauflächen so beschaffen sind dass sie nur eine der wirksamen Massen einschliessen — wie dies bei den nahe an P und P' gelegenen der Fall ist — sondern dass die entfernteren beide Massen zugleich umhüllen. Dazwischen gibt es eine, in der Figur gestrichelt gezeichnet, mit dem Potentiale 0·4, die den Uebergang zwischen beiden Arten herstellt. Sie besteht aus zwei Schalen, die sich im Punkte O — dem Mittelpunkte der ganzen Figur — berühren. Hier haben wir also den Fall dass eine Niveaufläche sich durchschneidet; wir könnten eine Probeladung längs dieser Fläche zuerst um den Punkt P und dann durch O hindurch um P' herumführen und wieder zurück, ohne auf eine Gegenkraft zu stossen, also ohne Arbeitsleistung. Alle Flächen mit kleinerem Potential als 0·4 umschliessen beide Punkte P und P' gemeinsam; die anfangs starke Einschnürung beim Durchsetzen der

Ebene $B B'$ verliert sich mit wachsender Entfernung und wird letztere so gross, dass dagegen die Distanz $P P'$ verschwindet, so werden die Niveauflächen wieder Kugelschalen.

Was bei Betrachtung der Kraftlinien zunächst auffällt, ist, dass sie nicht mehr gerade Linien sind, sondern mitunter sehr scharf gekrümmte, wie in der Nähe des Punktes O. Auch sehen wir benachbarte Kraftlinien in einzelnen Theilen ihres Verlaufes divergiren, in anderen wieder convergiren, was uns auf eine wechselnde Ab- und Zunahme der Kraftwirkung in dieser Richtung schliessen lässt.

Achten wir genauer auf diese Eigenthümlichkeit und untersuchen wir, in welchen Punkten des elektrischen Feldes eventuell solche Maxima und Minima der Kraft auftreten können. Es ist klar dass, wenn eine z. B. von P ausgehende Kraftlinie in ihrem ganzen Verlaufe sich auch von P' entfernt, dann an jedem ihrer Punkte die Kraftwirkung eine kleinere sein muss, als an irgend einem vorhergegangenen; ein Maximum oder Minimum der Kraft könnte also jedenfalls nur eintreten längs einer Kraftlinie die sich auf gewissen Strecken der Masse in P' nähert, während sie sich von P entfernt. Solche ausgezeichnete Kraftlinien werden wir also nur innerhalb einer Kugel finden, die wir um den Punkt O mit dem Radius $O P$ herumlegen.

Besondere Eigenthümlichkeiten zeigt der Punkt O; dieser ist ein Gleichgewichtspunkt, denn eine Probeladung die wir uns in denselben versetzt denken, muss dort im Gleichgewichte verharren. Aber die Art dieses Gleichgewichtszustandes ist in gewisser Beziehung bemerkenswerth. Nähern wir uns von P aus längs der Linie $P P'$, so bewegen wir uns zunächst von Orten höheren Potentials zu solchen mit tieferen, und zwar bis zum Punkt O; von hier ab, auf der Strecke $O P'$ begegnen wir stets wachsenden Werthen des Potentials, wie dies auch aus Fig. 27 ersichtlich ist, wo links und rechts von O Niveauflächen angrenzen deren Potential höher ist als in O. In diesem Punkte hat das Potential also ein Minimum; dieses ist aber kein absolutes, d. h. es ist das Potential im Punkte O nicht für alle Richtungen des Raumes ein Minimum sondern, wie gleichfalls aus unserer Figur hervorgeht, nur für jene, welche durch O gelegt, noch innerhalb der sich durchschlingenden Niveaufläche vom Werthe 0·4 fallen. Für alle Richtungen dagegen, welche durch O gehen und ausserhalb dieser Fläche liegen — z. B. die Richtung BB' — ist das Potential in O ein Maximum, denn es grenzen sowohl von oben wie von unten — wenn wir den in Fig. 27 gezeichneten Durchschnitt

der Figur in's Auge fassen — Niveauflächen an, deren Potential ein niedrigeres ist als in O. Ein absolutes Maximum oder Minimum des Potentials kann, wie wir später sehen werden, in einem elektrischen Felde überhaupt nur an solchen Punkten existiren wo sich Elektricität befindet, an allen anderen kann ein Maximum oder Minimum nur für bestimmte Richtungen vorhanden sein.

Da also in jeder durch O gelegten Richtung [1] n das Potential in O ein Maximum oder Minimum ist, so haben wir für diesen Punkt

$$\frac{dV}{dn} = 0 \text{ oder } \frac{dV}{dn} = \infty.$$

Es ist aber $\frac{dV}{dn}$ nichts anderes als der absolute Werth der Kraft K_n, welche im Punkte O auf die Einheit der Elektricität in der Richtung n wirkt, und diese kann unmöglich unendlich gross sein, da sich O in endlicher Entfernung von endlichen Massen befindet; es muss also

$$\frac{dV}{dn} = 0 \text{ und } K_n = 0$$

sein. Es kann also im Punkte O nach keiner Richtung hin eine Kraft wirken, wie es auch, nach dem was früher schon hierüber bemerkt wurde sein muss, da in O sich eine Niveaufläche durchschneidet. Es ist aber in dem ganzen Felde der Punkt O auch der einzige in dem diese Beziehung stattfindet, und durch den keine Kraftlinie hindurchgeht.

Würde sich demnach in O eine elektrische Masse befinden — die so klein angenommen wird, dass durch ihre Anwesenheit das elektrische Feld keine bemerkbare Störung erleidet — so müsste diese im Gleichgewichte beharren. Angenommen, die Probeladung wäre positiv und wir versuchten sie in der Richtung PP' zu verschieben, so müssten wir dabei Arbeit leisten und die Probeladung würde, an P oder P' genähert und sich dann selbst überlassen, wieder in den Punkt O zurückgetrieben. Mit Bezug auf die Richtung PP' befände sich die Probeladung somit im stabilen Gleichgewichte. Verschieben wir dieselbe aber in einer zu PP' senkrechten Richtung BB' und überlassen sie dann sich selbst, so kehrt sie nicht mehr nach O zurück, sondern entfernt sich in's Unendliche, das folgt aus der

[1] Nur in der Richtung der Tangenten an die sich durchschneidende Niveaufläche ist V constant; in diesen Richtungen ist also die Kraft Null.

Anordnung der Niveauflächen. Mit Bezug auf eine jede ausserhalb der Niveaufläche 0·4 fallende Richtung ist die Probeladung somit im labilen Gleichgewichte.

Untersuchen wir nun den Verlauf des Potentials und der Kraft längs einer Kraftlinie die den Punkt P unendlich nahe der Richtung $P\,P'$ verlässt, die in unserer Figur also durch $P\,O\,B$ dargestellt wäre.

Sowohl V als K beginnen mit dem Werthe ∞, der rasch mit wachsender Entfernung von P abfällt. Wir können für jeden Punkt die Werthe von V und K leicht berechnen indem wir an der für die Fig. 27 gemachten Annahme festhalten, dass in P und P' sich die Masse $+1$ befinde und dass die Distanz $P\,P' = 10$ sei. Wir haben allgemein auf der Strecke $P\,O$ für jeden Punkt in der Entfernung x von P, wenn wir die Distanz $P\,P'$ mit $2\,a$ bezeichnen und die Massen mit m:

$$V = \frac{m}{x} + \frac{m}{(2\,a - x)} \text{ und } K = \frac{m}{x^2} - \frac{m}{(2\,a - x)^2}$$

und für die Strecke $O\,B$, indem wir die Entfernung y von O aus zählen:

$$V = \frac{2\,m}{(a^2 + y^2)^{1/2}} \text{ und } K = \frac{2\,m\,y}{(a^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Auf der Strecke $P\,O$ werden beide Grössen continuirlich abnehmen, und zwar V bis $V = \frac{2\,m}{a}$ oder in unserem speciellen Beispiel bis 0·4 und K bis Null; auf der Strecke $O\,B$ wird V gleichfalls beständig abnehmen, aber die Curve, welche den entsprechenden Verlauf darstellt, wird einen Inflexionspunkt haben müssen, irgendwo zwischen O und B; denn denken wir uns die Entfernungen von P als Abscissen und die Werthe von V als Ordinaten aufgetragen, so geht die Curve im Punkte O parallel der Abscissenaxe, und da sie sich dieser assymptotisch nähern muss — denn erst in unendlicher Entfernung wird das Potential gleich Null — so muss auf der Strecke $O\,B$ noch ein Inflexionspunkt liegen. Diesen erhalten wir, wenn wir:

$$\frac{d^2\,V}{d\,y^2} = 0$$

setzen. Es ist aber:

$$\frac{d\,V}{d\,y} = -\frac{2\,m\,y}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \text{ und } \frac{d^2\,V}{d\,y^2} = \frac{6\,y^2\,(a^2 + y^2)^{1/2} - 2\,(a^2 + y^2)^{3/2}}{(a^2 + y^2)^3}.$$

Indem wir letzteren Ausdruck der Null gleichsetzen erhalten wir:

$$y = \frac{a}{\sqrt{2}} = P P' \frac{1}{\sqrt{8}},$$

d. h. der gesuchte Punkt liegt in unserem Beispiel in der Entfernung 3·53 von O aus gezählt auf $B B'$. In Fig. 27 ist derselbe mit d und d' bezeichnet. Da das wirkliche elektrische Feld eigentlich dargestellt wird indem wir die Fig. 27 um die Axe $A A'$ rotiren lassen, so entspricht all den Punkten d eine Kreislinie, die mit dem Radius $O d$ senkrecht auf $A A'$ um O gezogen wird. Die physikalische Bedeutung dieses Punktes d wird aus dem Folgenden ersichtlich werden.

Wenn wir den Verlauf der Kraft auf der Strecke $P O B$ untersuchen, so finden wir, dass dieselbe in P mit dem Werthe ∞ beginnt und zunächst continuirlich bis Null abfällt, welchen Werth sie im Punkte O erreicht. Da an jedem anderen Orte des Feldes die Kraft einen positiven Werth hat und erst in unendlicher Entfernung wieder Null wird, so muss irgendwo auf der Strecke $O B$ dieser Werth ein Maximum erreichen. Wir finden diesen Ort, indem wir (die Richtung $O B$ mit y bezeichnend)

$$\frac{d K}{d y} = 0$$

setzen. Es ist aber dem absoluten Werth nach

$$K = \frac{d V}{d y} \text{ somit } \frac{d K}{d y} = \frac{d^2 V}{d y^2},$$

was uns auf denselben Punkt d führt, wo die Potentialcurve ihren Inflexionspunkt hat. In der Entfernung $y = P P' \frac{1}{\sqrt{8}} = 3{\cdot}53$ vom Punkte O hat also die Kraft ihren grössten Werth längs der Richtung $O B$. Man bemerkt auch, dass an diesem Punkte die Niveauflächen am dichtesten aneinander liegen. Da die Kraftcurve an diesem Punkte concav gegen die Abscissenaxe ist, sich aber derselben assymptotisch nähern soll, so muss noch ein Inflexionspunkt folgen, den wir erhalten wenn wir:

$$\frac{d^2 K}{d y^2} = 0$$

setzen. Wir finden so den gesuchten Punkt bei:

$$y = P P' \sqrt{\frac{3}{8}} = 6{\cdot}11.$$

Die betreffenden Punkte sind in Fig. 27 mit *h* und *h'* bezeichnet. Hier ist also die Abnahme der Kraft eine lineare, während sie zwischen *d* und *h* eine beschleunigte, zwischen *h* und dem Unendlichen aber eine verzögerte ist.

In Fig. 28 ist die Potentialcurve *V V* und die Kraftcurve *K K* dargestellt, indem die Entfernungen vom Punkte *P* auf der Linie *P O B* zu Abscissen genommen sind; es beziehen sich diese Curven also auf eine Kraftlinie welche unendlich nahe an *P O* verläuft. Um die Eigenthümlichkeiten beider Curven deutlich hervortreten zu lassen, ist der Maassstab der Ordinaten von *V V* gleich dem 10fachen von dem der Abscissen und der der Ordinaten von *K K* gleich dem 100fachen der zugehörigen Abscissen gemacht worden. Die Lage der Punkte *O*, *d* und *h* ist gleichfalls angegeben.

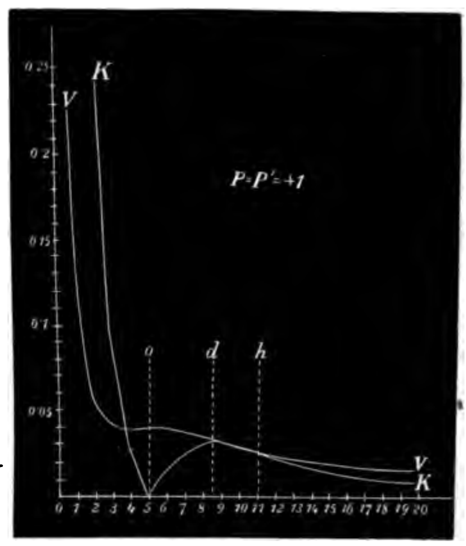


Fig. 28.

In der folgenden Tabelle finden sich die Werthe des Potentials und der Kraft für die verschiedenen Entfernungen *x* von *P* auf der Strecke *P O B*.

x	*V*	*K*
0	∞	∞
0·5	2·10	3·99
1	1·11	0·99
2	0·625	0·23
3	0·476	0·09
4	0·416	0·03
5	0·400	0·00
6	0·39	0·015
7	0·37	0·025
8	0·34	0·030
8·5	0·325	0·031
9	0·31	0·031
10	0·28	0·028
11	0·26	0·025
12	0·23	0·022
13	0·21	0·019
15	0·18	0·015
20	0·13	0·008

Wenn wir nicht jene Kraftlinien in's Auge fassen welche der Richtung $P\,O$ unmittelbar benachbart sind, sondern solche, die sich mehr und mehr davon entfernen, so werden auch die eben betrachteten Maxima und Minima sich allmälig verflachen und bei den von P abgewendeten Kraftlinien vollständig verschwinden.

Es war schon zu wiederholten Malen Gelegenheit zu bemerken, dass die Convergenz oder Divergenz benachbarter Kraftlinien auf eine Zu- oder Abnahme der Kraft in der betreffenden Richtung schliessen lässt, so wie wir dies auch in dem betrachteten elektrischen Felde in der Nähe des Punktes O gefunden haben; es lässt sich dieser Zusammenhang aber noch genauer formuliren und sehr oft zur Abschätzung der Kraftintensität an verschiedenen Punkten eines Feldes benützen.

Betrachten wir ein Büschel von Kraftlinien, das von einem Punkte, z. B. dem Punkte P, ausläuft; alle Kraftlinien die sich einmal innerhalb desselben befinden, werden auch während ihres ganzen Verlaufes innerhalb desselben bleiben, da sie sich gegenseitig nicht schneiden können. Da ein solches Bündel in seinem Verlaufe Erweiterungen und Zusammenschnürungen erfahren kann, wie aus unserer Figur für Richtungen nahe an $P\,O$ hervorgeht, so wird die Dichtigkeit der Kraftlinien an verschiedenen Orten in diesem Bündel eine verschiedene sein. Es steht nun die Intensität der Kraft zu dieser Dichtigkeit in einer sehr einfachen Beziehung, sie ist derselben direct proportional. Wenn also in einem solchen Bündel an einer Stelle des Feldes die Flächeneinheit von n_1 Kraftlinien senkrecht durchschnitten wird und an einer anderen Stelle von n_2, so gilt für die Kräfte K_1 und K_2 an diesen Orten die Bezeichnung $\frac{K_1}{K_2} = \frac{n_1}{n_2}$. Für das Feld, welches ein einzelner elektrischer Punkt erzeugt, sind die Kraftlinien die von diesem Punkte ausgehenden Radien; es ist in diesem Falle unmittelbar klar dass die von derselben Anzahl Kraftlinien getroffenen Flächen so wachsen wie die Quadrate der Entfernungen, dass also die Anzahl Kraftlinien per Flächeneinheit oder die Intensität der Kraft in derselben Weise abnimmt.

In Bezug auf den Verlauf der Kraftlinien im Allgemeinen wäre noch Folgendes zu bemerken: Eine Kraftlinie die durch einen Punkt im Raume geht, drückt die Richtung der Kraft aus, die in diesem Punkte auf ein frei bewegliches positives Elektricitätstheilchen ausgeübt wird. Da ein solches das Bestreben hat sich von positiven Ladungen möglichst weit zu entfernen, so werden wir Kraftlinien immer von positiv elektrischen Körpern ausgehen, nicht aber auf

solchen endigen sehen; sie verlaufen entweder ins Unendliche oder finden ihren Abschluss auf negativ geladenen Körpern. Wenn wir aber Kraftlinien von einem stark positiven Körper zu einem schwach positiven übergehen sehen, so hat das seinen Grund darin, dass letzterer an jenen Stellen seiner Oberfläche, wo solche Kraftlinien endigen, durch Induction von Seite des stark positiven schon eine negative Ladung angenommen hat. In unserem Beispiel von Fig. 27 kann nach dem eben Gesagten keine von P ausgehende Kraftlinie den Punkt P' treffen und umgekehrt; sie verlaufen sämmtlich in's Unendliche.

Für den in Fig. 27 angenommenen Fall eines elektrischen Feldes ist der Verlauf der Kraft und des Potentials längs der Symmetrielinie

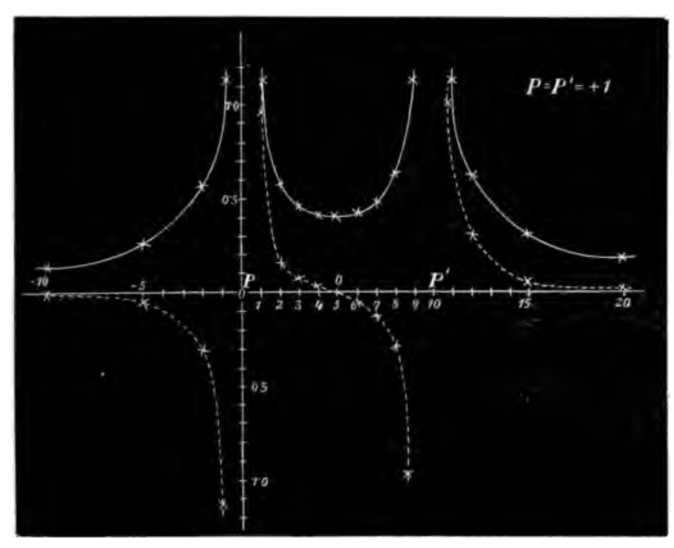


Fig. 29.

PP' noch genauer in Fig. 29 dargestellt; es ist dabei der Anfangspunkt der Coordinaten nach P verlegt und die x sind in der Richtung PP' positiv gezählt. Das Potential ist natürlich für alle Punkte positiv, die Kraft aber theils positiv theils negativ, da wir sie nun als positiv zählen, wenn sie in der Richtung der positiven x wirkt. Die Potentialcurve ist voll ausgezogen, die Kraftcurve gestrichelt. Die Zahlen der folgenden Tabelle für V und K entsprechen unserer Annahme dass $P = P' = +1$ und dass die Distanz $PP' = 10$ sei. Es ist dann für einen Punkt auf PP' in der Distanz x von P

$$V = \frac{1}{x} + \frac{1}{10-x} \text{ und } K = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{(10-x)^2}.$$

	x	V	K
	— 10	0·15	— 0·01
	— 5	0·27	— 0·04
	— 2	0·58	— 0·26
	— 1	1·11	— 1·01
P	0	∞	$\mp \infty$
	1	1·11	+ 0·99
	2	0·62	+ 0·23
	3	0·47	+ 0·09
	4	0·42	+ 0·03
o	5	0·40	0·00
	6	0·42	— 0·03
	7	0·47	— 0·09
	8	0·62	— 0·23
	9	1·11	— 0·99
P'	10	∞	$\mp \infty$
	11	1·11	+ 1·01
	12	0·58	+ 0·26
	15	0·27	+ 0·04
	20	0·15	+ 0·01

Um von dem hier betrachteten idealen Falle, dass die Elektricitätsmengen in Punkten concentrirt sind, zu dem der Wirklichkeit entsprechenden überzugehen, wo dieselben auf der Oberfläche von Leitern angeordnet sind, muss schon jetzt des folgenden sehr wichtigen Satzes Erwähnung geschehen.

Wenn man irgend ein elektrisches Feld hat, z. B. das in Fig. 27 gezeichnete, und man denkt sich irgend eine der vorhandenen Niveauflächen plötzlich zu einem Leiter erstarrt, von genau gleicher Form und Lage, so dass die von dieser Niveaufläche früher eingeschlossene Elektricitätsmenge nun über diesen Leiter sich ausbreitet, so wird dadurch im elektrischen Felde ausserhalb dieser Niveaufläche gar keine Veränderung hervorgebracht. Wir könnten also in unserem Falle genau das in Fig. 27 gezeichnete Feld erzielen, wenn wir z. B. zwei Conductoren von der Grösse und Lage der beiden innersten der gezeichneten Niveauflächen — mit dem Potentiale 0·44 — je mit der Elektricitätsmenge + 1 laden würden. Wir könnten aber auch eine der äusseren Niveauflächen, die beide Punkte P und P' gemeinsam umschliessen, zum Conductor wählen und ihr die Elektricitätsmenge + 2 mittheilen, so bliebe das Feld ausserhalb derselben immer noch genau so wie in Fig. 27. Innerhalb des Conductors fallen natürlich

alle Niveauflächen weg, da dort das Potential überall constant ist. Da die Niveauflächen in der Nähe der Punkte P und P' sich nur sehr wenig von Kugelflächen unterscheiden, so wird auch unsere Zeichnung mit einem grossen Grade der Genauigkeit für den Fall gelten, dass die Elektricitätsmengen $+1$ sich nicht in Punkten, sondern auf Kugeln vorfinden, deren Radius gegen ihre Distanz als klein anzusehen ist. Unter dieser Voraussetzung können also auch die im Folgenden noch zu besprechenden elektrischen Felder, die eigentlich für eine punktförmige Anordnung der wirksamen Massen gelten, als der Ausdruck der Wirklichkeit angesehen werden.

Wir wollen nun die Veränderungen ins Auge fassen die mit dem elektrischen Felde vor sich gehen, wenn bei gleichbleibender Masse im Punkte P sich die in P' allmälig verringert und durch Null ins Negative übergeht; die Distanz PP' soll dabei unverändert bleiben.

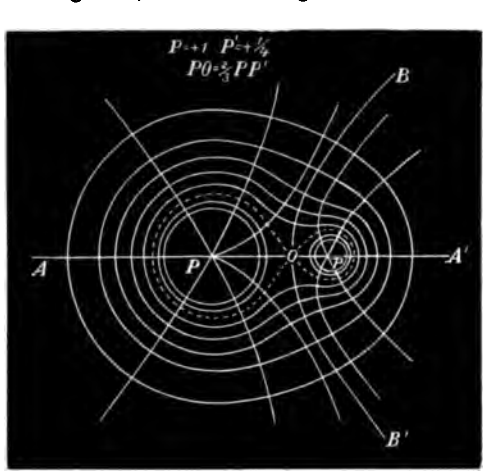


Fig. 30.

Fig. 30 stellt das elektrische Feld vor, wenn die Masse in P' gleich $+\,^1/_4$ ist; wie man sieht, nähert sich dasselbe allmälig dem Falle wo nur im Punkte P eine Masse vorhanden ist, indem die Wirkung von P' sich mehr auf dessen nächste Umgebung beschränkt und gleichsam als Störung des von P erzeugten Feldes aufzufassen ist. Auch hier existirt eine Niveaufläche die sich selbst durchschneidet und deren Schlingen je eine der Massen P und P' umschliessen; der Durchschneidungspunkt O liegt aber jetzt nicht mehr in der Mitte, sondern näher an PP', und zwar ist $PO = \frac{2}{3}\,PP'$. Je kleiner die Masse P' wird, desto näher rückt der Punkt O an dieselbe heran und desto kleiner wird die Schlinge die P' umgibt. Die Fläche BB', die in unserem früheren Beispiele eine Symmetrieebene der Figur war, ist jetzt eine Fläche 6. Grades.

Die Werthe des Potentials und der Kraft längs der Linie AA' ergeben sich jetzt aus den Gleichungen:

$$V = \frac{1}{x} + \frac{\frac{1}{4}}{10 - x} \text{ und } K = \frac{1}{x^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(10 - x)^2}$$

und sind in Fig. 31 durch Curven dargestellt. (Vgl. die folgen Tabelle.) Da im Punkte O die Kraft gleich Null sein muss, so find

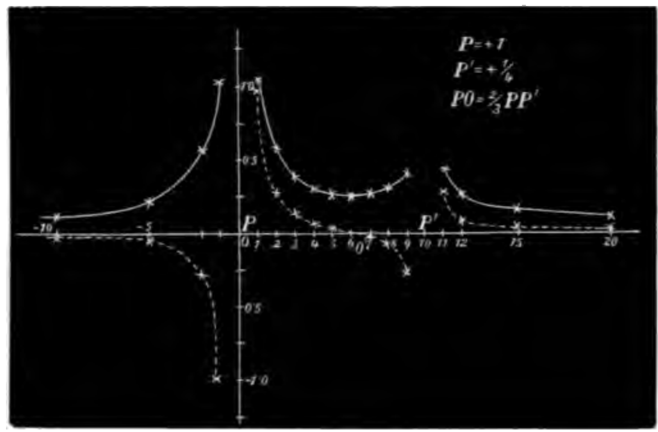


Fig. 31.

wir, indem wir $K = 0$ setzen, den Punkt O in der Entfernung $\frac{2}{3}P$ von P wie oben angegeben wurde.

	x	V	K
	— 10	+ 0·11	— 0·01
	— 5	0·22	— 0·04
	— 2	0·52	— 0·25
P	0	∞	$\mp \infty$
	1	1·03	+ 1·00
	2	0·53	0·24
	3	0·37	0·10
	4	0·29	0·06
	5	0·25	0·03
	6	0·23	0·01
o	6·66	0·22	0·00
	7	0·22	— 0·01
	8	0·25	— 0·04
	9	0·36	— 0·24
P'	10	∞	$\mp \infty$
	11	0·34	0·26
	12	0·21	0·05
	15	0·12	0·01
	20	0·07	0·005

Wenn wir nun die Masse P' immer kleiner und kleiner werden lassen, so übergeht das elektrische Feld allmälig in das eines einzigen wirksamen Punktes P; der Gleichgewichtspunkt O rückt dabei bis P' vor, verschwindet aber zugleich, sobald er diese Stellung erreicht hat, denn die Schlinge der sich selbst durchschneidenden Niveaufläche, die P' einhüllt, zieht sich um diesen Punkt immer mehr zusammen je kleiner die Masse daselbst wird, um für den Fall $P' = 0$ selbst als Punkt zu verschwinden. Es entfällt somit jetzt die Durchschneidung einer Niveaufläche und damit auch der Gleichgewichtspunkt.

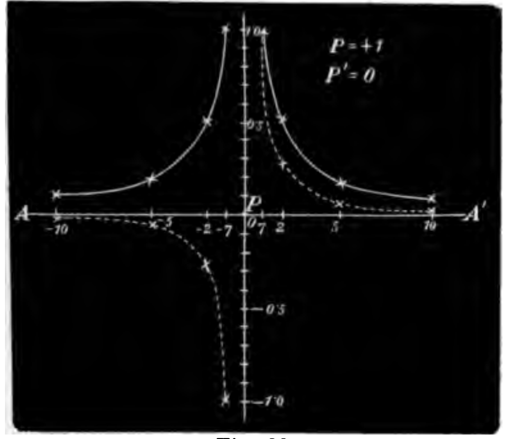


Fig. 32.

Für V und K längs der Linie $A\,A'$ gelten jetzt die Gleichungen:

$$V = \frac{1}{x} \text{ und } K = \frac{1}{x^2},$$

die in Fig. 32 graphisch dargestellt sind. Folgendes sind die betreffenden Zahlenwerthe:

	x	V	K
	— 10	0·10	— 0·01
	— 5	0·20	— 0·04
	— 2	0·50	— 0·25
	— 1	1·00	— 1·00
P	0	∞	$\mp \infty$
	1	1·00	+ 1·00
	2	0·50	0·25
	5	0·20	0·04
	10	0·10	0·01

Wenn die Masse in P' noch kleiner als Null wird, d. h. wenn dort eine negative Ladung entsteht, so erscheint auch die sich selbst durchschneidende Niveaufläche wieder, aber der Durchschnittspunkt O liegt jetzt nicht zwischen P und P', sondern jenseits dieses Punktes, aber natürlich auf der Axe $A\,A'$ der ganzen Figur. In Fig. 33 ist das elektrische Feld dargestellt für $P = +1$ und $P' = -\frac{1}{4}$. Wie

man sieht, umfasst die eine Schlinge der ausgezeichneten Niveaufläche nur die Masse P', die andere dagegen P und P' gleichzeitig; die sämmtlichen Niveauflächen sind also auch jetzt wieder in 3 Partien getheilt, wovon die einen nur den Punkt P, die anderen nur P' und die dritten beide zusammen einschliessen. Von den Kraftlinien verlaufen jetzt nicht alle ins Unendliche, sondern einige endigen im negativ elektrischen Punkt P', und zwar sind das jene die von der ausgezeichneten Niveaufläche die kleine Schlinge um P' durchschneiden;

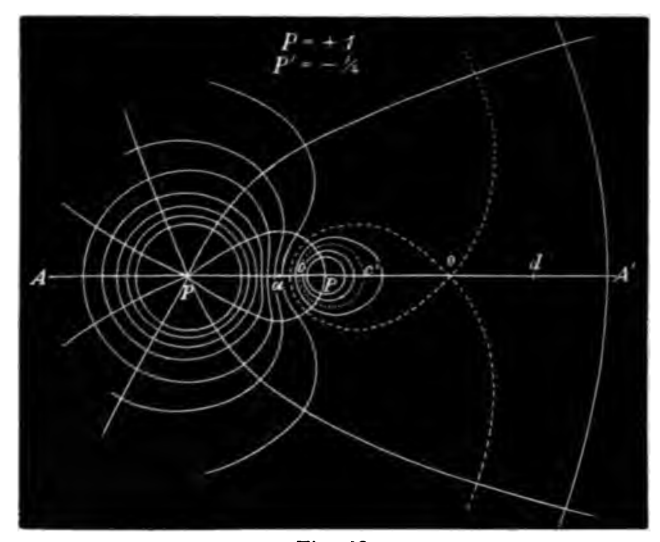


Fig. 33.

jene, welche die grosse Schlinge durchsetzen, verlaufen in unendliche Entfernung.

Um P herum haben alle Punkte ein positives Potential, in der Nähe von P' dagegen ein negatives, da in diesem Punkte selbst das Potential $-\infty$ ist; es folgt daraus, dass zwischen P und P' sich eine Niveaufläche mit dem Potentiale Null finden muss. Dieselbe ist immer, wie wir gleich sehen werden, kugelförmig und durchschneidet die Axe in den Punkten $c\,c'$. In Fig. 33 ist dieselbe punktirt gezeichnet. Die genaue Lage derselben ergibt sich aus der folgenden Betrachtung.

Bezeichnen wir die beiden Massen in P und P' mit M und $-m$ und ihre Entfernungen von einem Punkte irgend einer Niveaufläche mit R und r, so besteht für alle Punkte derselben Niveaufläche die Relation

$$\frac{M}{R} - \frac{m}{r} = \text{Const.}$$

Für die Niveaufläche mit dem Potential Null haben wir aber speciell $\frac{M}{R} - \frac{m}{r} = 0$ oder $\frac{M}{m} = \frac{R}{r} = \text{Const.}$

Diese Niveaufläche ist also so beschaffen, dass die Entfernungen eines ihrer Punkte von den beiden Massen in P und P' ein constantes Verhältniss haben für die ganze Fläche, d. h. es ist diese Fläche eine Kugelfläche. Drücken wir nämlich R und r in der Gleichung $\frac{R}{r} = C$ durch die Coordinaten x und y des betreffenden Punktes der Fläche aus und bezeichnen wir die Distanz $P P'$ mit a, so ergibt sich $\frac{x^2 + y^2}{(a-x)^2 + y^2} = \text{Const.}$ oder

$$x^2 + y^2 + A x + B = 0,$$

wo A und B zwei Constanten sind; das ist aber die Gleichung eines Kreises dessen Mittelpunkt auf der Linie $P P'$ liegt. In Bezug auf diese Kugel sind die Punkte P und P' conjugirt. Es muss also dieselbe wie in Fig. 34 so liegen, dass, wenn wir ihren Mittelpunkt mit A bezeichnen, die Relation besteht:

$$A P' : A B = A B : A P.$$

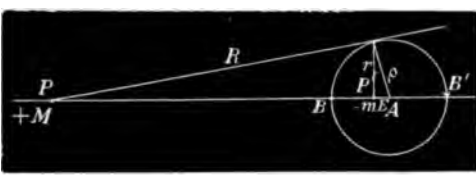


Fig. 34.

Wenn wir von P aus eine Tangente an die Kugel ziehen und vom Berührungspunkte eine Senkrechte auf $P A$ fällen, so trifft diese den Punkt P'.

Um die Lage des Mittelpunktes A der Kugel und die Grösse des Radius ρ zu bestimmen, genügt die Bedingung dass das Verhältniss $\frac{R}{r} = C$ für alle Punkte der Kugel ein constantes bleiben muss; wenden wir das auf die Punkte B und B' an, und bezeichnen wir die Distanz $A P'$ mit ε, so ergeben sich die Relationen:

$$\frac{\rho - \varepsilon}{a - \rho + \varepsilon} = \frac{1}{C} \text{ und } \frac{\rho + \varepsilon}{a + \rho + \varepsilon} = \frac{1}{C},$$

wenn wir die Distanz $P P'$ mit a bezeichnen. Daraus ergibt sich weiter

$$\varepsilon = \frac{\rho(C+1) - a}{C+1} = \frac{a + \rho - \rho C}{C - 1} \text{ und daraus}$$

$$\rho = a \frac{C}{C^2 - 1} \text{ und } \varepsilon = a \frac{1}{C^2 - 1}.$$

In unserem Beispiele ist $a = 10$ und $C = \frac{R}{r} = \frac{M}{m} = 4$; somit wird $\rho = \frac{40}{15} = 2{\cdot}66$ und die Entfernung des Mittelpunktes der Kugel von $P' = \varepsilon = 0{\cdot}66$.

Alle Niveauflächen also, welche innerhalb dieser Kugel liegen, haben ein negatives Potential, alle ausserhalb befindlichen ein positives, somit auch die im Punkte o sich durchschneidende Niveaufläche.

Verfolgen wir nun die Werthe des Potentials und der Kraft längs der Symmetrieaxe $A\,A'$ (Fig. 33).

In P selbst ist das Potential gleich $+\infty$ und sinkt von da gegen P' continuirlich, wo es den Werth $-\infty$ erreicht; dazwischen muss es den Werth Null passiren, und zwar im Punkte c, wo die Niveaufläche von Kugelgestalt die Axe schneidet. Hinter P' steigt das Potential wieder von $-\infty$ bis Null im Punkte c' — dem zweiten Durchschnittspunkte der Kugelfläche mit $A\,A'$ und wird von da ab positiv. Da der Werth von V in unendlicher Entfernung auch gleich Null ist, so muss zwischen c' und dem Unendlichen noch ein Maximum folgen, d. h. ein Punkt, wo $d\,V = 0$ ist in der Richtung $A\,A'$, also ein Punkt, wo die Kraft K in dieser Richtung gleichfalls Null ist. Das kann aber nur der Punkt o sein, wo eine Niveaufläche sich durchschneidet.

Die Lage dieser Punkte c, c' und o lässt sich leicht bestimmen.

Für einen jeden Punkt zwischen P und P' in der Entfernung x von P gilt die Gleichung:

$$V = \frac{M}{x} - \frac{m}{a - x},$$

wenn M und $-m$ die beiden Massen in der Distanz a sind. Man hat also für $V = 0$ die Bedingung: $\frac{M}{x} = \frac{m}{a - x}$ oder $x = a\,\frac{M}{M + m}$. Diese Entfernung des Punktes c von P wird in unserem Beispiele $= 8{\cdot}00$.

Für alle Punkte jenseits P' gilt die Gleichung

$$V = \frac{M}{x} - \frac{m}{(x - a)},$$

Woraus für den Punkt c' (mit dem Potential Null) sich ergibt

$$x = a\,\frac{M}{M - m} = 13{\cdot}33.$$

Zur Bestimmung des Punktes o, wo das Potential ein Maximum ist, haben wir die Relation

$$\frac{\delta V}{\delta x} = 0 \text{ oder } -\frac{M}{x^2} + \frac{m}{(x-a)^2} = 0,$$

woraus sich ergibt $x = a \dfrac{1}{1 - \sqrt{\dfrac{m}{M}}}$.

In unserem speciellen Fall ist somit $x = 20$, d. h. der Punkt o liegt um die Distanz $P P'$ hinter P'. Da die Potentialcurve, wenn wir $A A'$ zur Abscissenaxe wählen und die Potentiale als Ordinaten auftragen, im Punkte o parallel zur Abscissenaxe geht, da hier $\dfrac{\delta V}{\delta x} = 0$ ist, und da andererseits das Potential in unendlicher Entfernung gleich Null werden muss, also die Curve wieder parallel zu $A A'$ verlaufen soll, so muss dieselbe irgendwo dazwischen einen Inflexionspunkt haben. Für denselben ist das Gefälle des Potentials ein lineares, also $\dfrac{\delta^2 V}{\delta x^2} = 0$. Wir haben also

$$\frac{M}{x^3} = \frac{m}{(x-a)^3} \text{ oder } x = a \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\dfrac{m}{M}}}.$$

Dieser Punkt ist in Fig. 33 mit d bezeichnet und liegt bei $x = 27{\cdot}1$; es ist der Punkt zwischen o und dem Unendlichen, wo die Kraft ein Maximum hat.

Wir wollen nun den Gang der Kraft K längs der Axe $A A'$ untersuchen.

Zwischen A und P ist die Kraft negativ und wird im Punkte $P = -\infty$ um sprungweise nach $+\infty$ zu übergehen; zwischen P und P' ist sie durchwegs positiv und endlich und wird erst in $P' = +\infty$. Es muss demnach zwischen P und P' ein Minimum existiren, das sich ergibt, wenn wir $\dfrac{\delta K}{\delta x} = 0$ setzen. Es ist aber für alle Punkte zwischen P und P', $K = \dfrac{M}{x^2} + \dfrac{m}{(a-x)^2}$; somit ist

$$\frac{\delta K}{\delta x} = -\frac{M}{x^3} + \frac{m}{(a-x)^3} \text{ oder es ist } \frac{x}{a-x} = \sqrt[3]{\frac{M}{m}} \text{ oder } x = a \frac{1}{1 + \sqrt[3]{\dfrac{m}{M}}}.$$

Dieser Punkt liegt in Fig. 33 bei 6·15 und ist mit a bezeichnet. Man bemerkt, dass auch dort die Niveauflächen am weitesten auseinanderliegen bezüglich der ganzen Strecke $P P'$.

In P' wechselt die Kraft das Zeichen und wird $-\infty$ um bis o auf Null zu steigen; hier wird sie positiv, und da sie in unendlicher Entfernung wieder gleich Null sein muss, so muss noch ein Maximum folgen, das wir finden, indem wir $\frac{\delta K}{\delta x} = 0$ setzen. Für alle Punkte zwischen P' und dem Unendlichen ist aber $\frac{\delta K}{\delta x} = -\frac{M}{x^3} + \frac{m}{(x-a)^3}$. Man findet somit

$$x = a \frac{1}{1 - \sqrt[3]{\frac{m}{M}}} = 27{\cdot}1,$$

was nichts anderes ist, als der früher schon bemerkte Punkt d in Fig. 33, an welchem die Potentialcurve ihren Inflexionspunkt hat;

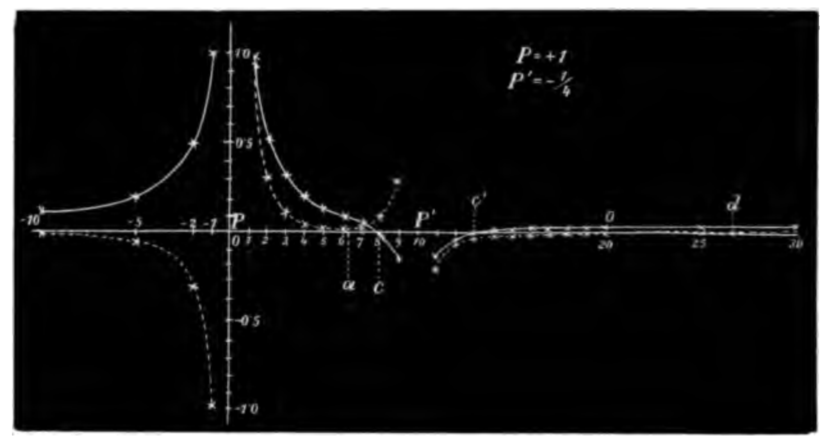


Fig. 35.

es ist das zugleich der Ort, an welchem die Niveauflächen, die ausserhalb der sich selbst durchschneidenden liegen, ihre Einkerbungen verlieren.

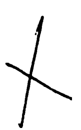
In Fig. 35 sind die Curven für den Verlauf der Kraft und des Potentials längs AA' dargestellt und in der folgenden Tabelle die einzelnen Werthe dafür angegeben nach den Gleichungen:

$$V = \frac{1}{x} \mp \frac{\frac{1}{4}}{10 - x}; \quad K = \frac{1}{x^2} \pm \frac{\frac{1}{4}}{(10 - x)^2},$$

wobei zu bemerken ist, dass von den Doppelzeichen das obere oder untere zu gebrauchen ist, je nachdem der betreffende Punkt diesseits oder jenseits P' liegt.

	x	V	K
	— 10	+ 0·09	— 0·01
	— 5	0·18	— 0·04
	— 2	0·44	— 0·25
	— 1	0·98	— 1·00
P	0	∞	$\mp\ \infty$
	1	0·97	+ 1·00
	2	0·47	0·25
	3	0·30	0·11
	4	0·21	0·07
	5	0·15	0·05
a	6	0·10	0·045
	7	0·06	0·05
c	8	0·00	0·08
	9	— 0·14	0·26
P'	10	— ∞	$\pm\ \infty$
	11	— 0·16	— 0·24
	12	— 0·04	— 0·06
c'	13	— 0·01	— 0·03
	14	+ 0·01	— 0·02
	15	0·02	— 0·02
	16	0·02	— 0·01
	17	0·02	— 0·01
	18	0·02	— 0·005
	19	0·025	— 0·005
o	20	0·026	0·000
d	25	0·025	+ 0·001
	30	0·020	+ 0·0006

Wir wollen nun untersuchen wie das elektrische Feld sich weiter verändert, wenn die negative Masse in P' noch weiter wächst, wenn also die Constante $C = \frac{M}{m}$ in unseren früheren Formeln sich allmälig der Einheit nähert. Der Gleichgewichtspunkt o für dessen Entfernung von P wir früher die Formel $x = a \frac{1}{1 - \sqrt{\frac{m}{M}}}$ gefunden haben, rückt immer weiter ins Unendliche und lassen wir die Masse in P' ihrem absoluten Werth nach gleich der in P werden, so wird $C = 1$ und $x = \infty$. Aehnliches finden wir, wenn wir die Veränderung der Kugelfläche vom Potential Null ins Auge fassen. Für ihren



Radius ρ und für die Entfernung ε ihres Mittelpunktes von P' haben wir gefunden:

$$\rho = a \frac{C}{C^2 - 1}; \ \varepsilon = a \frac{1}{C^2 - 1}.$$

Wird also $C = 1$, so wird $\rho = \varepsilon = \infty$.

Da der Gleichgewichtspunkt o jetzt in unendlicher Entfernung liegt, so ist dort jedenfalls das Potential $= o$, d. h. die Schlinge um den Punkt P', die jetzt eine unendliche Fläche geworden ist, hat das Potential Null, sie fällt also mit der Kugelfläche von gleichem Potentiale zusammen. Der Radius ρ der letzteren ist aber unendlich gross

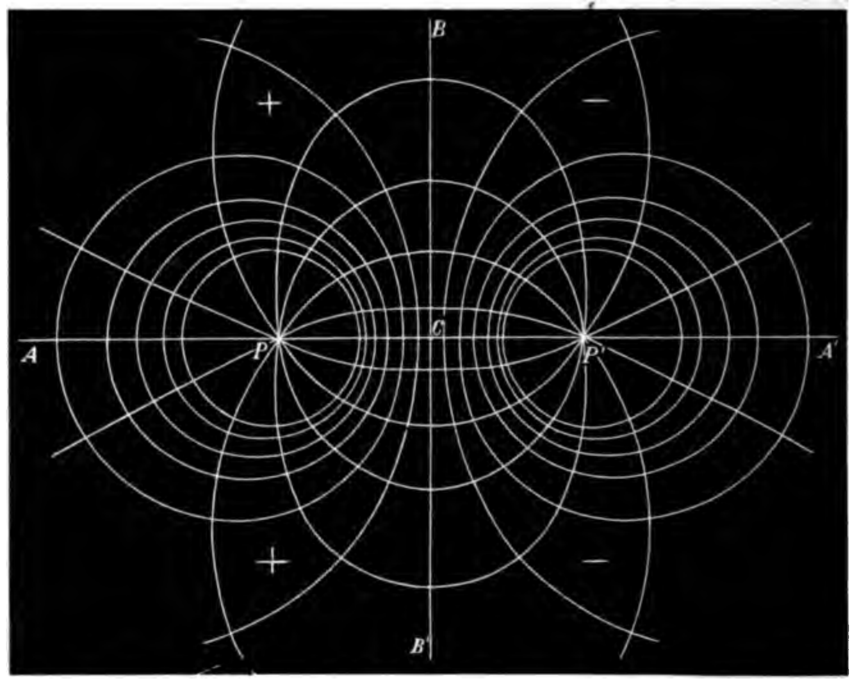


Fig. 36.

geworden, es sind also die beiden Flächen in eine unendliche Ebene vom Potential Null übergegangen. Um die Lage dieser letzteren gegen unsere Punkte P und P' genau zu präcisiren, genügt es, die beiden Durchschnittspunkte c und c' der Kugel vom Potential Null mit der Geraden $P P'$ aufzusuchen. Für diese beiden Punkte haben wir aber im früheren die Entfernungen gefunden:

$$x_c = a \frac{M}{M + m} \text{ und } x_{c'} = a \frac{M}{M - m},$$

Für $M = m$ liegt also der Punkt c' in unendlicher Entfernung und der Punkt c in der Mitte zwischen P und P'. Das elektrische

Feld wird also nicht nur symmetrisch sein um jede Ebene, die durch $P\,P'$ geht, sondern auch noch um eine Ebene, die $P\,P'$ halbirt und darauf senkrecht steht. Diese Ebene ist die Niveaufläche vom Potentiale Null. In Fig. 36 ist das elektrische Feld für $P = +1$ und $P' = -1$ dargestellt.

Da alle Niveauflächen um P' herum, die innerhalb der kugelförmigen Fläche liegen, ein negatives Potential haben, und da letztere im vorliegenden Fall in die Ebene $B\,B'$ übergeht, so wird durch diese der ganze Raum in zwei gleiche Theile zerlegt, von denen der eine, der den Punkt P' enthält, nur negative Potentiale, der andere, um P herum, nur positive enthält. Die Ebene $B\,B'$ ist also eine Symmetrieebene in Bezug auf die absoluten Werthe der Potentiale, aber jedem positiven Vorzeichen auf der einen Seite entspricht ein negatives auf der anderen. Dasselbe gilt von den Kräften, die, wenn sie an einem Punkte zur Ebene $B\,B'$ hin wirken, im Spiegelpunkte von $B\,B'$ weggerichtet sind; die Intensitäten in beiden Punkten sind jedoch gleich.

Alle Kraftlinien, die von dem Punkte P ausgehen, werden unter dem Einflusse von P' sich krümmen und die Ebene $B\,B'$ treffen; wie wir in den früheren Beispielen gesehen haben, treffen aber alle Kraftlinien, die die Schlinge um P' passiren, in den Punkt P' und endigen dort. Da nun diese Schlinge mit $B\,B'$ identisch ist, so müssen alle von P auslaufenden Kraftlinien auch in P' endigen, wie es übrigens schon aus der Symmetrie der Figur hervorgeht. Wenn wir demnach eine frei bewegliche positive Elektricitätsmenge irgend wohin in den Raum bringen, so müsste sie sich längs der diesen Ort passirenden Kraftlinie fortbewegen, bis sie nach P' kommt; eine negative Probeladung würde dieselbe Kraftlinie natürlich in umgekehrter Richtung durchlaufen und nach P gelangen.

Da die Niveaufläche $B\,B'$ eine Ebene ist, so laufen bei Durchbrechung derselben alle Kraftlinien einander parallel; in unmittelbarer Nähe dieser Fläche ist also die Kraft constant und somit ein Minimum längs der ganzen Kraftlinie die durch den betreffenden Punkt geht.

Was den Verlauf von Potential und Kraft längs $A\,A'$ anlangt, so ergibt sich derselbe ohneweiters.

Im Punkte P ist das Potential $+\infty$ und bleibt positiv bis zum Mittelpunkte c der Figur; dann wird es negativ, im Punkte P' gleich $-\infty$ und in unendlicher Entfernung wieder Null.

Die Kraft ist in P gleich ∞ und bleibt positiv bis P', wo sie von $+\infty$ im $-\infty$ umspringt; im Punkte c, in der Mitte zwischen P und P', hat sie ein Minimum, daher hier die Niveauflächen auch

am weitesten auseinander liegen. Für die Kraft zwischen P und P haben wir die Gleichung

$$K = \frac{M}{x^2} + \frac{M}{(a-x)^2}, \text{ somit } \frac{\delta K}{\delta x} = -\frac{M}{x^3} + \frac{M}{(a-x)^3}$$

und erhalten somit für $\frac{\delta K}{\delta x} = 0$, oder für das Minimum der Kraft

$$x = \frac{a}{2}.$$

In Fig. 37 sind die Potential- und Kraftcurven dargestellt für die Axe $A A'$. Für die einzelnen Punkte dieser Linien ergeben sich

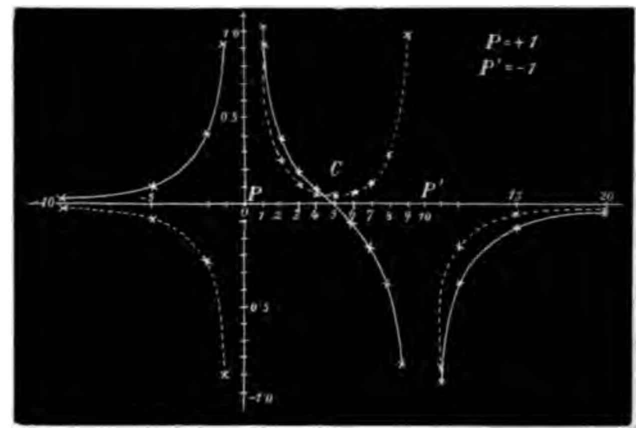


Fig. 37.

nach den Formeln

$$V = \frac{1}{x} - \frac{1}{10-x} \text{ und } K = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{(10-x)^2}$$

die folgenden Werthe:

	x	V	K
	— 10	+ 0·05	— 0·01
	— 5	0·13	— 0·04
	— 2	0·42	— 0·24
	— 1	0·91	— 0·99
P	0	∞	$\mp \infty$
	1	0·89	+ 1·01
	2	0·38	0·27
	3	0·19	0·13
	4	0·09	0·09

	x	V	K
c	5	0·00	0·08
	6	— 0·09	0·09
	7	— 0·19	0·13
	8	— 0·38	0·27
	9	— 0·89	1·01
P'	10	— ∞	± ∞
	11	— 0·91	— 0·99
	12	— 0·42	— 0·24
	15	— 0·13	— 0·04
	20	— 0·05	— 0·01

Bei einer aufmerksamen Vergleichung der Figuren 29, 31, 32, 35 und 37 wird man den allmäligen Uebergang der Kraft- und Potentialcurven aus dem Falle $P' = +1$ in den, wo $P' = -$ ist, bemerken; das Gleiche gilt von den Darstellungen der entsprechenden elektrischen Felder.

Betrachtet man in Fig. 36 nur die centrale Partie der Figur, also jenen Theil des Feldes, der von den centralen Theilen der dem Punkte c zunächst liegenden Niveaufläche begrenzt wird, so sieht man hier ein angenähert homogenes Feld vor sich; in unmittelbarer Nähe von c, wo man die angrenzenden Niveauflächen als Ebenen betrachten kann, werden die Kraftlinien parallele Gerade und das Feld somit wirklich homogen. Da die Kraft hier längs $P\,P'$ ein Minimum ist, so folgt daraus auch, dass sie in der Nähe des Punktes c, eben so lange das Feld homogen ist, einen constanten Werth hat. Dies gibt uns einen Fingerzeig in Bezug auf die experimentelle Herstellung eines homogenen Feldes von beliebiger Ausdehnung; denn nach einem schon erwähnten Satze können wir die von einer beliebigen Niveaufläche umschlossene Elektricitätsmenge auch über diese Niveaufläche sich ausbreiten lassen — letztere dabei als leitend angenommen — ohne dass dadurch das elektrische Feld ausserhalb gestört wird. Denken wir uns also in Fig. 36 die beiden dem Punkte c benachbarten Niveauflächen als Leiter und die eine mit der Ladung $+1$, die andere mit -1 versehen, so bleibt das Feld zwischen ihnen doch sich gleich, d. h. in solcher Ausdehnung homogen, soweit wir die beiden Niveauflächen als Ebenen ansehen können.

Um demnach in der Praxis ein homogenes Feld zu erzeugen, wird es genügen, zwei einander parallele ebene Platten mit gleichen aber entgegengesetzten Ladungen zu versehen; der Raum zwischen ihnen stellt dann ein homogenes Feld dar und die Kraftlinien durch-

setzen denselben als parallele Gerade, die auf den begrenzenden Ebenen senkrecht stehen. Da die leitenden Platten eigentlich unendlich ausgedehnt sein sollten, so wird das Feld in Wirklichkeit am Rande derselben und schon in dessen Nähe nicht mehr homogen sein, sondern nur in seinen centralen Partien; man muss daher Platten, am besten kreisförmige, verwenden, deren Durchmesser gross ist gegen ihren Abstand von einander, damit wenigstens der weitaus grösste Theil des Zwischenraumes als homogen angesehen werden kann. Bei genauen Messungen wird man freilich diese störende Wirkung des Randes nicht ausser Acht lassen dürfen.

In Fig. 38 ist das elektrische Feld für zwei parallele entgegengesetzt geladene Platten $+A$ und $-A$ gezeichnet, und zwar nur das eine Ende desselben, indem die Figur sich nach der anderen Seite symmetrisch ergänzt. Die Platten sind als kreisförmig angenommen und da ist jede Ebene, die durch ihre Mittelpunkte geht, eine Symmetrieebene; für eine solche gilt auch die Zeichnung. Die Niveauflächen gehen zwischen den Platten einander parallel und sind äquidistant, ausserhalb derselben krümmen sie sich, um sich am anderen Ende zu geschlossenen Flächen zu vereinigen; nur die den Mittelpunkt der Figur passirende Niveaufläche ist eine unendliche Ebene. Die Kraftlinien gehen zwischen den Platten als parallele Gerade über in der Richtung der Pfeile, aber sie verlassen die Fläche $+A$ nicht nur an der Innenseite, sondern auch an der Aussenseite, denn auch hier befindet sich ein Theil der Ladung und treffen auf die Aussenseite der Platte $-A$. Die Kraftlinien endigen alle auf $-A$, mit Ausnahme derjenigen, die vom Centrum $+A$ ausgeht und als Gerade ins Unendliche verläuft.

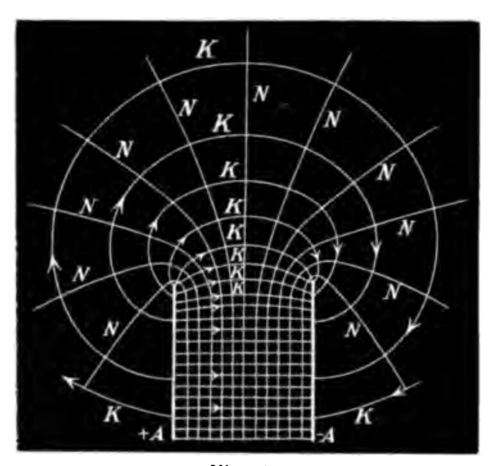


Fig. 38.

Ein solches homogenes Feld, das also durch den Parallelismus und die Aequidistanz seiner Niveauflächen charakterisirt ist, wird vollkommen bestimmt durch die Grösse und Richtung der Kraft, welche an irgend einem Punkte desselben herrscht; denn Richtung sowohl als Grösse bleiben überall in demselben constant. Das

Potential längs einer Kraftlinie würde demnach durch eine gerade Linie dargestellt werden, deren Neigung gegen die Abscissenaxe, $\frac{\delta V}{\delta x}$, zugleich den Werth der Kraft in dem betreffenden Felde angeben würde; die Kraftcurve dagegen wäre eine gerade Linie, die zur Abscissenaxe parallel verläuft — da die Kraft überall constant ist — und zwar in einem Abstande, der gleich ist der Tangente des Neigungswinkels der Potentialcurve gegen die Abscissenaxe.

Fig. 39.

Da man öfters in die Lage kommt aus experimentellen Daten die Potentialgefälle zu entnehmen, so ist es gut, mit diesen gleich die Vorstellung von einer bestimmten Kraft zu verbinden; in Fig. 39 stellen die Linien $V_1 \ldots V_4$ die Potentialgefälle in homogenen Feldern vor, deren Kräfte gleich $1 \ldots . 4$ sind. Die gestrichelten Linien $K_1 \ldots . K_4$ sind die zugehörigen Kraftcurven, d. h. in diesem Falle Gerade.

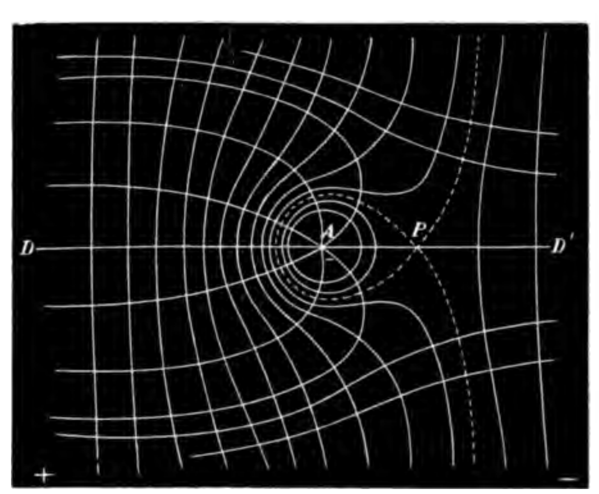


Fig. 40.

Wir wollen nun noch den Fall betrachten, dass ein homogenes Feld an einem Punkte dadurch eine Störung erleide, dass sich an demselben eine elektrische Masse befinde. Die Kraftlinie, welche durch dieselbe hindurchgeht, wird jedenfalls keine Richtungsänderung erleiden

und somit eine Gerade bleiben; in Fig. 40 ist dieselbe mit DD' bezeichnet. Wir wollen annehmen dass im ungestörten homogenen Feld das Potential in D höher sei als in D', d. h. dass das Potentialgefälle längs dieser Linie negativ, die Kraft somit positiv sei. Befindet sich nun im Punkte A z. B. eine negative Ladung, so würde diese für sich Niveaufläche in Kugelform um A herum erzeugen, durch deren Superposition mit den Ebenen des homogenen Feldes eben die in Fig. 40 gezeichneten Curven entstehen. Man sieht, dass die Niveauflächen wieder in zwei getrennte Gebiete zerfallen, die dem einen angehörenden umschliessen den Punkt A vollständig, die anderen erstrecken sich ins Unendliche. Beide Theile sind von einander durch eine sich selbst im Punkte P durchschneidende Fläche getrennt; in diesem Punkte muss also wieder die Kraft gleich Null sein. Alle Kraftlinien, welche die Schlinge durchbrechen, endigen im Punkte A die übrigen verlaufen ins Unendliche, respective endigen auf der negativen Condensatorplatte falls das Feld in der früher bezeichneten Weise durch zwei parallele Platten erzeugt ist. Die Lage des Gleichgewichtspunktes P hängt natürlich von der im homogenen Felde herrschenden Kraft K und von der Ladung im Punkte A ab. Bezeichnen wir die Intensität des homogenen Feldes mit C und die Ladung in A mit m, so wird in einer Entfernung x von A längs DD' eine Kraft K wirken

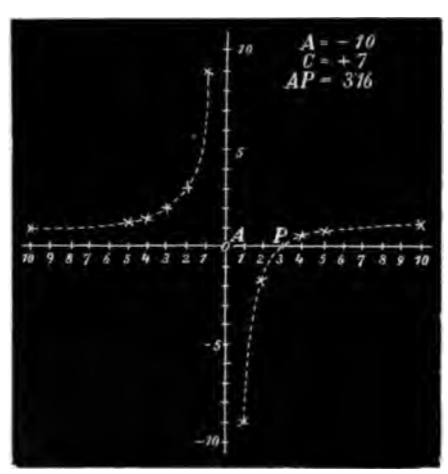


Fig. 41.

$$K = C \pm \frac{m}{x^2},$$

wobei das negative oder positive Vorzeichen gilt, je nachdem der Punkt x zwischen D und A oder zwischen A und D' liegt.

Die Fig. 40 gilt für den speciellen Fall, dass $C = 1$ und $m = -10$ sei: die Dichtigkeit der Niveauflächen gibt ein sehr anschauliches Bild der Kraftvertheilung längs DD'. Um den Punkt P zu finden, haben wir nur

$$K = C - \frac{m}{x^2} = 0$$

zu setzen und finden so $x = \sqrt{\frac{m}{C}}$ oder $= 3{\cdot}16$ in unserem speciellen Falle.

Da alle Kraftlinien, die die Schlinge der durch P gehenden Niveaufläche durchbrechen, nach A hin gerichtet sind, so ist die Kraft zwischen A und P negativ; an allen übrigen Punkten von $D\,D'$ ist sie positiv.

In Fig. 41 ist die Kraftcurve gezeichnet, die sich auf die Kraftlinie $D\,D'$ bezieht, wobei letztere zur Abscissenaxe und der Punkt A zum Coordinatenanfangspunkt gewählt ist.

Die Werthe der Kraft K für die einzelnen Punkte sind:

	X	K
	$-\infty$	1·0
	-10	1·1
	-5	1·4
	-4	1·6
	-3	2·1
	-2	3·5
	-1	11·0
A	0	$\pm\infty$
	1	$-9{\cdot}0$
	2	$-1{\cdot}5$
	3	$-0{\cdot}1$
P	3·16	$\mp 0{\cdot}0$
	4	$+0{\cdot}4$
	5	$+0{\cdot}6$
	10	$+0{\cdot}9$
	∞	$+1{\cdot}0$

Es ist also, wenigstens für die Praxis, die Störung welche der Punkt A in dem homogenen Feld erzeugt, auf einen bestimmten Raum beschränkt; in gewissen von der Ladung in A und von C abhängigen Distanzen, vor und hinter A wird das Feld wieder homogen.

Die Fig. 40 gilt für den Fall, dass die Kraftlinien in der Richtung von D nach D' verlaufen und der Punkt A negativ ist; sie würde aber ganz ebenso aussehen, wenn die Kraftlinien in umgekehrter Richtung verliefen und dafür die Ladung in A positiv wäre. Würde aber nur die Richtung der Kraftlinien, oder nur der Sinn der Ladung in A sich ändern, so würde der Punkt P auf die andere Seite von A zu liegen kommen und die ganze Figur als das Spiegelbild der jetzigen in einem zu $D\,D'$ senkrechten Spiegel erscheinen.

Wir wollen schliesslich noch einen speciellen Fall der Störung eines homogenen Feldes ins Auge fassen, nämlich den, dass in dasselbe eine unelektrische, isolirte und leitende Kugel gebracht werde. Eine solche ist natürlich der Induction durch die im Felde herrschende Kraft *C* ausgesetzt und wird daher an einer Seite eine positive, an der anderen eine negative Ladung von gleicher Grösse annehmen. Sei *o* in Fig. 42 der Mittelpunkt dieser Kugel und bezeichne *D D'* die Kraftrichtung des Feldes, so wird, wenn die Potentiale von *D* gegen *D'* abnehmen, die Seite *A* der Kugel sich negativ, *B* positiv laden. Durch diese Ladungen wird das elektrische Feld eine Störung erleiden wie sie in Fig. 42 dargestellt ist. Die Oberfläche der Kugel muss jedenfalls eine Niveaufläche sein und es ergibt sich leicht aus der Symmetrie der Figur, dass ihr Potential gleich ist dem derjenigen Niveaufläche, die im ungestörten Feld durch den Ort des Kugelcentrums *o* geht. Es besteht also die Niveaufläche *V V'* jetzt aus zwei Theilen, deren einer sich als Ebene ins Unendliche erstreckt und deren anderer eben die Kugelfläche ist. Wir haben hier den Fall dass sich eine Niveaufläche längs einer Linie durchschneidet, diese Linie muss daher eine Gleichgewichtslinie sein, d. h. an allen ihren Punkten herrscht die Kraft Null. Die Punkte *c* und *c'* in Fig. 42 sind die Durchschnittspunkte dieser Kreislinie mit der Ebene der Zeichnung. Die der Fläche *V V'* benachbarten Niveauflächen zeigen der Kugel entsprechende Ausbauchungen, die sich in einiger Distanz von derselben wieder merklich verlieren, so dass das Feld wieder ein homogenes wird. Durch diese Ausbauchungen kommen die Niveauflächen bei *A* und *B* näher an einander zu liegen als im ungestörten Theil des Feldes, es ist also hier die Kraft jedenfalls eine grössere, wie sich auch aus der Wirkung der in *A* und *B* angehäuften inducirten Ladungen unmittelbar ergibt. Ist die Kraft im homogenen Theil des Feldes gleich *C*, so wird sie in unmittelbarer Nähe von *A* oder *B* gleich 3 *C*; es liegen demnach hier die Niveauflächen dreimal so dicht an einander.

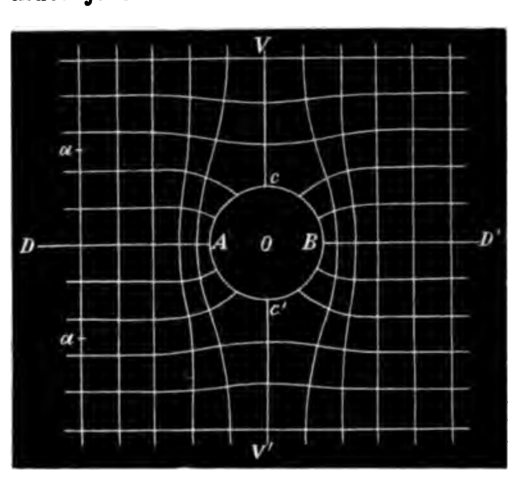


Fig. 42.

Was die Kraftlinien anlangt, so ist zunächst zu bemerken, dass die Richtung der durch o hindurchgehenden keine Aenderung erleiden wird, $D\,D'$ bleibt also eine gerade Linie. Da aber im Inneren der Kugel das Potential überall constant ist, so passiren dort auch keine Kraftlinien, sondern die von der Seite D kommenden endigen zum Theil auf der Kugelfläche, wo sich jetzt eine negative Ladung vorfindet. Andererseits gehen auch von der Seite B respective von deren positiver Ladung jetzt Kraftlinien aus, die gegen D' verlaufen und bald wieder parallele Gerade werden. Die Kraftlinien, welche von D kommend noch auf die Kugel auftreffen, bilden im homogenen Theil des Feldes einen Cylinder, dessen Durchmesser von der Grösse der

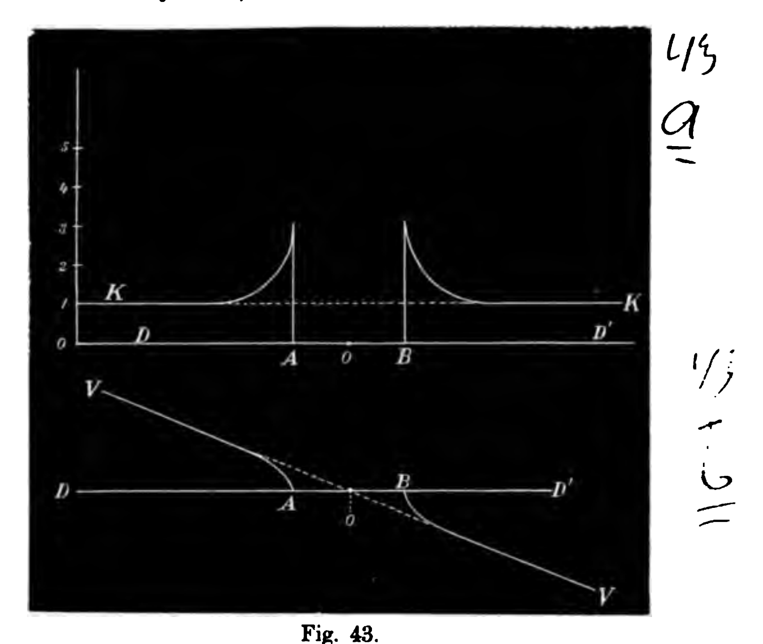


Fig. 43.

Kugel abhängt; bezeichnen wir den Radius der letzteren mit R und den Durchmesser des eben genannten Cylinders mit δ, so ist

$$\delta = 2\,R \cdot \sqrt{3} = 3{\cdot}46 \cdot R.$$

In Fig. 42 ist derselbe mit $a\,a$ bezeichnet; die durch $a\,a$ hindurchgehenden Kraftlinien würden die Kugel demnach eben noch treffen, und zwar in den Punkten $c\,c'$, wo die Kraft gleich Null ist.

In Fig. 43 a stellt die Linie $K\,A\,B\,K$ die Kraftcurve längs $D\,D'$ vor, wenn die Intensität des homogenen Feldes $C = 1$ gesetzt wird. Die Kraft steigt vom Werthe 1 bis zum Werthe 3 in unmittel-

barer Nähe von A, sinkt im Innern der Kugel auf Null, erreicht bei B wieder den Werth 3, um dann allmälig bis 1 abzusinken; sie bleibt aber überall positiv. Die gestrichelte Linie würde den Verlauf im ungestörten Felde darstellen.

In Fig. 43 *b* versinnlicht die Linie $VABV$ den Verlauf der Potentialfunction längs DD', wobei wieder die gestrichelte Linie sich auf das ungestörte Feld bezieht; das Potentialgefälle wird in der Nähe der Kugel ein stärkeres und erreicht in den Punkten A und B dem früheren zu Folge den dreifachen Werth; zwischen A und B ist er natürlich gleich Null.

Die im Vorstehenden gegebenen Beispiele für elektrische Felder liessen sich leicht noch weiter verfolgen, z. B. für den Fall, dass drei gleiche elektrische Massen in gleichen Abständen von einander angeordnet sind. Auch in diesem Fall ist der Mittelpunkt der Figur ein Gleichgewichtspunkt und die Niveaufläche, welche ihn durchsetzt, besteht aus drei Schalen, von denen eine jede eine der drei Massen umhüllt. Alle Niveauflächen von höherem Potential umschliessen nur eine Masse, alle mit niedrigerem aber alle drei Massen gleichzeitig. In sehr grosser Entfernung werden die Niveauflächen wieder Kugelschalen.

Es kann die Anordnung elektrischer Massen, wie wir gesehen haben, auch eine solche sein, dass zwei Theile einer Niveaufläche nicht nur einen Punkt gemeinsam haben, sondern sich in einer Linie schneiden; wenn wir z. B. in Fig. 27 die Punkte P und P' uns durch unendlich lange lineare und elektrisirte Leiter ersetzt denken, die zu einander parallel verlaufen und auf der Ebene der Zeichnung senkrecht stehen, so dass P und P' ihre Projectionen sind, so wird das elektrische Feld, das sie erzeugen, so beschaffen sein, dass Fig. 27 uns angenähert einen Querschnitt desselben senkrecht zur Richtung der geladenen Leiter darstellt. Der Punkt O ist nun die Projection der Gleichgewichts l i n i e, welche entsteht, indem die ausgezeichnete Niveaufläche sich selbst durchschneidet. Die Form der Niveauflächen weicht jedoch in diesem Falle von Fig. 27 ab. Wären nicht zwei, sondern drei solcher unendlich langer Leiter in symmetrischer Anordnung vorhanden, so würden in der Gleichgewichtslinie sich drei Niveauflächen durchschneiden und es sei gleich hier bemerkt, dass diese Durchschneidung immer nach einem bestimmten Gesetze vor sich geht. Schneiden sich nämlich n Niveauflächen in einer Linie, so geschieht dies stets so, dass der Winkel zwischen zwei benachbarten gleich $\frac{\pi}{n}$ ist. Sind also nur zwei Flächen vorhanden, so

schneiden sie sich rechtwinkelig, drei Flächen schneiden sich unter 60° u. s. f. Das ist ein ganz allgemein giltiges Gesetz.

Es liessen sich noch mancherlei hierhergehörige Beispiele anführen, doch werden die gegebenen Andeutungen genügen, um in jedem einzelnen Fall vom Verlaufe der Niveauflächen und Kraftlinien wenigstens im Allgemeinen sich Rechenschaft zu geben.

VII. Capitel.

Fortsetzung. Atmosphärische Elektricität.

§ 16. Werth des Potentials auf geladenen Leitern; Potential einer Kugel.

Wenn wir von der Betrachtung des Potentials, wie es durch punktförmig angeordnete Elektricitätsmengen erzeugt wird, zu dem Falle übergehen, dass die wirksamen Massen sich auf ausgedehnten Leitern vorfinden, so haben wir dabei selbstverständlich nur den Fall im Auge, dass längs des ganzen Leiters sich die Elektricität schon im Gleichgewichte befinde; wir haben bereits früher gefunden, dass in diesem Falle sich die ganze Ladung nur an der äusseren Oberfläche des Körpers aufhalten kann. An jedem Punkte des Raumes, die Oberfläche und das Innere des Körpers — gleichgiltig, ob hohl oder massiv — nicht ausgenommen, wird durch die Ladung ein Potential erzeugt werden, das durch den Ausdruck $\Sigma \frac{m}{r}$ wiedergegeben wird, wo die m alle vorhandenen Elektricitätstheilchen und die r deren Entfernungen von dem betrachteten Punkte bedeuten. Da alle m sich im Gleichgewichte befinden, obwohl ihrer Bewegung in jeder Richtung im Innern des Körpers und längs der Oberfläche kein Hinderniss im Wege steht, so folgt daraus, dass in keiner dieser Richtungen eine Kraft thätig sein kann. Nun ist aber die Kraft nach irgend einer Richtung x proportional $\frac{dV}{dx}$, für alle die angedeuteten Richtungen muss demnach $dV = 0$ sein, d. h. es muss $V = \text{Const.}$ sein. Es ergibt sich somit der ausserordentlich wichtige Satz: Befindet sich auf einem ganz beliebigen Leiter Elektricität in Ruhe, so hat das Potential in allen Punkten desselben (an der Oberfläche und im Innern) ein und denselben Werth. Das gilt auch für etwa vorhandene Hohlräume; denn aus Gründen, die schon früher erörtert wurden, kann an einer inneren Oberfläche sich keine Ladung befinden und

es entfällt somit jede Ursache, die in Bezug auf irgend einen Punkt des Hohlraumes zu einem anderen Potentiale führen würde, als wenn derselbe mit leitender Masse erfüllt wäre.

Im Gleichgewichtszustande wirkt also auf jedes Theilchen der Ladung nur eine Kraft normal auf die Oberfläche. Diese selbst hat überall dasselbe Potential, ist also eine Niveaufläche.

Entfernen wir uns allmälig von der Oberfläche, so wird das Potential continuirlich abnehmen, um in unendlicher Entfernung gleich Null zu werden. Die Form der Niveauflächen und Kraftlinien wird ganz durch die Gestalt des geladenen Körpers bedingt sein, es lässt sich darum über diese im Allgemeinen nichts aussagen, ausser dass die der Oberfläche benachbarten Niveauflächen mit dieser von gleicher Gestalt sein müssen und erst in unendlicher Entfernung sich zu Kugelflächen deformiren; die Kraftlinien verlassen den Körper alle in normaler Richtung — da die Oberfläche eine Niveaufläche ist — und bilden in unendlicher Distanz Radien, die von dem Körper als Mittelpunkt ausgehen.



Fig. 44.

Es könnte scheinen als stünde der eben erwähnte Satz, dass auf ein Theilchen der Oberfläche nur in normaler Richtung eine Kraft wirken kann, damit in Widerspruch, dass die Kraft in irgend einer Richtung der Aenderung des Potentials daselbst proportional sei. Sei P (Fig. 44) ein Punkt der Oberfläche des geladenen Körpers K, n die Normale in diesem Punkte und $N N_1$ eine der Oberfläche sehr nahe Niveaufläche: die Kraft in Richtung der Normale auf die Einheit der Elektricität in P ist gleich $K_n = -\frac{dV}{dn}$. Aber auch in der Richtung Px wird V nicht constant sein, somit $-\frac{dV}{dx} = K_x$ einen bestimmten Werth haben, was dem früher aufgestellten Satze für die Gleichgewichtsbedingung widersprechen würde. Dieser Widerspruch löst sich auf, wenn man bedenkt, dass zu jeder Richtung x eine symmetrisch gelegene x' existirt mit der Kraft $K_{x'}$, deren in die Oberfläche fallende Componente gleich und entgegengesetzt der von K_x herrührenden ist. Es verbleiben somit nur alle in die Normale fallenden Componenten als wirksam übrig, die sich summiren und den bekannten Zug auf die Oberfläche bei P hervorbringen.

Da für einen Körper von bestimmter Grösse und Form bei gegebener Ladung die Vertheilung der Elektricität eine bestimmte ist,

muss unter diesen Umständen auch sein Potential stets ein be-
immtes sein; doch wird es nur bei ganz speciellen Voraussetzungen
›er die Form des Körpers möglich, dasselbe zu berechnen. Für den
ometrisch einfachsten Körper, die Kugel, der zugleich für die Praxis
n grosser Wichtigkeit ist, lässt sich der Werth des Potentials,
›nn Ladung und Radius bekannt sind, unmittelbar angeben. Denn
, das Potential für jeden Punkt den gleichen Werth hat, so genügt
, dasselbe für einen zu kennen, und das ist für den Mittelpunkt
hr leicht. Im Ausdrucke $V = \Sigma \frac{m}{r}$ wird dann r constant und gleich
m Radius der Kugel, R, so dass wir schreiben können

$$V = \frac{1}{R} \Sigma m \text{ oder } V = \frac{M}{R},$$

Σm nichts anderes ist als die Gesammtladung M der Kugel.
ı ist also das Potential einer Kugel der Ladung direct und dem
ıdius umgekehrt proportional. Denken wir uns eine Kugel mit einer
stimmten Ladung versehen und lassen wir dieselbe sich nun aus-
hnen, so wird die Dichte der Elektricität auf derselben mit dem
ıadrate des Radius abnehmen, das Potential aber nur mit der ersten
ɔtenz desselben.

Was das elektrische Feld anlangt, das eine geladene Kugel im
ngebenden Raume erzeugt, so lässt sich dasselbe leicht charakteri-
ren. Die Kraft an irgend einem Punkte ausserhalb der Kugel ist,
ie wir wissen, genau so gross, als wenn die ganze Ladung im
entrum der Kugel vereinigt wäre. Für einen Punkt in der Distanz D
om Centrum haben wir also, auf die Einheit der Elektricität wirkend,
ie Kraft:

$$K = \frac{M}{D^2}.$$

An demselben Punkte herrscht das Potential V, das der Be-
ingung genügen muss:

$$\frac{dV}{dD} = -K = -\frac{M}{D^2}.$$

Daraus ergibt sich:

$$dV = -M \frac{dD}{D^2} \text{ und } V = \frac{M}{D} + C = \frac{M}{D},$$

enn die Constante C muss gleich Null sein, weil in unendlicher
Entfernung das Potential jedenfalls den Werth Null haben muss.

Das Potential ist also an jedem Punkte ausserhalb der Kugel so gross, als wäre die ganze Ladung im Centrum der Kugel vereinigt. Es wird demnach das elektrische Feld ausserhalb der Kugel sich in keiner Weise von dem unterscheiden, welches die in einem Punkte concentrirte Ladung M erzeugen würde, und das wir schon früher betrachtet haben. Innerhalb des ganzen, von der Kugel begrenzten Raumes wird das Potential constant sein und den Werth $\frac{M}{R}$ zeigen.

In Fig. 45 ist der Fall graphisch dargestellt, dass eine Kugel mit der Ladung = 10 und dem Radius = 1 sich ausdehnt, so dass R successive gleich 1, 2, 3 etc. wird. Als Abscissen sind die Entfernungen vom Centrum als Ordinaten die zugehörigen Potentiale aufgetragen. Für $R = 1$ ist das Potentialgefälle dargestellt durch die Linien $a\,b\,V_1$, für $R = 2$ durch $c\,d\,V_1$, für $R = 3$ durch $e\,f\,V_1$ u. s. f.

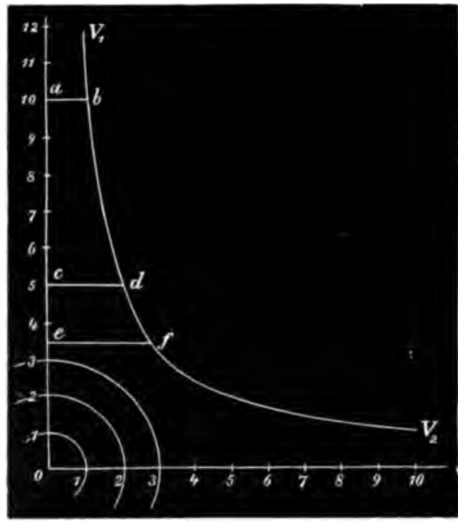


Fig. 45.

Man sieht daraus, dass die in den vorhergehenden Paragraphen besprochenen elektrischen Felder, die für eine punktförmige Anordnung der Elektricität abgeleitet wurden, mit jeder beliebigen Annäherung auch der Wirklichkeit entsprechen, wenn wir uns die elektrischen Massen auf beliebig kleinen Kugeln angeordnet denken; denn die elektrischen Felder eines Punktes und einer Kugel unterscheiden sich nur innerhalb des von der Kugel umschlossenen Raumes. Man sieht, dass im Falle einer Kugel oder irgend eines beliebigen Leiters bei Anwendung endlicher Elektricitätsmengen auch das Potential überall endlich ist.

§ 17. Einfaches Beispiel für die Verwerthung des Potentialbegriffes.

Um zu zeigen, wie ausserordentlich fruchtbar die Anwendung des Potentialbegriffes ist, wollen wir folgende einfache Aufgabe lösen: es seien zwei Kugeln gegeben mit den Radien R und r und geladen

mit den Elektricitätsmengen M und m. In Folge dieser Ladungen werden dieselben die Potentiale V und v besitzen, wobei vorausgesetzt wird, dass sie so weit von einander entfernt sind, dass eine Inductionswirkung von einer auf die andere ausgeschlossen oder vernachlässigt werden kann. Wir denken uns nun die beiden Kugeln durch einen Draht mit einander leitend verbunden, der so dünn angenommen werden soll, dass die auf ihm sich ansammelnde Elektricität gegen die auf den Kugeln verbleibende verschwindet. Es fragt sich nun, welche Quantitäten von Elektricität werden, nach Herstellung dieser Verbindung auf jeder der Kugeln sich vorfinden. Da ist zunächst zu berücksichtigen, dass durch den verbindenden Draht die beiden getrennten Leiter zu einem vereinigt werden, so dass, sobald wieder Gleichgewicht eingetreten ist, das Potential auf beiden Kugeln und längs des Verbindungsdrahtes einen constanten Werth haben muss. Bezeichnen wir diesen mit φ, so bestehen folgende Relationen:

$$V = \frac{M}{R},\ v = \frac{m}{r},\ \varphi = \frac{q}{r} = \frac{Q}{R},$$

wenn wir mit q und Q die nach der Verbindung auf beiden Kugeln sich vorfindenden Mengen bezeichnen. Da an der Gesammtmenge von Elektricität nichts geändert wurde, sondern nur deren Vertheilung so muss auch $M + m = Q + q$ sein. Aus dieser Gleichung in Verbindung mit obigem Werthe von φ ergibt sich aber:

$$q = (M + m)\frac{r}{R+r};\ Q = (M + m)\frac{R}{R+r};\ \varphi = (M + m)\frac{1}{R+r}.$$

Es ist somit auf sehr einfache Weise die Aufgabe ganz allgemein gelöst.

Von besonderem Interesse ist der Fall, wo wir eine geladene Kugel mit einer anderen verbinden, deren Radius unverhältnissmässig gross ist, z. B. mit der Erde, welchen Process wir gewöhnlich das „Ableiten“ des Körpers nennen. In diesem Falle verschwindet r gegen R, und wir haben:

$$\varphi = \frac{M}{R} + \frac{m}{R} = V + \frac{m}{R}.$$

Wenn aber, wie dies ja bei allen unseren Versuchen der Fall ist, die Quantität m auf einer Kugel r ein endliches Potential erzeugt hat, dann können wir den Werth $\frac{m}{R}$ gleich Null setzen und erhalten:

$$\varphi = V,$$

d. h. unsere Kugel nimmt das Potential der Erde an. Wäre letzteres selbst $= 0$ — worüber im nächsten Paragraphen des Näheren gesprochen werden soll — wäre also $M = 0$ oder sehr klein, so wäre auch $\varphi = 0$. Die auf unserer Kugel nach der Ableitung zur Erde noch zurückbleibende Ladung wird nach obiger Formel für q auch gleich Null, da r gegen R verschwindet; die Ladung der Erde dagegen, gleichgiltig ob letztere schon eine besessen hat oder nicht, wächst um den Betrag m, wie sich aus der Formel für Q ergibt.

Bei Betrachtung der obigen Formeln für q, Q und φ wird eine merkwürdige Analogie auffallen zwischen diesen und gewissen Ausdrücken aus der Wärmelehre, wobei die Begriffe Elektricitätsmenge und Wärmemenge einerseits, Potential und Temperatur andererseits als correspondirend auftreten. Diese Ausdrücke beziehen sich auf die Mischung beliebig temperirter Massen und die dabei auftretenden Aenderungen im Wärmegehalte einer jeden derselben. Haben wir zwei Massen m und M mit den specifischen Wärmen s, S und den Temperaturen t und T und mischen dieselben, so dass mit der Umgebung kein Wärmeaustausch stattfinden kann, so wird die Masse von höherer Temperatur so lange Wärme an die andere abgeben, bis ihre Temperatur eine gemeinsame — ϑ — geworden ist, gerade so wie im früheren Falle der Körper von höherem Potential nach Herstellung der Verbindung so lange Elektricität an den anderen abgab, bis das Potential beider denselben Werth hatte. Diese Ausgleichstemperatur ergibt sich unter Berücksichtigung des Umstandes, dass die Gesammtwärme dieselbe geblieben ist, dass also der Wärmeverlust des einen Körpers gleich ist der Wärmezunahme des anderen. Nehmen wir $t < T$ an, so haben wir:

$$m(\vartheta - t)s = M(T - \vartheta)S \text{ oder } \vartheta = (MST + mst)\frac{1}{ms + MS}.$$

Die Wärmemengen P und p, welche die beiden Körper jetzt enthalten, sind:

$$p = (MST + mst)\frac{ms}{ms + MS} \text{ und } P = (MST + mst)\frac{MS}{ms + MS}.$$

Die Ausdrücke MST und mst bedeuten aber nichts anderes als die Wärmemengen W und w, welche die Massen M und m bei den Temperaturen T und t enthielten; die Grössen MS und ms sind das, was wir die Capacitäten von M und m für Wärme nennen — K und k — d. h. diejenigen Wärmemengen, welche zur Erhöhung

der Temperatur von M und m um einen Grad benöthigt werden. Wir können daher die Formeln folgendermassen schreiben:

$$p=(W+w)\frac{k}{K+k};\ P=(W+w)\frac{k}{K+k};\ \vartheta=(W+w)\frac{1}{K+k}.$$

Demnach sind die Formeln ganz identisch mit jenen für q, Q und φ. Auch bei diesen bedeuten die Radien R und r nichts anderes als die Capacitäten der Kugeln für Elektricität, denn aus der Gleichung $V \cdot R = M$ ergibt sich, dass wir für eine Kugel von n-fachem Radius auch die n-fache Elektricitätsmenge brauchen, um ihr Potential um ein Bestimmtes zu erhöhen. Wir brauchen mit dieser Betrachtung übrigens durchaus nicht bei Kugeln stehen zu bleiben, sie gilt ganz allgemein für beliebig geformte Körper. Ein jeder Leiter wird eine gewisse Capacität für Elektricität haben (je nach Grösse und Form), d. h. es wird der Zufuhr einer gewissen Elektricitätsmenge C bedürfen, um sein Potential um die Einheit zu steigern. Für den Körper gilt dann allgemein die Formel $V = \frac{M}{C}$. Haben wir also zwei beliebige Leiter von den Capacitäten C und c und geladen mit den Quantitäten M und m, so sind ihre Potentiale $V = \frac{M}{C}$ und $v = \frac{m}{c}$. Denken wir uns nun dieselben wie früher durch einen leitenden Draht verbunden, so entsteht ein einziger Leiter von der Capacität $C + c$ und mit der Ladung $M + m$. Sein Potential wird sein:

$$\varphi = (M + m)\frac{1}{C + c}.$$

Die Elektricitätsmengen q und Q, welche nun auf beiden Körpern sitzen, erhalten wir durch Multiplication ihres Potentials φ mit den Capacitäten C und c; folglich ist:

$$q = (M + m)\frac{c}{C + c};\ Q = (M + m)\frac{C}{C + c};\ \varphi = (M + m)\frac{1}{C + c}.$$

Die Uebereinstimmung dieser Formeln mit den betreffenden aus der Wärmelehre ist keine zufällige; wir werden noch öfters dem Umstande begegnen, dass elektrische Vorgänge und thermische sich ganz analog darstellen lassen, namentlich wo es sich um Bewegungserscheinungen handelt. Wenn wir z. B. auf einer leitenden Platte zwei Punkte A und B auf constanter Potentialdifferenz erhalten, so ergibt das einen Elektricitätsfluss von A nach B, der ganz analog der Wärmebewegung ist, die eintreten würde, wenn die Punkte A und B auf constanter Temperaturdifferenz erhalten würden.

Was im ersteren Falle Niveauflächen sind, sind im letzteren Flächen gleicher Temperatur. In vielen Fällen lassen sich, wie das zuerst W. Thomson gethan hat, die Formeln der Wärmelehre direct zur Lösung analoger elektrischer Probleme verwenden; doch wäre es sehr übereilt daraus etwa auf eine Identität zwischen Wärme und Elektricität schliessen zu wollen, denn es lassen sich nicht zwei, sondern gar vielerlei Vorgänge denken und angeben, die, obwohl grundverschieden, in ihrer wahrnehmbaren Erscheinung doch den gleichen Gesetzen gehorchen. Aber man wird dessenungeachtet jeder sich darbietenden Analogie mit Interesse folgen, denn vorläufig können wir kaum hoffen, auf einem anderen Wege zu Aufschlüssen über das Wesen der Elektricität zu gelangen.

§ 18. Absoluter Nullpunkt der Elektricität.

Alle Vorgänge auf dem Gebiete der Elektricität werden für uns erst wahrnehmbar durch das Auftreten von Kräften, die selbst die Folge vorhandener Potentialdifferenzen sind; wären alle Körper unserer Umgebung auf demselben Potential, so würden keinerlei elektrische Kräfte zwischen denselben wirken, und wäre dieser Zustand ein andauernder, so würden wir elektrische Phänomene überhaupt nicht kennen. Es wäre also möglich, dass wir selbst und unsere Umgebung, wenn sie auch vollkommen unelektrisch erscheint, ein beliebig hohes Potential besitzen, ohne dass dasselbe uns irgendwie bemerkbar wird. Denn alle unsere elektrischen Apparate mit Hilfe deren wir Potentiale messen, und die noch ausführlicher besprochen werden sollen, messen nicht wirklich die Potentiale, sondern immer nur Potentialdifferenzen, und zwar basirt diese Messung auf der Bestimmung der Kraft, welche durch die vorhandene Potentialdifferenz erzeugt wird. Wenn wir also sagen wir messen das Potential irgend eines Körpers, so ist das nur eine abgekürzte Redeweise, indem wir eigentlich sagen sollten, wir messen die Potentialdifferenz zwischen diesem Körper und einem beliebig zu wählenden Vergleichskörper. Als letzteren nimmt man allgemein die Erde an, und das ist vollkommen gerechtfertigt: von einem Vergleichskörper, mit dessen Potential man die anderen zu messenden Körper eben vergleichen will, muss man voraussetzen können, dass sein Potential constant bleibt. Nun ist die Capacität der Erde in Folge ihrer Grösse gegen die unserer Versuchskörper so enorm, dass alle Elektricitätsmengen, die wir auf künstlichem Wege erzeugen und in dieselbe ableiten, nicht im Stande sein können, ihr Potential irgend merklich zu verändern; aber selbst wenn

dasselbe sich durch äussere, etwa kosmische Einflüsse im Laufe der Zeit oder auch plötzlich verändern würde, so wäre das doch auf unsere Messungen ohne Einfluss; denn es würde gleichzeitig das Potential aller Körper die mit der Erde in Verbindung stehen oder sich doch nahe an ihrer Oberfläche befinden, in gleicher Weise modificirt werden, und ein Körper, der vorher ein um einen gewissen Betrag höheres Potential besass als die Erde, wird diesen Ueberschuss in ganz gleichem Maasse auch jetzt noch besitzen. Alle vorhandenen Potentialdifferenzen und damit auch alle vorhandenen elektrischen Kräfte und Erscheinungen würden ungeändert bestehen bleiben.

Was wir also kurz das Potential eines Körpers nennen, das ist eigentlich die Potentialdifferenz zwischen ihm und der Erde; indem wir das Potential der Ende gleich Null setzen und uns so einen, allerdings ganz beliebig gewählten Nullpunkt für unsere Potentialscala fixiren, können wir nun Potentiale im positiven und negativen Sinne zählen, je nachdem dieselben höher oder tiefer sind als das der Erde. Da positive Elektricität stets von Orten höheren Potentials nach jenen mit tieferem strömt, so wird, wenn wir einen Körper leitend mit der Erde verbinden, positive Elektricität von ihm zur Erde strömen oder umgekehrt, je nachdem sein Potential positiv oder negativ war.

Zur Ausführung von Potentialmessungen benöthigen wir noch eine Einheit; auch diese wollen wir uns vorläufig willkürlich und nur mit Rücksicht auf den praktischen Gebrauch wählen, d. h. dieselbe muss leicht mit genügender Genauigkeit herstellbar sein und muss eine Grösse haben, die den praktischen Bedürfnissen entspricht. Das leistet z. B. das Daniell'sche Element (Zn in $ZnSO_4$ und Cu in $CuSO_4$), dessen Potentialdifferenz an beiden Polen wir zur Einheit wählen und mit D bezeichnen wollen. Diese Differenz ist wie bekannt von den Dimensionen des Elementes ganz unabhängig und bleibt constant, so lange die Zusammensetzung der Flüssigkeiten constant erhalten wird. Verbinden wir den negativen (Zink-) Pol mit der Erde, so hat der andere Pol und jeder mit ihm verbundene Leiter von endlichen Dimensionen, das Potentiale $+D$, denn es wird bei Verbindung dieses Poles mit irgend einem isolirten Leiter, im Elemente so lange Elektricität nachentwickelt, bis beide Pole wieder die Potentialdifferenz D haben. Bei umgekehrter Schaltung des Elementes würde der Leiter das Potential $-D$ annehmen. Wollen wir also z. B. eine Kugel auf das Potential $+10D$ bringen, d. h. auf ein um $10D$ höheres Potential als das der Erde, so stellen wir sie isolirt

auf und berühren sie mit dem freien Kupfer-Pol einer aus 10 hintereinander geschalteten Daniell'schen Elementen bestehenden Batterie, deren Zink-Pol zur Erde abgeleitet ist.

Es wird auch hier die Aehnlichkeit mit analogen Beziehungen auf dem Gebiete der Wärme auffallen. Auch von Wärmevorgängen würden wir keine Kenntniss erlangen, wenn nicht Temperaturdifferenzen uns dazu führen würden oder vielmehr ohne Temperaturdifferenzen würden gar keine Wärmephänomene auftreten. Für Temperaturen haben wir uns gleichfalls einen willkürlichen Nullpunkt gewählt, den Gefrierpunkt des Wassers, und zählen Temperaturen als positiv oder negativ, je nachdem sie höher oder tiefer liegen als dieser, was wir aus den jeweilig eintretenden Wärmebewegungen beurtheilen. Wir sagen, ein Körper hat eine positive Temperatur, wenn er, mit einem Körper von der Temperatur Null zusammengebracht an diesen Wärme abgibt; ganz analog sagen wir, ein Körper hat ein positives Potential wenn von ihm nach seiner Verbindung mit der Erde positive Elektricität auf diese überströmt. Da wir zur Messung von Temperaturdifferenzen einer Einheit bedürfen, so wurde auch hier eine willkürliche Wahl getroffen, unter möglichster Berücksichtigung der praktischen Interessen. Die Differenz der Temperaturen des gefrierenden und siedenden Wassers bei normalem Druck erweist sich als constant und leicht herstellbar; doch ist diese Differenz als Einheit zu gross, man hat daher den hundertsten Theil derselben zur Einheit (1 Grad) genommen.

Nun ist es bekannt, dass wir ausser diesem willkürlichen Nullpunkt für Wärme, auch noch einen sogenannten absoluten Nullpunkt unterscheiden; wir können uns nämlich denken, dass wir einen Körper beliebig erwärmen, d. h. ihm Wärme zuführen, nicht aber dass wir ihm solche in beliebiger Quantität entziehen. Denn bei letzterem Processe müssten wir schliesslich, wenn derselbe überhaupt praktisch ausführbar wäre, an einen Punkt gelangen, wo der Körper gar keine Wärme mehr enthält, wo die Bewegung seiner Moleküle und Atome Null geworden, der Körper also starr ist. Die Temperatur, bei welcher dies erreicht würde, nennen wir den absoluten Nullpunkt der Wärme; derselbe liegt, wie sich aus dem Verhalten der Gase gegen Erwärmung und Abkühlung angenähert berechnen lässt, bei — 273° C. Nach der absoluten Scala würden wir also alle Temperaturen positiv zählen, denn negative gibt es nicht und es wäre z. B. die absolute Temperatur des gefrierenden Wassers gleich 273° C. und die des unter normalem Druck siedenden Wassers gleich 373° C.

Es tritt nun die Frage an uns heran, ob nicht ähnliche Verhältnisse auch für die Elektricität respective für die Potentialscala bestehen.

Wir haben das Potential an irgend einem Orte im Raume durch den Ausdruck $\Sigma \frac{m}{r}$ definirt, wo m sich auf alle vorhandenen elektrischen Massen und r auf deren Entfernungen von dem betreffenden Orte bezieht. Da dieser Ausdruck nur gleich Null wird für $m = 0$ oder für $r = \infty$, so müssen wir sagen, das Potential ist nur an solchen Orten gleich Null, welche unendlich weit von allen elektrischen Massen entfernt sind; diese Orte befinden sich dann am Nullpunkt des Potentials; und diesen Nullpunkt wollen wir im Gegensatze zu dem willkürlich gewählten (Potential der Erde) den absoluten nennen.

Dabei ist aber Folgendes zu bemerken:

Ein jeder elektrische Körper enthält ausser seiner Ladung auch noch den normalen Elektricitätsgehalt, doch ist dieser nach aussen vollkommen unwirksam; eine Kraft auf Elektricitätsmengen ausserhalb wird nur von der elektrischen Ladung, d. i. von einem Ueberschuss oder von einem Mangel in Bezug auf den normalen Elektricitätsgehalt, ausgeübt. Es folgt daraus, dass ein normal elektrischer Körper, d. i. in gewöhnlichem Sinne ein unelektrischer, im umgebenden Raum auch kein Potential in dem bisher gebrauchten Sinne erzeugen kann. Wären somit im ganzen Weltraum alle Körper im neutral elektrischen Zustande, so wäre überall das Potential absolut Null. Wenn wir also nicht die Anwesenheit elektrischer Massen im interplanetaren Weltraum voraussetzen wollen — wozu keinerlei Veranlassung vorliegt, so müssen wir sagen, dass an jedem Punkt desselben, der ausserordentlich weit von allen Gestirnen entfernt ist, das absolute Potential Null herrscht. Dieser Werth würde auch noch bestehen bleiben, wenn wir uns an den betreffenden Ort einen normalelektrischen Körper hin versetzt denken, da dessen normaler Elektricitätsgehalt eben kein Potential erzeugt

Es verlässt uns aber hier die Analogie mit dem Begriffe Temperatur: der absolute Nullpunkt der Temperatur ist wirklich ein absoluter, d. h. es ist eine tiefere Temperatur überhaupt nicht denkbar. Das Gleiche gilt nicht mehr vom absoluten Nullpunkt des Potentials. An einem Ort im Weltraume, der unendlich weit von allen elektrischen Massen entfernt ist, können wir uns einen Körper hin versetzt denken mit der Ladung $+ m$; diese Ladung erzeugt dann dort ein Potential $+ v$ und dieses ist das absolute Potential des Körpers. War die

Ladung aber nicht — *m*, sondern — *m*, so besitzt der Körper dann das absolute Potential — *v*. Es zählen also die Potentiale vom absoluten Nullpunkt aus im positiven und negativen Sinne gerade so, wie von jedem willkürlichen aus. Es folgt daraus, dass wir von einem absoluten Nullpunkte des Potentials nicht in dem Sinne sprechen können, wie von einem absoluten Nullpunkt der Temperatur. Das was wir hier den absoluten Nullpunkt des Potentials genannt haben, ist mit anderen Worten das Potential des Weltraumes.

§ 19. Atmosphärische Elektricität: Potential der Erde.

Es wäre selbstverständlich von grösstem Interesse, wenn wir darüber eine Entscheidung treffen könnten, ob das Potential der Erde (also unser willkürlicher Nullpunkt) dasselbe ist, wie das des Weltraumes oder nicht, und wenn wir in letzterem Falle die Grösse der Potentialdifferenz zwischen Erde und Weltraum anzugeben im Stande wären. Hierbei sind natürlich unter Weltraum nur jene Partien desselben verstanden, die als unendlich weit von allen elektrischen Massen entfernt zu betrachten sind.

Nach dem Vorstehenden ist schon ersichtlich, dass das Potential der Erde nur dann von Null (absolut) verschieden sein kann, wenn die Erde eine elektrische Ladung besitzt: es fragt sich also zunächst, ob irgend welche Phänomene bekannt sind, die zur Annahme einer solchen Ladung nöthigen.

Diesbezüglich muss bemerkt werden, dass ein **Beweis** für die Existenz einer solchen Ladung gegenwärtig wohl nicht erbracht werden kann, dass aber die Annahme derselben doch einen sehr hohen Grad von Wahrscheinlichkeit besitzt. Zunächst ist es die Erscheinung der sogenannten Erdströme, die uns darauf führt. Es ist eine bekannte Thatsache, dass zwei Punkte der Erde, wenn sie nur einige hundert Meter auseinander liegen, fast nie das gleiche Potential besitzen, und diese Thatsache manifestirt sich durch elektrische Ströme in der Drahtleitung, die beide Punkte miteinander verbindet. So findet man derartige Ströme — die sogenannten Erdströme — fast beständig in grösseren Telegraphenlinien, und es kommt nicht selten vor, dass durch dieselben sogar der telegraphische Verkehr beeinflusst wird. Dass diese Potentialdifferenzen sich nicht gänzlich durch die Erde selbst ausgleichen, hat seinen Grund in dem schlechten Leitungsvermögen des Erdreiches im Vergleich mit dem Materiale der Tele-

graphendrähte, so dass durch letztere immer noch ein merklicher Theil der Elektricität fliesst.

Ueber die Entstehungsursache dieser Potentialdifferenzen kann man zweierlei Meinung haben: Bisher hat man ziemlich allgemein angenommen, dass durch irgend welche meteorologische Processe an einzelnen Stellen der Erdoberfläche Elektricität erzeugt wurde, wie dies z. B. bei Gewittern der Fall ist; solche Stellen müssten dann momentan ein anderes Potential haben, als die übrigen Partien der Erdoberfläche und dadurch zur Bildung der Erdströme Veranlassung geben. Gegen diese Ansicht muss jedoch bemerkt werden, dass die Störungen in Telegraphenlinien, wie sie bei Gewittern auftreten, von einer ganz anderen Grössenordnung sind als die gewöhnlichen Erdströme, und dass letztere mit empfindlichen Instrumenten schon auf Strecken von 10—20 Metern nachweisbar sind, und zwar nicht nur unter besonderen atmosphärischen Verhältnissen, sondern das ganze Jahr hindurch auch bei vollkommen heiterem und normalem Wetter. Namentlich letzterer Umstand macht es wahrscheinlich, dass man es hier nicht so sehr mit jeweiligen Entwicklungen von Elektricität zu thun hat, als vielmehr mit Verschiebungen einer schon vorhandenen Ladung an der Oberfläche der Erde. In der That, wenn eine solche Ladung existirt, so muss jede Masse, die sich ausserhalb der Erde, in deren elektrischem Felde, bewegt, durch Induction eine Verschiebung der Ladung bewirken. Alle Wolken würden demnach durch ihre Bewegung derartige Potentialdifferenzen an der Erdoberfläche erzeugen, und es ist so zu begreifen, dass die Erdströme ein von dem Auftreten der Gewitter ganz unabhängiges Phänomen bilden, das sich immer ziemlich gleich bleibt.

Wenn die vorstehend besprochenen Verhältnisse die Existenz einer elektrischen Ladung der Erde schon wahrscheinlich machen, so wird diese fast zur Gewissheit, wenn man die Erscheinung der normalen, sogenannten Luftelektricität näher untersucht; da im Folgenden nicht mehr Gelegenheit sein wird, auf dieses interessante Phänomen zurückzukommen, so soll es hier an passender Stelle in seinen Hauptzügen behandelt werden.

Seit den denkwürdigen Untersuchungen über Gewitterelektricität, die Franklin in der Mitte des vorigen Jahrhunderts angestellt hat, wendete sich die Aufmerksamkeit zahlreicher Forscher auf die elektrischen Vorgänge in unserer Atmosphäre. Das erste Resultat davon war die Erkenntniss, dass die Luft nicht nur während eines Gewitters, sondern jederzeit sich in einem anderen elektrischen Zustande befindet

als die Erde, oder, um die jetzt übliche Bezeichnungsweise zu gebrauchen, dass die Luft jederzeit ein anderes Potential besitzt, wie die Erde. Zur Ergründung der Ursache dieser Potentialdifferenz wurden unzählige Untersuchungen unternommen, aber erst in neuester Zeit gelang es, einige Klarheit in die Sache zu bringen, seit man anfing, die Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität bei ruhigem normalem Wetter von den als Störungen aufzufassenden Gewittererscheinungen zu trennen und abgesondert zu studiren.

Im Folgenden sollen nur die Gesetze der normalen Luftelektricität behandelt werden. Was zunächst die Methoden der Beobachtung anlangt, so wäre zu bemerken, dass es sich vor Allem darum handelt, die Potentialdifferenz zwischen einem Punkte in der Luft und der Erde zu bestimmen. Dazu kann man sich eines der üblichen Elektrometer bedienen oder auch nur eines Goldblattelektroskops, dessen äussere, metallische Hülle leitend mit der Erde verbunden ist, während der Knopf desselben durch einen Metalldraht mit jenem Punkte der Luft in Verbindung gesetzt wird, dessen Potential gemessen werden soll. Damit aber der Draht — und mit diesem die Goldblättchen — wirklich das Potential des betreffenden Punktes annehmen, muss man sich noch eines Kunstgriffes bedienen, der mit Leichtigkeit zum Ziele führt. Man befestigt am Ende des Drahtes eine Flamme oder Lunte oder sonst irgend einen genügend leitenden Körper von dem sich beständig kleine Partikelchen lostrennen. Die Wirkungsweise eines solchen „Aufsammlers“ ergibt sich leicht; wenn zwischen dem Ende des Drahtes und dem Punkte, wo er sich befindet, eine Potentialdifferenz herrscht, so wird sich auf dem Drahte eine gewisse positive oder negative Ladung ansammeln, die die Tendenz hat, sich mit der Umgebung auszugleichen. Hat z. B. der betreffende Punkt ein höheres Potential als der isolirt hinaufgebrachte Draht, so wird in letzterem durch Induction positive Elektricität vom oberen Ende in das Elektroskop strömen und eine negative Ladung am oberen Ende zurückbleiben. Befindet sich aber dort eine Flamme, von der beständig kleine leitende Theilchen (die Flammengase, Rauch etc.) entweichen, so wird mit letzteren auch die inducirte negative Ladung sich vom Drahte entfernen und so derselbe in kürzester Zeit gegen seine Umgebung unelektrisch, d. h. auf demselben Potential sein. Dann sind aber auch die Blättchen des Elektroskops auf dem Potential des untersuchten Punktes der Luft und aus ihrer Divergenz kann auf die Grösse des letzteren geschlossen werden. Es muss zu diesem Zwecke das Elektroskop mit einer Thei-

lung versehen sein, deren Werth ein- für allemal durch Calibrirung mit einer galvanischen Batterie von bekannter elektromotorischer Kraft ermittelt ist.

Wo aus irgend welchen Gründen die Anwendung einer Flamme ausgeschlossen ist, da kann man sich auch eines Ausflussgefässes bedienen, aus dem ein feiner Strahl Wassers oder irgend eine andere leitende Substanz sich ergiesst; dort wo der Strahl sich in Tropfen auflöst, dort findet der Ausgleich der Potentiale zwischen Wasser und Umgebung statt, für diesen Ort misst man also das Potential.

Zu erwähnen wäre noch, dass der eben besprochene Ausgleich immer eine gewisse Zeit erfordert, und dass er am schnellsten nämlich in circa $^1/_4$—$^1/_2$ Minute bei Flammen vor sich geht, viel langsamer dagegen bei Wasserstrahlgefässen, wo oft eine Zeit von mehreren Minuten erforderlich ist, je nach der Menge des ausfliessenden Wassers.

Wenn man, mit derartigen Apparaten ausgerüstet daran geht das Potential der Luft (natürlich im Freien) bei normalem Wetter zu untersuchen, so muss man sein Augenmerk vor Allem darauf richten, dass die Luft an dem Beobachtungsorte nicht Verunreinigungen, wie Staub, Rauch u. dgl. mit sich führt. Denn selbst bei schwachem Winde wird durch die Reibung des Staubes an der Erdoberfläche an Bäumen etc. Elektricität in beträchtlicher Menge erzeugt, wovon der Staub die negative Hälfte mit sich führt und so zu Störungen Veranlassung gibt. Man kann daher innerhalb einer Stadt gar nicht beobachten (ausser wenn Schnee liegt), sondern man muss sich an möglichst staubfreie Orte, wie etwa ausgedehnte Wiesen begeben. Wenn man offenbare Fehlerquellen wie die eben besprochenen vermeidet, so findet man bei normalem Wetter, d. h. wenn auch keine meteorologischen Störungen vorhanden sind, die Luft stets positiv elektrisch oder ihr Potential höher als das der Erde.

Es fragt sich nun, ob die Luft an dem untersuchten Punkte selbst elektrisch ist, oder nur so scheint in Folge von Induction, die von irgendwelchen elektrischen Massen auf diesen Punkt ausgeübt wird, denn was wir messen, ist nur das Potential des betreffenden Punktes und das kann auch ein sehr hohes sein, ohne dass sich dort oder überhaupt irgendwo in der Luft selbst Elektricität befindet; das Potential könnte z. B. auch durch Induction von Seite einer auf der Erdoberfläche befindlichen Ladung hervorgerufen sein. Die Beantwortung dieser Frage kann nicht absolut, sondern nur mit einem gewissen Grade der Annäherung gegeben werden, und zwar

auf folgende Weise. Um einen Punkt vor Induction zu schützen, genügt es, wie wir ja schon gesehen haben, denselben allseitig mit einer zur Erde abgeleiteten Metallhülle zu umgeben. Keine elektrische Masse ausserhalb dieser Hülle übt dann eine Wirkung auf einen Punkt innerhalb derselben aus. Wenn wir dieses Princip auf unseren Versuch anwenden und die Flamme oder den Wasserstrahl mit einem zur Erde abgeleiteten Drahtnetz allseitig umgeben, so werden wir das Innere, wenn die Maschen des Netzes nicht zu weit sind, vor der Induction von aussen geschützt haben, ohne die freie Circulation der Luft wesentlich zu stören. Versuche nach dieser Weise angestellt, lehrten, dass mit dem schützenden Drahtnetz sich für das Potential des Punktes Werthe ergeben, die höchstens $\frac{1}{300}$ von dem ohne Drahtnetz sind. Es beruht also der weitaus grösste Theil der Wirkung auf Induction, doch lässt sich eine Elektrisirung der Luft selbst darum nicht absolut negiren, weil wir an die Empfindlichkeit unserer Elektrometer gebunden sind und daher nicht behaupten können, dass die Wirkung im Inneren des Drahtnetzes wirklich absolut Null sei; es könnte also diese Induction auch von einer an und für sich äusserst schwachen positiven Ladung der ganzen Luftmasse herkommen.

Wie dem auch sei, es steht fest, dass das Potential in der Luft bei normalem Wetter stets positiv ist gegen das der Erde; aber es lassen sich darüber noch genauere Angaben machen. Beobachtet man auf freiem Felde bei möglichst weitem Horizonte, so findet man, dass das Luftpotential mit der Höhe des untersuchten Punktes über dem Erdboden proportional wächst, das Potentialgefälle in der Richtung der Verticalen ist also ein lineares. Untersucht man aber verschiedene Punkte derselben Horizontalebene, so findet man sie auf gleichem Potential. Das elektrische Feld zunächst der Erde ist demnach als ein homogenes zu betrachten, dessen Niveauflächen parallel der Erdoberfläche verlaufen; die Kraftlinien folgen natürlich den Erdradien. Es ist zur Constatirung dieser Thatsache nicht erforderlich, besonders grosse Höhendifferenzen bei der Beobachtung anzuwenden, denn das Potentialgefälle ist ein so bedeutendes, dass man selbst mit wenig empfindlichen Apparaten schon auf Strecken von 1—2 m sehr deutliche Unterschiede in den Angaben erhält. Man kann die Versuche mit einem ganz gewöhnlichen Elektroskop ausführen, dessen Knopf durch einen feinen Draht mit einer Kerzenflamme in Verbindung steht, die man — isolirt an einem Stocke

befestigt — über den Kopf mehr oder minder stark erhebt, während man das Elektroskop in der Hand hält. Bei genaueren Versuchen ist es allerdings rathsam, die Flamme separat an einem in der Erde befestigten Stocke anzubringen, damit der Beobachter nicht durch zu grosse Nähe den Verlauf der Niveauflächen am Beobachtungspunkte stört.

Während über einer Ebene die Niveauflächen alle horizontal verlaufen, hört dieses auf, sobald man sich einer beträchtlichen Erhebung des Erdbodens nähert, wie z. B. einem Haus, einem Baum oder einem isolirten Hügel. Die Niveauflächen machen dann die betreffende Ausbuchtung der Erdoberfläche mit, wie dies durch Fig. 46 versinnlicht wird. Bedeutet E den Erdboden und A ein isolirt stehendes Haus, so weichen die Niveauflächen $a\,a'$, $b\,b'$ etc. in der entsprechenden Weise von der Horizontalen ab, um erst in einer gewissen Höhe $e\,e'$ über dem Object wieder die normale Form

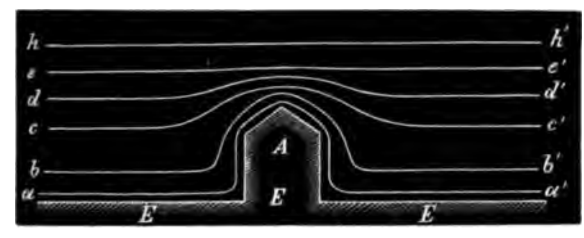


Fig. 46.

anzunehmen. Die Oberfläche der Erde und des Hauses ist nichts anderes als die erste Niveaufläche des elektrischen Feldes an diesem Orte.

Selbstverständlich erleiden die Kraftlinien auch eine Richtungsänderung, indem sie stets senkrecht auf die Niveauflächen stehen; in der Nähe der verticalen Seitenwand des Hauses verlaufen dieselben in horizontaler Richtung und man findet dementsprechend hier ein starkes Potentialgefälle in der Richtung senkrecht auf die Wand, dagegen gar keines in verticaler Richtung.

Das Potentialgefälle in verticaler Richtung ist an ein und demselben Orte der Erdoberfläche keine constante Grösse; es ändert sich in ganz regelmässiger Weise sowohl während eines Tages, als auch während eines Jahres, so dass man eine tägliche und eine jährliche Periode unterscheidet. Der Grund dieser Variation kann kaum zweifelhaft sein, denn es zeigt sich, dass dieselbe genau gleichen Schritt hält mit der Variation des Wasserdampfgehaltes der Luft. Immer, wenn letzterer ein Maximum ist, ist das Potential-

gefälle ein Minimum und umgekehrt. Man findet z. B. in Bezug auf die jährliche Periode das Maximum stets im Jänner und den anliegenden Monaten, wenn also die Luft die geringste absolute Menge Wasserdampf enthält, das Minimum dagegen im Juni und Juli. Ganz ebenso verhält es sich mit der täglichen Periode, hier liegt z. B. das namentlich im Sommer stark ausgeprägte Minimum zwischen 1—3 Uhr, also zu einer Zeit, wo die Luft die grösste Menge Wasser enthält; das Maximum dagegen fällt in die Morgenstunden. Die gleichen Verhältnisse ergeben sich an allen Punkten der Erdoberfläche, überall geht die Zunahme des Wasserdampfes in der Luft mit einer Abnahme des Potentialgefälles Hand in Hand.

Nach dem Vorstehenden müsste man erwarten, bei Abwesenheit jeglichen Wasserdampfes in der Atmosphäre auf einen höchsten und constanten Werth des Potentialgefälles zu kommen; diesen Zustand kann man zwar nicht vollkommen, aber doch angenähert erreichen, wenn man an klaren Wintertagen bei möglichst niedriger Temperatur beobachtet. Es zeigt sich, dass unter diesen Umständen bei Temperaturen von — 8 bis — 12°, dem äusserst geringen Wassergehalt der Luft entsprechend, das Potentialgefälle über einer Ebene in der That den grössten Werth unter allen Beobachtungen aufweist. Es beträgt in diesem Falle die Aenderung des Potentials 600 Daniell per Meter in der Richtung der Verticalen, so dass man letzteren Werth als den normalen ansehen kann, d. h. als jenen, der sich bei völliger Abwesenheit des Wasserdampfes ergeben würde [1]. Bezeichnen wir also die Richtung der Normalen auf die Erdoberfläche mit n, so hat man für diesen Normalwerth

$$\frac{d\,V}{d\,n} = 600\ \frac{\text{Daniell}}{\text{Meter}}.$$

Der Einfluss des Wasserdampfes in der Luft ist ein so bedeutender, dass dieser Werth in den Sommermonaten auch bei heiterem Wetter sehr viel tiefer liegt; man findet für $\frac{d\,V}{d\,n}$ dann Werthe die zwischen 60—90 liegen [2]. Natürlich werden diese Grenzen an besonders trockenen

[1]) Nach neueren Messungen scheint dieser Werth jedoch noch bedeutend grösser zu sein, circa 1300; dementsprechend würden sich auch die im Nachfolgenden aus dieser Zahl abgeleiteten Werthe erhöhen.

[2]) Nach späteren ausführlicheren Beobachtungen hat sich folgende Abhängigkeit zwischen Potentialgefälle und Dunstdruck ergeben:

oder besonders feuchten Tagen nicht strenge eingehalten, aber sie geben eine ungefähre Vorstellung von den Grössen, um die es sich hier handelt. Man wird aus diesen Zahlen auch entnehmen, dass es gar keiner besonders empfindlichen Apparate bedarf, um diese Phänomene messend zu verfolgen.

Alle die vorstehend besprochenen Erscheinungen erklären sich ohne weiteres aus der Annahme, dass die Erde mit einer elektrischen, und zwar negativen Ladung versehen, die Luft dagegen an und für sich ganz unelektrisch sei; es müsste unter dieser Annahme das Potential sich in der Richtung eines Erdradius nach eben dem Gesetze ändern, das für das Potentialgefälle ausserhalb einer geladenen Kugel früher schon besprochen wurde, d. h. es müsste das Potential an jedem Punkte umgekehrt proportional dem Abstande vom Erdmittelpunkte sein. Wäre die Erde positiv geladen, so würden höher in der Luft gelegene Punkte gegen die Erde ein negatives Potential besitzen, da aber das Umgekehrte der Fall ist, so muss die Erdladung eine negative sein. Man findet aber das Potentialgefälle an der Erdoberfläche nicht dem obigen Gesetze entsprechend, es erweist sich als ein lineares; das ist aber bei Betrachtung der näheren Umstände ganz natürlich, denn so lange die Niveauflächen als horizontale Ebenen zu betrachten sind, müssen auch die Kraftlinien merklich parallel sein, d. h. das elektrische Feld ist ein homogenes und das Potentialgefälle somit ein merklich lineares. Solange man also nicht in so enormen Höhen über dem Erdboden beobachtet, dass man die Krümmung der Erdoberfläche schon in Rücksicht ziehen muss, so lange man also in Höhen bleibt, die gegen die Grösse des Erdradius noch zu vernachlässigen sind, insolange muss auch das Potentialgefälle sich als linear ergeben. Es ist in Fig. 32 das Stück der Potentialcurve $V_1 V_2$, welches im Vergleich mit der Grösse des

Dunstdruck in mm	$\frac{dV}{dn}$
2·3	325
4·4	197
5·5	166
6·8	116
8·4	106
9·5	97
10·4	84
11·4	74
12·5	68

Kugelradius noch sehr nahe an die Oberfläche zu liegen kommt, als gerade Linie zu betrachten.

Was nun den experimentell nachgewiesenen Einfluss des Wasserdampfgehaltes der Luft auf die Grösse des Potentialgefälles anlangt, also die tägliche und jährliche Periode, so erklärt sich auch dieser aus der negativen Ladung der Erde. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass der von der Erde aufsteigende Wasserdampf einen Theil der negativen Elektricität mit sich führt; einerseits ist es in unzweideutiger Weise gelungen, durch Laboratoriumsversuche im Kleinen den Nachweis zu liefern, dass der aus einer elektrisirten Flüssigkeit aufsteigende Wasserdampf elektrisch sei, andererseits ist daran a priori nicht zu zweifeln, da man eine Flüssigkeitsmasse ja auch isolirt vollkommen verdampfen lassen kann. Auch haben in neuerer Zeit von Mascart angestellte sorgfältige Versuche gezeigt, dass eine elektrisirte Flüssigkeitsmasse schneller verdampft als eine unelektrische unter sonst gleichen Umständen; das lässt sich aber nur begreifen, wenn zwischen der Flüssigkeitsmasse und den verdampfenden Theilchen eine Abstossung stattfindet, d. h. wenn letztere gleichfalls elektrisch sind.

Wenn also der von der Erde aufsteigende Wasserdampf gleichfalls negativ elektrisch ist, so befinden sich nicht nur unterhalb, sondern auch oberhalb des Beobachtungsortes negative Ladungen, und es muss somit die Potentialdifferenz geringer werden: daher findet man stets eine Coincidenz zwischen dem Maximum des Potentialgefälles und dem Minimum des Wasserdampfes und umgekehrt. Man wird danach auch begreifen, dass bei einer besonders heftigen, localen Anhäufung von Wasserdampf das Potentialgefälle auf Null sinken, ja sogar das Vorzeichen wechseln kann, eine Erscheinung, die bei jedem plötzlichen Regenguss oder Gewitter eintritt. Auch findet man bei plötzlichen Regengüssen das isolirt aufgefangene Regenwasser stets negativ elektrisch, was mit obiger Anschauung gleichfalls übereinstimmt. — Dass der Verlauf der Niveauflächen entlang den Unregelmässigkeiten der Erdoberfläche, wie isolirten Bäumen, Häusern, Felswänden etc. ganz genau der gemachten Voraussetzung entspricht, braucht nicht weiter ausgeführt zu werden.

Die Annahme, dass die Erscheinungen der atmosphärischen Elektricität durch Induction von Seite einer Ladung der Erde hervorgerufen werden, ist nicht neu: sie wurde schon im Jahre 1803 von Erman auf Grund seiner Experimente gemacht. Diese haben das wichtige Resultat ergeben, dass man aus der Luft positive oder

negative Elektricität in das Elektroskop ableiten kann, je nachdem man einen damit verbundenen Conductor nahe am Boden ableitet und dann isolirt hebt oder umgekehrt, ihn in grösserer Höhe ableitet und dann isolirt senkt. Da der Conductor im abgeleiteten Zustande das Potential der Erde hat, so heisst das nichts anderes, als er wird einmal von einem tieferen auf ein höheres Potential gebracht, das zweite Mal aber von einem höheren auf ein tieferes. Bewegte Erman den Conductor aber in der Nähe einer verticalen Wand auf und nieder, so ergab sich keine Aenderung des elektrischen Zustandes, dagegen wohl bei horizontaler Bewegung gegen die Wand hin oder von ihr weg. Diese Phänomene hat Erman mit Recht einer Induction von Seiten der Erde zugeschrieben und die selbstständige Elektrisirung der Luft vollkommen negirt.

Wohl zum grössten Theil der damals herrschenden Unkenntniss auf dem Gebiete der Elektricitätslehre ist es zuzuschreiben, wenn Erman's Ansicht nach zahlreichen Anfeindungen ganz in Vergessenheit gerieth: erst gegen die Mitte des Jahrhunderts wurde dieselbe Idee wieder aufgegriffen, von dem Franzosen Peltier weiter entwickelt und präciser ausgesprochen. Es ist diese Theorie daher auch unter dem Namen der Peltier'schen bekannt.

So einfach diese Theorie auch ist, so hat sie doch die älteren Ansichten über atmosphärische Elektricität bisher nicht zu verdrängen vermocht. Namentlich ist es die zu Anfang des Jahrhunderts von Volta aufgestellte sogenannte „Verdampfungstheorie", welche bis auf die neueste Zeit, freilich in den verschiedensten Formen, Anerkennung gefunden hat. Dieser Theorie zufolge soll durch den Process des Verdampfens selbst Elektricität erzeugt werden, so zwar, dass das verdampfende Wasser positiv geladen aufsteigt, der Erdboden dagegen mit negativer Ladung zurückbleibt. Diese Richtung muss man dem Processe geben, da das Potential erfahrungsgemäss mit der Höhe zunimmt. Man könnte aber auch nicht das Verdampfen, sondern etwa die Reibung des Wasserdampfes an der Erdoberfläche als die Quelle der Elektricität betrachten, wie dies auch mehrfach geschehen ist, oder die Reibung der Luft an Erde und Wasser etc. Immer aber muss man zur Erklärung der höheren Potentiale in grösseren Höhen die Erde als negativ und die Luft oder ihre Bestandtheile als positiv voraussetzen. Und gerade hier ist der Punkt, wo sich eine definitive Entscheidung zwischen den älteren und der hier vertretenen Ansicht treffen lässt.

Es gilt nämlich, wie wir später sehen werden, ganz allgemein die Gleichung:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} = -4 \pi \rho$$

wo V das Potential an irgend einem Orte und ρ die Raumdichte der Elektricität ebendaselbst bedeutet, d. h. die in der Volumseinheit des Raumes enthaltene Elektricitätsmenge.

Wenden wir diese Gleichung auf die Erde und ihre Umgebung an und lassen wir die z-Richtung mit der Normalen auf die Erdoberfläche zusammenfallen. Solange wir mit unseren Beobachtungen nicht in grössere Höhen gehen als solche, die gegen den Erdradius zu vernachlässigen sind, werden wir die Niveauflächen als Ebenen betrachten müssen, es wird also sowohl in der Richtung der x als der y der Werth von V ein constanter sein; man hat somit:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = \frac{d^2 V}{d y^2} = 0 \text{ und } \frac{d^2 V}{d z^2} = \frac{d^2 V}{d n^2} = -4 \pi \rho$$

wenn wir die z-Richtung wie bisher mit n bezeichnen.

Nach der Volta'schen und allen davon abgeleiteten Theorien wäre ρ — die Elektricitätsmenge in der Volumseinheit der Atmosphäre — eine positive Grösse; es müsste daher $\frac{d^2 V}{d n^2}$ eine wesentlich negative Grösse sein. Der zweite Differentialquotient drückt aber nichts anderes aus als die Aenderung des Potentialgefälles mit der Höhe, es müsste somit nach dieser Theorie das Potentialgefälle mit der Höhe abnehmen.

Der hier vertretenen Ansicht zufolge wäre aber ρ, solange kein Wasserdampf in der Luft ist gleich Null, bei Anwesenheit von Wasserdampf aber, und das ist der wirkliche Fall, eine negative Grösse, der Werth von $\frac{d^2 V}{d n^2}$ somit eine positive; es müsste also das Potentialgefälle mit der Höhe wachsen. Hier ist somit der Punkt, wo sich eine experimentelle Entscheidung mit Sicherheit treffen lässt.

Zur Ausführung dieser Entscheidung wäre nichts weiter erforderlich als eine Messung des Potentialgefälles an der Erdoberfläche und gleichzeitig in grösserer Höhe; letztere wird aber doch so beträchtlich gewählt werden müssen, dass man schon einen merklichen Theil des Wasserdampfes der Atmosphäre unter sich hat. Da man bei normalem Wetter, wie aus meteorologischen Messungen bekannt ist, in einer Höhe von 2000 m schon die Hälfte des ganzen Wasserdampfes unter sich hat, und da die Abnahme der Dichte desselben an der Erdoberfläche eine sehr rasche ist, so werden schon einige

hundert Meter Erhebung genügen, um die Frage zu lösen. Es geht natürlich nicht an, eine derartige Beobachtung auf der Spitze eines Berges zu machen, da durch die Anwesenheit des letzteren die Niveauflächen in ihrem Verlaufe gestört werden, es muss vielmehr dieselbe mit Hilfe eines Luftballons ausgeführt werden, was in Bezug auf die Messung keinerlei Schwierigkeiten bietet. Da man in solchem Falle von dem Gebrauche einer Flamme selbstverständlich absehen muss, so muss man sich des Wassercollectors bedienen; man lässt zwei solcher Collectoren von der Gondel des Ballons mit isolirten Leitungen etwa 20 m hinab, doch so, dass sie sich in einer bekannten Niveaudifferenz, etwa von 2 m, befinden. Das Ende der einen Leitung wird mit dem Knopfe eines calibrirten Elektroskops verbunden, das der anderen mit der metallischen Hülle desselben und so die Potentialdifferenz auf der verticalen Strecke, um die die beiden Collectoren auseinanderliegen, gemessen. Eine derartige Messung hat auf das Bestimmteste die Unrichtigkeit der Volta'schen und die Richtigkeit der hier vertretenen Theorie ergeben. Die Messungen im Ballon ergaben bei einer durchschnittlichen Höhe desselben von 500 m über der Ebene $\frac{dV}{dn} = 193$ während gleichzeitig an der Erdoberfläche der Werth $\frac{dV}{dn} = 92$ beobachtet wurde. Er ist somit nachgewiesen, dass das Potentialgefälle mit der Höhe wächst und daraus folgt, dass in der Luft negative elektrische Ladungen vorhanden sein müssen, wie es unsere Theorie im Gegensatze zu den übrigen erfordert. Die starke Differenz zwischen den beiden Beobachtungen erklärt sich daraus, dass dieselbe an einem Junitage vorgenommen wurde, also zu einer Zeit, wo der Wasserdampfgehalt der Atmosphäre ein sehr bedeutender ist.

Aber nicht nur in qualitativer, auch in quantitativer Beziehung steht dieses Resultat mit der Theorie in gutem Einklang; man kann nämlich den Werth des Potentialgefälles für jede Höhe berechnen, wenn das Gesetz bekannt ist, nachdem der Wasserdampfgehalt der Atmosphäre mit der Höhe abnimmt. Aus zahlreichen meteorologischen Beobachtungen theils auf Luftfahrten in grossen Höhen, theils auf Gebirgen wurde von Hann die Formel abgeleitet:

$$p_n = p_0 (1 - 0{\cdot}246 \cdot n + 0{\cdot}0157 \cdot n^2).$$

Hier bedeutet p_n die Spannkraft des Wasserdampfes in der Höhe n und p_0 dieselbe an der Erdoberfläche; die Einheit, nach welcher die Höhe n gemessen ist, ist gleich 1000 m. Solange es sich,

wie in dem vorliegenden Falle nur um Höhen bis circa 500 m handelt, kann das Glied mit n^2 auch vernachlässigt werden, so dass wir

$$p_n = p_o\,(1—0{\cdot}246 \cdot n)$$

setzen können. Da auf der geringen Strecke von 500 m sich die Temperatur nur wenig ändert, so kann die Menge Wasserdampfes in der Volumseinheit oben und unten den respectiven Spannkräften proportional gesetzt werden. Die Grösse ρ in unserer früher angeführten Formel:

$$\frac{d^2 V}{d n^2} = -\,4\,\pi\,\rho$$

ist aber der Quantität des in der Volumseinheit enthaltenen Wasserdampfes proportional und somit auch den Grössen p. Für eine beliebige Höhe n haben wir somit die Relation:

$$\left(\frac{d^2 V}{d n^2}\right)_n = K\,p_n$$

wo K irgend eine Constante bedeutet und $p_n = p_o\,(1—0{\cdot}246 \cdot n)$ zu setzen ist. Unter Berücksichtigung letzterer Beziehung übergeht obige Formel in:

$$\left(\frac{d^2 V}{d n^2}\right)_n = K\,p_o\,(1 - 0{\cdot}246 \cdot n) = K\,p_o\,(1 - \alpha \cdot n)$$

wenn wir statt des Zahlenwerthes die Grösse α einführen. Durch Integration dieser Gleichung erhalten wir den gewünschten Ausdruck für das Potentialgefälle in der beliebigen Höhe n:

$$\left(\frac{d V}{d n}\right)_n = K \cdot p_o \cdot n \left(1 - \frac{\alpha}{2}\,n\right) + C.$$

Zur Bestimmung der Constante C dient der gleichzeitig an der Erdoberfläche gemessene Werth von $\frac{d V}{d n}$ — bei obiger Beobachtung gleich 92; bezeichnen wir diesen allgemein mit B, so haben wir $\frac{d V}{d n} = B$ für $n = 0$ und somit die Constante C obiger Gleichung gleich diesem Werthe B. Es ist also allgemein:

$$\left(\frac{d V}{d n}\right)_n = K\,p_o\,n \left(1 - \frac{\alpha}{2}\,n\right) + B.$$

Die Grösse n können wir auch durch die Grössen p_n und p_o ausdrücken nach der Relation: $p_n = p_o\,(1 - \alpha\,n)$, so dass

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_n = -K\frac{p_n - p_0}{\alpha}\left(1 + \frac{p_n - p_0}{2\,p_0}\right) + B$$

wird. Um auch die Constante K zu bestimmen, sei bemerkt, dass für eine solche Höhe, wo der Wasserdampfgehalt der Luft bereits Null geworden ist, das Potentialgefälle jenen Maximalwerth annehmen muss, den man an klaren Wintertagen bei möglichster Abwesenheit von Wasser in der Atmosphäre beobachtet, und als dessen Werth wir die Zahl $600\,\frac{D}{m}$ mit grosser Annäherung gefunden haben. Wird in unserer Formel also $p_n = 0$, so nimmt das Potentialgefälle $\frac{dV}{dn}$ diesen constanten Werth, den wir mit A bezeichnen wollen, an.

Man hat somit:

$$A = K\frac{p_0}{\alpha}\cdot\frac{1}{2} + B \text{ und daraus } K = \frac{2\,\alpha\,(A - B)}{p_0}.$$

Die allgemeine Formel wird also schliesslich:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_n = -2\,(A - B)\,\frac{p_n - p_0}{p_0}\left(1 + \frac{p_n - p_0}{2\,p_0}\right) + B$$

oder wenn man statt der Dampfspannungen die Werthe n und α einführt:

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_n = 2\,\alpha\,(A - B)\left(1 - \frac{\alpha\,n}{2}\right) n + B$$

wobei zu bemerken ist, dass die Einheit von n gleich 1000 m angenommen wurde, und α den früher schon angeführten Werth 0·246 hat.

Berechnet man nach einer dieser Formeln die Werthe von $\frac{dV}{dn}$ für verschiedene Höhen, so findet man die folgenden Zahlen:

Höhe in Metern	$\frac{dV}{dn}$
0	92
500	209
1000	313
2000	473

Diese Zahlen gelten jedoch nur für einen solchen Zustand der Atmosphäre, wie er dem Beobachtungstage entsprach, und der durch den Werth von $\frac{dV}{dn}$ an der Erdoberfläche charakterisirt ist. Die

Beobachtung im Luftballon ergab bei einer Höhe von circa 500 m $\frac{dV}{dn} = 193$. also eine sehr genügende Uebereinstimmung mit der Rechnung, namentlich wenn man bedenkt, dass letzterer die Annahme eines ganz normalen Zustandes der Wasserdampf-Atmosphäre zu Grunde liegt: letztere Bedingung dürfte an dem fraglichen Tage sehr nahe erfüllt gewesen sein, da derselbe in der Mitte einer Reihe vollkommen schöner und klarer Tage lag. Jedenfalls ist durch diesen Versuch erwiesen, dass die ältere Volta'sche Theorie und alle späteren, die sich auf diese stützen, unhaltbar sind, da sonst der Werth von $\frac{dV}{dn}$ hätte mit der Höhe abnehmen und zwischen 92 und 0 liegen müssen. Denn da nach den bisher üblichen Theorien durch die Verdampfung oder Reibung an der Erdoberfläche letztere negativ elektrisch, die Luft aber positiv werden soll, so müsste an der Grenze der Atmosphäre und an jedem Punkte ausserhalb derselben das Potential gleich Null sein, in der Atmosphäre aber das Potentialgefälle von der Erdoberfläche gegen aussen stets abnehmen; dem widerspricht aber der Versuch auf das Entschiedenste.

Aus dem bisher Mitgetheilten können wir demnach folgende Schlüsse ziehen: die Erscheinungen der sogenannten Luftelektricität — insoweit es sich nur um das normale Verhalten handelt — haben ihre Ursache nicht in einer Elektrisirung der Luft selbst oder deren Bestandtheile, sondern sie sind die Folge einer Induction, die auf die betreffenden Punkte in der Luft ausgeübt wird; die Ladung, welche diese Induction bewirkt, sitzt auf der Erdoberfläche und verlässt dieselbe nur theilweise mit dem aufsteigenden Wasserdampf. Dadurch geschieht es, dass auch in der Atmosphäre selbst sich elektrische Massen befinden, dieselben sind aber gleichnamig elektrisirt wie die Erde und haben den Effect, die Erscheinungen der Luftelektricität nicht etwa hervorzubringen, sondern im Gegentheil zu vermindern; bei völliger Abwesenheit dieser elektrischen Massen in der Luft würde das normale Potentialgefälle in derselben seinen grössten Werth haben.

Es wurde gelegentlich schon erwähnt, dass plötzliche Anhäufungen von Wasserdampf an einem Orte in der Luft das Potential dort herabdrücken müssen, in Folge der Mengen negativer Elektricität, die der Wasserdampf mit sich führt; es kann so zu einer sehr bedeutenden Störung des elektrischen Feldes der Erde kommen, so zwar, dass das Potentialgefälle in normaler Richtung sogar das

Vorzeichen wechseln kann, eine Erscheinung, die beim Vorüberziehen tiefer, massiger Wolken nicht selten zu beobachten ist. Wo sich starke locale Potentialdifferenzen ausbilden, dort kann es auch zu Entladungen der Elektricität kommen, wie wir sie bei Gewittern wahrnehmen. Die schwachen büschelartigen Entladungen, die man öfters als St. Elmsfeuer zu beobachten Gelegenheit hat, werden sich stets dort am ersten zeigen, wo das Potentialgefälle das stärkste ist, also wo die Niveauflächen am dichtesten aneinander liegen; das ist aber immer über Thürmen, Stangen, Spitzen u. dgl. der Fall, wie sich ja von selbst versteht. Auch die starken elektrischen Entladungen in Form von Blitzen werden im Allgemeinen diesem Gesetze gehorchen, doch ist hier zu bemerken, dass die enormen Potentialdifferenzen, die zur Erzeugung so langer Funken nothwendig sind, ihren Grund nicht allein in der Anhäufung elektrischer Massen an einem Orte haben; wenn zwei ganz gleiche Wolkenmassen in einer Höhendifferenz von 1000 m über einander sich befinden, so haben sie, ganz abgesehen von ihren elektrischen Ladungen, lediglich in Folge ihrer verschiedenen Lage im elektrischen Felde der Erde eine ganz kolossale Potentialdifferenz. Denn da das Potentialgefälle in der Verticalen mehrere hundert Daniell per Meter beträgt, so kann einer solchen Lage zweier Wolken gegen einander leicht eine Potentialdifferenz von einer halben Million Daniell entsprechen. Und diese durch die gegenseitige Lage im elektrischen Felde bedingten Potentialdifferenzen sind es, welche in den Erscheinungen der Gewitter zum Ausdrucke kommen.

Es ist daher die bekannte Thatsache leicht verständlich, dass Blitze meist zwischen Wolkenmassen überschlagen, die sich vertical über einander befinden, oder zwischen Wolken und der Erde, kurz in der Richtung der Kraftlinien des elektrischen Feldes der Erde.

Wir wollen nun untersuchen, welche Schlüsse sich aus den bisher gewonnenen Resultaten mit Rücksicht auf die ursprünglich gestellte Frage nach dem Potential der Erde ziehen lassen.

Es kann im Allgemeinen dieses Potential kein constantes sein; denn wenn beständig ein fluctuirender Theil der Erdladung sich mit dem Wasserdampfe in der Atmosphäre befindet und so in concentrischen Schichten um die Erde gelagert ist, so wird das Potential der Erde in dem Maasse schwanken müssen, als sich die Radien dieser Schichten ändern. Bedenkt man aber, dass stets nur ein Bruchtheil der ganzen Ladung sich in der Atmosphäre befindet, und dass der Wasserdampf zum weitaus grössten Theil sich innerhalb der Entfernung von 2 bis 3 Km von der Erdoberfläche befindet, so wird man diese Distanz

gegen den Erdradius — circa 6400 Km — vernachlässigen können. Man kann demnach das Potential der Erde praktisch als constant ansehen, d. h. bei normalem meteorologischen Zustande der Atmosphäre; ausgeschlossen sind dabei plötzliche locale Störungen, die ebenso plötzliche und locale Störungen des Potentials hervorrufen können.

Wenn wir also nur den normalen Zustand in's Auge fassen, so können wir zunächst aus der Grösse des Potentialgefälles an der Erdoberfläche einen Schluss auf die Dichte der dort angehäuften Elektricität thun. Wie wir freilich erst später sehen werden, gilt für einen jeden statisch geladenen Körper die Relation:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$$

wo μ die Dichte der Elektricität an irgend einem Punkte seiner Oberfläche und $\frac{dV}{dn}$ das dort in der Richtung der Normalen nach aussen herrschende Potentialgefälle bedeutet. Für die Erde haben wir aber den Werth $\frac{dV}{dn}$ an der Oberfläche bestimmt; er ist gleich 600 Daniell pro Meter, wenn gar kein Wasserdampf sich in der Luft befindet, also die ganze Ladung über die Erdoberfläche ausgebreitet ist. Danach erhalten wir μ negativ, d. h. die Erde ist mit negativer Elektricität geladen und ihre Dichte wäre gleich 50 in den hier gewählten Einheiten. (Gemessen nach den später zu besprechenden absoluten elektrostatischen Einheiten wäre $\mu = -0{\cdot}0016$.) Um von dieser Dichte eine Vorstellung zu gewinnen, sei erwähnt, dass dieselbe Dichte auf einer Kugel von 3 cm Durchmesser herrschen würde, wenn sie bis zum Potential von 10 Daniell geladen wird.

Wenn diese Dichte auch nicht gross ist, so ergibt sich daraus doch eine ungeheure Menge für die Gesammtladung der Erde, und man ist versucht zu glauben, dass in Folge davon auf alle Körper an der Erdoberfläche eine bemerkbare Abstossungskraft ausgeübt werden müsste. Dem ist aber keineswegs so, denn es ist auch die Entfernung der elektrischen Massen von dem abgestossenen Objecte eine sehr grosse. Man kann die Kraft berechnen, die auf den Quadrat-Centimeter der Erdoberfläche normal nach aussen drückt, denn es ist diese Kraft K allgemein

$$K = 2\pi\mu^2.$$

Drücken wir in dieser Formel μ nach absoluten Einheiten aus und rechnen das Resultat auf unser gewöhnliches Kraftmaass, das Gewicht eines Gramm, um, so erhalten wir

$$K = 0\cdot000000016 = 16\cdot 10^{-9} \text{ Grammgewicht.}$$

Diese Kraft ist aber so gering, dass sie kaum durch irgendwelche Hilfsmittel nachweisbar sein dürfte.

Um aus den bisherigen Daten schliesslich das Potential der Erde abzuleiten, genügt folgende Ueberlegung. Bezeichnen wir die Gesammtladung der Erde mit M, ihren Radius mit R, so ist ihr Potential:

$$V = \frac{M}{R}.$$

An einem Punkte, der um die Grösse h von der Erdoberfläche entfernt ist, ist das Potential um den Betrag φ grösser, so dass man hat:

$$V + \varphi = \frac{M}{R + h} \text{ oder } \frac{M}{R} + \varphi = \frac{M}{R + h}.$$

Man erhält so:

$$M = -\frac{R\varphi(R + h)}{h} \text{ und } V = -\frac{\varphi}{h}(R + h).$$

Wählen wir $h = 1$ m, so ist $\varphi = 600$ D.; da $R = 6\cdot 4 \cdot 10^6$ m, so erhalten wir schliesslich als Potential der Erde:

$$V = -3\cdot 8 \cdot 10^9 \text{ Daniell,}$$

d. h. so gross ist die Potentialdifferenz zwischen der Erde und einem Punkte unendlich weit im Weltraume.

Es drängt sich schliesslich die Frage auf, woher denn diese negative Ladung der Erde stammen könnte? Da wäre zunächst das Folgende zu bemerken. Nach der Franklin'schen Theorie befindet sich ein Körper im neutral- oder unelektrischen Zustande, wenn sein Elektricitätsgehalt ein derartiger ist, dass er unter dem Einflusse der vorhandenen Kräfte sich im Gleichgewichte befindet. Diese Kräfte, die auf die Elektricität wirken, sind einerseits die Anziehung durch die ponderablen Massentheilchen des Körpers und andererseits die Abstossung der elektrischen Theilchen unter einander. Nun ist aber ein solcher Gleichgewichtszustand offenbar abhängig von der Configuration des Körpers, denn sind dessen Theilchen sehr weit aus einander, so werden sie mehr Elektricität aufzunehmen im Stande sein als bei dichterer Lagerung. Es ist aber mehr als wahrscheinlich,

dass die ponderablen Massen in früheren Zeiten sich in einem ungleich feiner vertheilten Zustande befunden haben, als wir gegenwärtig einen kennen, und wenn sie damals sich mit ihrer Umgebung in ein elektrisches Gleichgewicht gesetzt haben, d. h. wenn sie damals unelektrisch waren, so müssen sie bei ihrer späteren Contraction Elektricität frei gegeben und so zur Bildung eines Ueberschusses von Elektricität Veranlassung gegeben haben. Da wir, wenigstens bisher, durch keine physikalische Veränderung in der Constitution der Massen Elektricität zu erzeugen im Stande sind, so müssen wir annehmen, dass die von uns supponirten Aggregatänderungen der Materie auch von einer ganz anderen Grössenordnung gewesen sein müssen als die, die wir gegenwärtig zu beobachten Gelegenheit haben.

Da die elektrische Ladung eines Körpers einen gewissen Arbeitsvorrath repräsentirt, den wir z. B. dadurch in Wärme umsetzen können, dass wir die Ladung durch einen Leiter abströmen lassen, wobei letzterer in ganz bestimmter Weise erwärmt wird, und da in unserem Falle diese Arbeit nur durch die Contraction der Materie geleistet sein kann, so ist es naheliegend zu untersuchen, ob letzterer Arbeitsvorrath denn überhaupt hinreichend ist zur Anhäufung einer so bedeutenden elektrischen Ladung auf so hohem Potential. Die Frage lässt sich sehr leicht entscheiden. Der Arbeitsvorrath A, den ein Körper enthält, wenn er mit der Menge M zum Potential V geladen ist, wird, wie wir später sehen werden, allgemein ausgedrückt durch

$$A = \frac{1}{2} M V.$$

Wenn wir diese Formel auf die Erde und ihre oben berechnete elektrische Ladung anwenden, so finden wir für A einen Werth, der, in Calorien ausgedrückt, gleich ist $1 \cdot 7 \cdot 10^{18}$. Diese Arbeit war also zur Ausbildung der vorhandenen Ladung der Erde erforderlich. Würden wir diese ganze Wärmemenge nun der Erde wieder zurückgeben, so würde ihre Temperatur dadurch um einen Betrag ϑ steigen von der Grösse:

$$\vartheta = 0{\cdot}24 \cdot 10^{-9} \text{ Grad Celsius.}$$

Dabei ist die Dichte der Erde gleich 5 und ihre specifische Wärme gleich 1 gesetzt. Um diesen minimalen Betrag wäre also die Temperatur der Erde höher, wenn bei ihrer Constituirung keine elektrische Ladung entwickelt worden wäre. Es ist dieser Arbeitswerth ein so geringer, dass er nur eben hinreichen würde, eine 1 cm dicke

Schichte der Erdoberfläche um etwa 2 cm zu heben. Man ersieht daraus also dass von der Bildungsarbeit der Erde nur ein ganz verschwindend kleiner Theil in Form von elektrischer Energie aufgespeichert ist.

Die eben angestellten Betrachtungen werden offenbar auch für andere Himmelskörper gelten in erster Linie für die Sonne.

Es fragt sich, inwieweit ein etwa vorhandenes sehr hohes negatives Potential der Sonne unsere Messungen des elektrischen Feldes der Erde beeinflussen könne. Wenn wir die Grösse $\frac{dV}{dn}$ an der Erdoberfläche bestimmen, während die Sonne im Zenith steht, so summirt sich zu dem von der Erde herrührenden Werthe auch der der Sonne; da jedoch $\frac{dV}{dn}$ mit der Entfernung von der Kugel so abnimmt wie die Kraft, also mit dem Quadrate der Entfernung, so können wir bei der grossen Distanz zwischen Erde und Sonne kaum einen Einfluss der letzteren erwarten. In der That müsste dieser bei Sonnenauf- und Untergang gleich Null sein und zu Mittag und Mitternacht sich in entgegengesetztem Sinne äussern. Wenn er also auch existirt, so muss er jedenfalls so gering sein, dass er von den täglichen Schwankungen überdeckt wird. Damit ist aber keineswegs ausgeschlossen, dass nicht in der Nähe der Sonne sehr bedeutende elektrische Kräfte thätig sein können, und es wäre denkbar, dass manche bisher unaufgeklärte Störungen in astronomischen Vorgängen auf solche Kräfte zurückzuführen wären. Vielleicht auch dass die bisher unaufgeklärten Bewegungen des Mercur, also des der Sonne zunächst liegenden Planeten, hierin ihren Grund haben.

Nach allem Vorstehenden werden wir es als äusserst wahrscheinlich ansehen können, dass ein negativ elektrischer Körper ein solcher ist, welcher Elektricität im Ueberschuss enthält. Ein mit Glaselektricität geladener Körper würde demnach einen Mangel, ein mit Harzelektricität geladener einen Ueberschuss enthalten; die jetzt übliche Bezeichnung, wonach wir ersteren positiv, letzteren negativ nennen, und die natürlich ganz willkürlich gewählt ist, wäre also nicht zutreffend.

Alle anderweitigen physikalischen Erscheinungen, aus denen man bisher, wenn auch nur mit einiger Wahrscheinlichkeit auf das Vorzeichen der wirklich existirenden Elektricitätsart schliessen konnte, weisen in dieser Beziehung gleichfalls auf die negative hin; so das Hall'sche Phänomen, die sogenannten Artunterschiede der Elektricität etc.

VIII. Capitel.

Energie elektrischer Ladungen.

§ 20. Energie zweier elektrischer Massen.

Wenn ein elektrisches Theilchen sich in der Nähe anderer Elektricitätsmengen befindet, so repräsentirt dasselbe, lediglich in Folge seiner Lage einen gewissen Arbeitswerth, der frei wird, sobald sich dasselbe, den herrschenden Abstossungskräften folgend, in unendliche Entfernung von allen elektrischen Massen begibt. Seien m und m' in Fig. 47 zwei solche elektrische Massen in den Punkten A und B, in der Distanz r von einander, und es werde m' von B nach C um das unendlich kleine Stück ds verschoben; dabei wird eine unendlich kleine Arbeit geleistet die wir leicht ausdrücken können. Die Intensität der Kraft zwischen m und m' ist gleich $\frac{m\,m'}{r^2}$, die Richtung derselben ist gegeben durch r, die Arbeit dA wird somit ausgedrückt durch

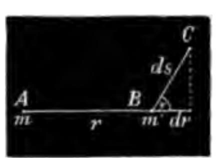


Fig. 47.

$$dA = \frac{m\,m'}{r^2}\,ds \cdot \cos\varphi,\ \text{oder, da } \cos\varphi = \frac{dr}{ds} \text{ ist, hat man}$$

$$dA = \frac{m\,m'}{r^2}\,dr = -\,dw \quad \text{wo } w = \frac{m\,m'}{r} \text{ ist.}$$

Diese Grösse w bezeichnen wir als die Energie des Systems m, m': und es ist, wie man sieht, bei einer Aenderung der Configuration der Verlust an Energie gleich der gewonnenen Arbeit, oder umgekehrt der Gewinn an Energie gleich der geleisteten Arbeit. Bezeichnen wir das Potential welches m im Punkte B erzeugt mit V, und jenes von m' im Punkte A mit V', so folgt auch

$$w = m \cdot V' = m'\,V.$$

Es ist also diese Energie w nichts anderes als die Arbeit, welche von den elektrischen Kräften geleistet wird, sobald sich die Massen m und m' in unendliche Entfernung von einander begeben; ein Resultat, das übrigens schon aus der Definition des Potentials hervorgeht.

§ 21. Energie zweier geladener Conductoren.

Sowie zwei einzelne Massen in Folge ihrer Lage zu einander eine bestimmte Energie besitzen, so gilt dies auch für zwei oder mehrere geladene Conductoren; den Werth dieser Energie werden wir

finden, wenn wir jedes Theilchen der einen Ladung mit einem jeden der anderen zu einem Paar combiniren, den Ausdruck w bilden und schliesslich $\Sigma\Sigma w = W$ nehmen.

Bezeichnen wir die einzelnen Theilchen der Ladung auf A (Fig. 48) mit m, m' .... und die auf B mit q, q' ...., ferner die Distanzen zwischen m und q, q', q'' ... mit r, r' ...., die zwischen m' und q, q', q'' ... mit r_1, r_1', r_1'' ...., und bilden wir den Ausdruck Σw zunächst für die Combinationen zwischen m einerseits und q, q' ... andererseits, so ergibt sich:

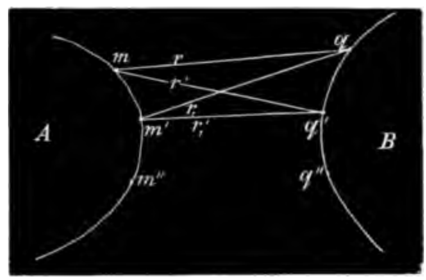


Fig. 48.

$$\Sigma w = \frac{m\,q}{r} + \frac{m\,q'}{r'} + \ldots =$$

$$= m\left(\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \ldots\right) = m\,V$$

wenn man mit V das Potential bezeichnet, das die ganze Ladung von B im Punkte m erzeugt.

Gleicherweise erhalten wir für das Theilchen m':

$$\Sigma w' = m'\left(\frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r_1'} + \ldots\right) = m'\,V'$$

wo V' das Potential von B im Punkte m' ist, das im Allgemeinen natürlich von V verschieden sein wird.

Man erhält somit die Gesammtenergie:

$$W = \Sigma\Sigma w = \Sigma m\,V.$$

Bei einer unendlich kleinen Verschiebung der Conductoren gegen einander würde eine Arbeit $d\,A$ geleistet werden, die nach dem vorigen Paragraphen gleich $-\,d\,W$ sein müsste; man hat also:

$$d\,A = -\,d\,W \text{ oder } A = -\int d\,W.$$

Wenn wir demnach die Conductoren auf endlichen Wegstrecken gegen einander so verschieben, dass in der Anfangsstellung die Energie des Systems $= W_1$, in der Endstellung aber $= W_2$ ist, so wird bei dieser Verschiebung eine Arbeit geleistet:

$$A = -\int_{W_1}^{W_2} d\,W = W_1 - W_2.$$

Es ist also hier wieder der Gewinn an Arbeit gleich dem Verluste an Energie und umgekehrt.

Werden die beiden Conductoren unendlich weit von einander entfernt, so ist $W_2 = 0$ und somit die geleistete Arbeit $A = W_1$, d. h. es ist der ganze Energievorrath des Systems verzehrt.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass elektrische Kräfte immer so wirken, dass sie die Energie des Systems, dem sie angehören, auf einen möglichst kleinen Werth herabzudrücken streben: damit steht es im Zusammenhange, wenn frei bewegliche elektrische Massen von gleichem Vorzeichen sich möglichst weit von einander entfernen, solche von entgegengesetztem Vorzeichen aber sich möglichst nähern.

Nach dem Principe der virtuellen Bewegungen ist ein System dann im Gleichgewichte, wenn bei einer virtuellen, d. h. unendlich kleinen und mit den Bedingungen des Systems verträglichen Bewegung seiner Theile die Summe der geleisteten Arbeiten gleich Null ist. Diese Summe dA ist aber gleich $-dW$, es muss also auch $dW = 0$ sein, d. h. für den Gleichgewichtszustand muss die Energie W ein Maximum oder Minimum sein. Da die Kräfte immer so wirken, dass sie W auf einen möglichst kleinen Werth zu bringen streben, so muss das Gleichgewicht für $W =$ Minimum ein stabiles sein, für $W =$ Maximum dagegen ein labiles.

Hat man z. B. zwei fixe Conductoren A und B und einen dritten C, der sich nur längs der Geraden AB bewegen kann, und sind alle drei gleichnamig elektrisirt, und zwar so dass die Ladungen von A und B unter einander gleich und sehr gross sind gegen die von C, so gibt es für C eine Gleichgewichtslage im Halbirungspunkte von AB. In diesem Punkte ist das von A und B herrührende Potential ein Minimum und ebenso die Energie des Systems, es ist aber, wie früher schon gezeigt wurde, diese Gleichgewichtslage eine stabile.

Ist der Körper C dagegen nur in einer Ebene beweglich, die AB halbirt und darauf senkrecht steht, dann ist in diesem Halbirungspunkte wieder eine Gleichgewichtslage für C. Unter allen Configurationen, die jetzt das System annehmen kann, findet sich kein Minimum der Energie, denn diese wird Null, wenn C sich unendlich weit entfernt, wohl aber findet sich ein Maximum eben für den Fall, dass sich C im Halbirungspunkte von AB befindet. Wie leicht einzusehen ist, ist diese Gleichgewichtslage aber eine labile; denn bei der geringsten Verrückung des Körpers C aus derselben entfernt sich dieser ins Unendliche.

§ 22. Energie eines geladenen Conductors.

Von besonders praktischer Bedeutung ist der Fall, wo es sich um die Energie oder den Arbeitswerth der elektrischen Ladung eines einzelnen Conductors handelt. Wir können dieselbe ganz in der bisherigen Weise ermitteln, indem wir die einzelnen Theilchen m, m', m'' ... der Ladung unter Berücksichtigung ihrer respectiven Entfernungen r, r', r'' ... paarweise combiniren. Wenn wir dies zuerst für das Theilchen m thun, so erhalten wir

$$w = m\left(\frac{m'}{r'} + \frac{m''}{r''} + \ldots\right) = m \cdot V$$

wo V das Potential bedeutet, das die Gesammtladung im Punkte m erzeugt. Da wir es mit einem Conductor zu thun haben, so ist dieses Potential auch für alle Punkte der Oberfläche constant; man hat somit für das Theilen m'

$$w' = m'\left(\frac{m''}{r''} + \frac{m'''}{r'''} + \ldots\right) = m' \cdot V$$

und somit $W = \frac{1}{2}\Sigma w$.

Der Factor $\frac{1}{2}$ muss vor das Summenzeichen gesetzt werden, weil bei der Summirung jedes Paar doppelt gezählt wurde, einmal in der Reihenfolge $m\,m'$ und dann als $m'\,m$ und so auch für alle übrigen.

Wir haben also

$$W = \frac{1}{2}\Sigma w = \frac{1}{2}\Sigma m\, V = \frac{1}{2} V \cdot \Sigma m = \frac{1}{2} M\, V$$

denn Σm ist nichts anderes als die Gesammtladung M des Körpers.

Diese einfache Formel setzt uns also in den Stand, den Arbeitsvorrath eines elektrisirten Körpers zu berechnen, wenn uns dessen Ladung und Potential gegeben ist.

Es ist beachtenswerth, wie dieser Arbeitsvorrath bei gleicher Ladung von Form und Grösse des geladenen Körpers abhängt, und es geht aus dieser Formel recht deutlich hervor, wie eine Elektricitätsmenge für sich allein noch keine Arbeit repräsentirt, sondern erst in Verbindung mit einem Potential; gerade so wie ein Stein, wenn er auch noch so schwer ist, an und für sich keine Arbeit vorstellt, sondern erst in Verbindung mit einer Höhe oder Niveaudifferenz.

Für eine Kugel ist $V = \frac{M}{R}$, somit $W = \frac{1}{2}\frac{M^2}{R} = \frac{M^2}{D}$, wenn wir mit D den Durchmesser derselben bezeichnen. Theilen wir zwei Kugeln vom Durchmesser D_1 und D_2 je die Ladung m mit, so werden die beiden Energien W_1 und W_2 folgende Werthe annehmen:

$$W_1 = \frac{m^2}{D_1};\ W_2 = \frac{m^2}{D_2}.$$

Man hat somit $\frac{W_1}{W_2} = \frac{D_2}{D_1}$, d. h. die Energie der kleinen Kugel ist grösser als die der grossen, und zwar im Verhältniss der Durchmesser.

Auch für ein und denselben Körper kann bei gleicher Ladung die Energie doch eine verschiedene sein, denn es kann sein Potential durch Induction eines genäherten Leiters verändert werden.

§ 23. Bestimmung des Gleichgewichtszustandes einer Ladung auf einem Conductor.

Wir wissen schon, dass eine Ladung auf einem Conductor nur dann im Gleichgewichte sich befinden kann, wenn das Potential längs des ganzen Conductors ein und denselben constanten Werth besitzt; dieser Satz ist auch eine nothwendige Folgerung aus der Formel für die Energie, welche die Ladung repräsentirt. Nehmen wir beispielsweise eine ganz willkürliche Vertheilung an, so dass das Potential V in jedem Punkte der Oberfläche des Conductors einen anderen Werth besitzt, so wird jedes Elektricitätstheilchen eine Energie $w = m \cdot V$ besitzen, wenn wir mit m die Quantität dieses Theilchens und mit V das an seinem Orte herrschende Potential bezeichnen. Damit m sich im Gleichgewichte befinde, ist es nothwendig, dass bei einer virtuellen Verschiebung desselben die geleistete Arbeit dA gleich Null sei, oder da $dA = -dw$ ist, dass $dw = 0$ sei. Es ist aber

$$dw = m\,dV,$$

es muss also längs jeder möglichen Verschiebungsrichtung, d. h. nach jeder Richtung des Leiters dV gleich Null, oder V constant sein.

Und da die gleiche Betrachtung für alle Theilchen der Ladung gilt, so folgt daraus, dass im Gleichgewichtszustande das Potential längs des ganzen Conductors constant sein muss.

Es ist von vorneherein keineswegs einleuchtend, dass für eine jede Form eines Leiters eine solche Vertheilung möglich ist, dass dieser Bedingung entsprochen wird; aber es lässt sich zeigen, dass

dem doch so ist. Bezeichnen wir mit ds ein Flächenstück der Oberfläche des Leiters mit μ die dort herrschende Dichte und mit r die successiven Distanzen von allen anderen Punkten der Oberfläche, so ist allgemein

$$W = \frac{1}{2} \int \mu \, d s \int \frac{\mu \, d s}{r}$$

wobei das zweite Integral das vorläufig von Punkt zu Punkt als variabel angenommene Potential bedeutet. Der wahre Werth von W muss aber jedenfalls zwischen den folgenden Grenzen liegen:

$$\infty > W > \frac{1}{2} \int \mu \, d s \int \frac{\mu \, d s}{R}$$

wenn R die grösste Dimension des Körpers bezeichnet. Unendlich würde W werden, wenn alle Elektricität in einem Punkte concentrirt wäre und die angeführte untere Grenze kann augenscheinlich nicht erreicht werden, da die einzelnen r in Wirklichkeit alle kleiner, höchstens gleich R sind. Bei allen möglichen Vertheilungen, die wir der Ladung zukommen lassen, können wir also W nicht unter einen gewissen Grenzwerth herabdrücken, d. h. W hat immer ein Minimum. Dasselbe tritt, wie oben gezeigt wurde, ein für $d\,W = 0$ oder für $V =$ Constans.

Da in diesem Falle die Energie ein Minimum ist, so geht auch weiter hervor, dass die Gleichgewichtslage eine stabile ist; eine labile gibt es offenbar nicht, denn für diese müsste W ein Maximum sein, was wegen des oberen Grenzwerthes $= \infty$ nicht der Fall sein kann.

Es liegt die Frage nahe, ob es mehrere oder nur eine einzige Art der Vertheilung gibt, die der Gleichgewichtsbedingung $V =$ Constans genügt. Denken wir uns einem Körper zuerst die Ladung $+M$ mitgetheilt und dann die Ladung $-M$ darübergelagert, so hat er offenbar die Gesammtladung Null, seine Energie ist also gleichfalls Null. Würden die beiden Ladungen sich nicht in vollkommen identischer Weise über den Körper verbreiten, wie es der Fall sein könnte wenn es mehrere Gleichgewichtslagen gäbe, so erschienen einzelne Theile der Oberfläche positiv andere negativ elektrisch; diese Partien müssten durch unelektrische Linien von einander getrennt sein, welcher Fall aber, nach später zu entwickelnden Gesetzen nur unter dem Einflusse äusserer Kräfte (Induction) eintreten kann, nicht aber wenn die Ladung sich selbst überlassen ist. Auch würden die Kräfte die zwischen den positiven und negativen Theilen der Ladung thätig sind eine gewisse Energie repräsentiren, was mit der Bedingung dass diese gleich Null

sein soll im Widerspruche steht. Es ist also nur möglich dass die Dichte an allen Punkten verschwindet d. h. dass sich die Ladung $-M$ gerade so über den Körper vertheilt wie die Ladung $+M$.

Es ergeben sich somit die folgenden Sätze:

1. Für einen jeden Körper gibt es eine und nur eine Gleichgewichtslage der Ladung.
2. Diese Gleichgewichtslage entspricht einem längs des ganzen Körpers constanten Werth des Potentials.
3. Sie entspricht einem Minimum der Energie d. h. sie ist eine stabile Gleichgewichtslage.
4. Eine labile Gleichgewichtslage gibt es nicht.

Diese Sätze wurden schon in § 10 erwähnt.

§ 24. Analogie mit den Erscheinungen der Gravitation.

Auch die Gravitation ist eine Kraft deren Intensität proportional dem Producte der wirksamen Massen und umgekehrt proportional dem Quadrate der Entfernungen ist; diese Kraft ist eine Anziehungskraft wir müssen sie daher mit positivem Vorzeichen versehen da wir Abstossungskräfte als negativ gezählt haben. Zwischen zwei ponderablen Massen m und m' in der Distanz r ist also eine Kraft $K = \frac{m\,m'}{r^2}$ thätig, oder die Masse m wirkt auf die Masseneinheit mit einer Kraft $\frac{m}{r^2}$. Das Potential welches dieselbe in der Distanz r erzeugt ist demnach $= -\frac{m}{r}$. Da die Vertheilung der ponderablen Massen in einem Körper eine ganz andere sein kann und im Allgemeinen auch ist als die elektrischer Massen auf demselben so gelten natürlich die für letztere Massen im Gleichgewichtszustande abgeleiteten Sätze über das Potential längs des Körpers selbst nicht mehr für ponderable Massen. Für eine Kugel z. B. ist das Gravitationspotential im Innern keineswegs constant; für alle Punkte ausserhalb ist es aber genau so gross als wenn die ganze Masse im Centrum der Kugel vereinigt wäre, denn es entspricht die Kraft an jedem ausserhalb gelegenen Punkte dieser Anordnung der Masse. In Bezug auf äussere Punkte muss also eine Kugel die von ponderabler Masse symmetrisch erfüllt ist sich gerade so verhalten wie ein geladener kugelförmiger Conductor. Die Niveauflächen werden concentrische Kugelschalen sein und die Kraftlinien die Radien.

Wenn wir eine Kugel von sehr grossem Radius betrachten, etwa die Erde, so können die zunächstliegenden Niveauflächen als horizontale Ebenen betrachtet werden und die Kraftlinien als parallele Gerade d. h. das Gravitationsfeld ist ein homogenes, oder die Kraft ist eine constante. Das wird bis in solche Höhen über dem Erdboden giltig sein bis zu welchen man die Erhebung als verschwindend klein gegen den Erdradius betrachten kann. Es ist eine nothwendige Folge dieser Homogenität des Feldes, dass das Gewicht einer Masse innerhalb ziemlich weiter Grenzen von der Erhebung derselben über dem Erdboden unabhängig ist.

Bezeichnen wir das Niveau der Erdoberfläche mit h_0 und betrachten wir eine Reihe äquidistanter Niveauflächen die in den Höhen h_1 h_2 h_3 ... parallel zur Erdoberfläche als Ebenen verlaufen; es ist dann $h_3 - h_2 = h_2 - h_1 = h_1 - h_0$.

Die Potentiale in diesen Niveauflächen wollen wir mit V_0, V_1, V_2... bezeichnen; man hat dann auch $V_3 - V_2 = V_2 - V_1 = V_1 - V_0$. Bei Besprechung der Analogie zwischen Gravitation und elektrischen Kräften pflegt man nicht selten elektrische Potentialdifferenzen und Höhendifferenzen als correspondirende Begriffe anzuführen; das trifft aber nicht strenge zu denn den elektrischen Potentialdifferenzen entsprechen bei der Gravitation wieder die Potentialdifferenzen und diese sind nicht identisch mit den Höhendifferenzen sondern nur diesen proportional. Man hat, wenn p eine Constante bedeutet,

$$V_3 - V_2 = p\,(h_3 - h_2)$$
$$V_2 - V_1 = p\,(h_3 - h_1)$$

. . . .

Um diese Constante p zu bestimmen betrachten wir die Arbeit welche die ponderable Masseneinheit leistet, wenn sie sich vom Niveau h_2 auf das Niveau h_1 bewegt also vom Potential V_2 auf V_1 gebracht wird.

Es ist die Kraft welche die Masseneinheit bewegt $K = -\frac{d\,V}{d\,h}$ und die unendlich kleine Arbeit welche bei unendlich kleiner Aenderung des Niveaus geleistet wird $d\,A = \frac{d\,V}{d\,h}\,d\,h$ somit ist

$$A = -\int_{V_2}^{V_1} d\,V = V_2 - V_1$$

das ist eine positive Grösse da die Potentiale negativ sind. Würde sich nicht die Masseneinheit sondern die Masse m von h_2 nach h_1 bewegen, so wäre die geleistete Arbeit

$$A' = m\,(V_2 - V_1).$$

Wenn wir dieselbe Arbeit unter Einführung der Höhendifferenzen statt der Potentialdifferenzen berechnen so ist dieselbe

$$K(h_2 - h_1)$$

wo K die treibende Kraft ist. Bezeichnet man die Intensität der Erdschwere mit g so ist $K = m\,g$ und

$$A' = m\,g\,(h_2 - h_1)$$

Aus der Vergleichung mit dem obigen Werthe von A' ergibt sich somit

$$V_2 - V_1 = g\,(h_2 - h_1).$$

Unsere frühere Constante p ist also nichts anderes als die Acceleration. Man hat demnach $g = \frac{V_2 - V_1}{h_2 - h_1}$.

Solange $(V_n - V_{n+1}) = (V_{n+1} - V_{n+2})$ ist d. h. so lange das Feld homogen ist behält g ein und denselben Werth. Da aber bei gleichbleibender Höhendifferenz die zugehörige Potentialdifferenz allmälig abnimmt und im Unendlichen Null wird so muss auch der Werth von g sich asymptotisch der Null nähern.

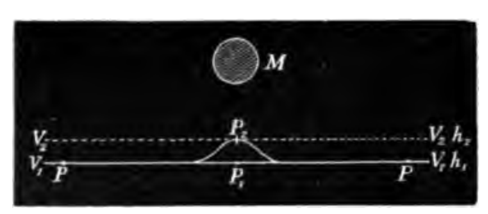


Fig. 49.

Es ist also eine Potentialdifferenz äquivalent einer Höhendifferenz multiplicirt mit der Acceleration.

Auch die Erscheinung der Induction findet bei der Schwere ihr Analogon. Wir können die Theilchen einer Flüssigkeit als frei beweglich in Bezug auf die Gravitation auffassen und es erscheint daher natürlich dass die freie Oberfläche einer Flüssigkeit stets ein Stück einer Niveaufläche der Erde ist: wird aber einer solchen Flüssigkeitsoberfläche vom Potential V_1 und der Höhe h_1 in Fig. 49 eine schwere Masse M genähert, so kann dieselbe ihre ursprüngliche ebene Gestalt offenbar nicht mehr beibehalten. Betrachten wir einen Punkt P_2 der zwischen der Flüssigkeit und der Masse M in der Höhe h_2 sich befindet wo ursprünglich das Potential den Werth V_2 hatte, so ist klar dass jetzt bei Anwesenheit von M das Potential daselbst einen höheren Werth als V_2 angenommen haben wird. Dasselbe gilt von P_1 auch dort wird es höher als V_1 geworden sein. Da nun die ponderablen Massen wenn sie frei beweglich sind sich stets von Orten niederen Potentials zu jenen mit höherem begeben so muss in der Flüssigkeit eine Strömung von den Punkten P nach P_1 und P_2 eintreten, da in den entfernteren Punkten P das Potential durch M nicht mehr wesentlich geändert wird. Das Resultat der

Anwesenheit von M ist somit die Entstehung eines Wellenberges unterhalb M also die Anhäufung einer Masse in Folge entstandener Potentialdifferenzen, ganz wie es bei der elektrischen Induction der Fall ist. Die Höhe $P_1 P_2$ des Wellenberges kann natürlich nur so lange zunehmen bis der dadurch verursachte hydrostatische Gegendruck der von M erzeugten Potentialdifferenz das Gleichgewicht hält.

Sowie die Niveauflächen und Kraftlinien eines elektrischen Körpers gestört werden wenn andere elektrische Massen in die Nähe gebracht werden so werden auch die Niveauflächen der Erdschwere, die über einer Ebene gleichfalls horizontale Flächen sind, durch die Anwesenheit einer bedeutenden Masse z. B. eines isolirten Berges gestört. Es ist nicht schwer dies nachzuweisen denn den Störungen der Niveauflächen entsprechen natürlich solche der Kraftlinien und die Richtung der letzteren ist uns an jedem Orte durch das Loth gegeben. Ein über einer weiten Ebene aufgehängtes Loth hat aber bekanntlich nicht dieselbe Richtung wie ein in der Nähe eines isolirten Gebirgsstockes befindliches, sondern letzteres weicht in der Richtung des Gebirges ab. Der Winkel den beide bilden lässt sich durch astronomische Beobachtungen bestimmen; er ist im Allgemeinen sehr klein, weil die Masse eines Gebirges immer noch klein ist gegen die Erdmasse und die Niveauflächen der Gravitation nicht wie die elektrischen der Oberfläche des Körpers zu folgen genöthigt sind, sondern den Körper auch durchschneiden können. Das Stück einer Niveaufläche das im Innern des isolirten Berges sich befindet wird demnach auch nur um ein Geringes höher liegen als der ausserhalb befindliche Theil derselben und dementsprechend wird auch die Ablenkung des Lothes an der Seite des Berges nur eine sehr kleine sein.

Auch für Massen die der Gravitation unterworfen sind gilt das Gesetz dass ein System nur dann im stabilen Gleichgewichte sich befindet wenn die Energie desselben ein Minimum ist; da man es aber hier mit Anziehungskräften zu thun hat so ist die Energie um so grösser je weiter die einzelnen Theile des Systems von einander entfernt sind, und sie wird ein Minimum wenn ihre Distanzen ein Minimum werden. Die Folge davon ist, dass ponderable Massen, wenn sie nur ihrer gegenseitigen Einwirkung unterworfen und frei beweglich sind, sich möglichst einander zu nähern suchen. Dieser Fall tritt z. B. ein bei Flüssigkeitsmassen die frei im Raume schweben (fallende Tropfen); sie nehmen alle die Tropfengestalt an d. h. jene Gestalt bei welcher ihre Energie ein Minimum ist. Die Kugelgestalt der Himmelskörper hat gleichfalls hierin ihren Grund.

IX. Capitel.

Zusammenhang zwischen Kraft und Ladung.

§ 25. Zusammenhang zwischen der Intensität der Kraft und der Dichte der Ladung an der Oberfläche eines Conductors.

Wenn wir von der Intensität der Kraft an der Oberfläche eines Leiters sprechen so meinen wir damit die Kraft mit welcher seine Gesammtladung auf ein Elektricitätstheilchen wirkt das unendlich nahe an die Oberfläche herangebracht wird. Diese Wirkung setzt sich aus zwei Theilen zusammen: aus dem Einfluss den die zunächst gelegenen Partien der Ladung ausüben und aus der Wirkung der entfernteren Theile des Conductors.

Zwischen diesen beiden Wirkungen besteht ein leicht zu übersehender Unterschied: da nämlich das unendlich nahe an den Körper herangebrachte Elektricitätstheilchen bei einer eventuellen unendlich kleinen Aenderung seine Lage auch seine Distanz vom benachbarten Theil des Conductors ändert, dagegen nicht von den in endlicher Entfernung befindlichen Theilen desselben, so muss solcherweise die Gesammtkraft eine Veränderung erleiden die nur von der Dichte der Ladung an dem benachbarten Theil des Conductors abhängt.



Sei M in Fig. 50 ein beliebig gestalteter geladener Conductor, von dem wir nur voraussetzen wollen dass seine Oberfläche stetig gekrümmt sei, und befinde sich in dem unendlich nahe an der Oberfläche gelegenen Punkte P eine Probeladung m, so wirkt auf dieselbe sowohl die Ladung des benachbarten Flächenstückchens $N N'$ als die des Körperrestes. Erstere Kraft wollen wir mit K', letztere mit K_1 bezeichnen. Die Gesammtwirkung ist dann

$$K = K' - K_1$$

Denken wir uns nun die Probeladung m in das Innere der Körperoberfläche gebracht an den entsprechend gelegenen Punkt P': durch diesen Vorgang ändert sich dem vorstehenden gemäss die Grösse K_1 nicht, dagegen wird K' offenbar sein Vorzeichen ändern, indem jetzt die Richtung die entgegengesetzte geworden ist. Der absolute Werth von K' bleibt natürlich ungeändert, denn für ein

unendlich nahe aneinander gelegenes Punktpaar PP' müssen wir das Flächenstück NN' als eben betrachten.

Die Gesammtkraft die auf eine Ladung im Punkte P' ausgeübt wird, muss aber gleich Null sein, da dieser Punkt ein innerer ist; man hat somit die Gleichung:

$$0 = -K_1 + K_2 \text{ oder } K_1 = K_2.$$

Die Kraft welche auf einen unendlich nahe der Oberfläche gelegenen Punkt von dem benachbarten Flächenstückchen ausgeübt wird ist somit eben so gross wie die Wirkung des ganzen Restes der Ladung.



Fig. 51.

Von der Relation $K = 2K_1$ kann man nun Gebrauch machen um den Werth von K zu berechnen, da sich K_1 leicht angeben lässt.

In Fig. 51 bedeute P wieder den Punkt unendlich nahe der Oberfläche wo sich die Probeladung m befindet; NN' ist das jetzt als eben anzusehende benachbarte Flächenstück dessen Wirkung K_1 auf m wir finden wollen. Die Dichte der Ladung müssen wir gleichfalls längs NN' als constant ansehen, wir wollen dieselbe mit μ bezeichnen. Die resultirende Kraft K_1 wird offenbar in die Richtung der Normalen OP fallen, da um diese die ganze Figur symmetrisch ist. Wir denken uns nun um O mit dem Radius r auf der Ebene NN' einen Kreis gezogen, und einen zweiten concentrischen mit dem Radius $r + dr$. Die Elektricitätsmenge $d\varepsilon$ die sich auf diesem Kreisring vorfindet ist

$$d\varepsilon = 2r\pi dr \cdot \mu.$$

Die Entfernung dieses Ringes vom Punkte P wollen wir mit l bezeichnen; wenn wir berücksichtigen dass von den Kräften die die einzelnen Theilchen dieser Ladung auf m ausüben stets nur die nach OP gerichteten Componenten zur Geltung kommen, die darauf senkrechten aber sich wechselweise aufheben, so erhalten wir, wenn wir Abstossungskräfte negativ zählen, für die Kraft dK_1 des Ringes auf m den Ausdruck

$$dK_1 = -\frac{2r\pi \cdot dr \cdot \mu \cdot m}{l^2} \cdot \cos\alpha$$

wo α den Winkel zwischen l und OP bezeichnet.

Es ist aber $r = l \cdot \sin\alpha$ und $l\,d\alpha = d\,r \cdot \cos\alpha$, somit wird

$$d\,K_1 = -2\,\pi\,\mu\,m \sin\alpha\,d\,\alpha \text{ oder}$$

$$K_1 = -2\,\pi\,\mu\,m \int_0^{\pi/2} \sin\alpha\,d\,\alpha = -2\,\pi\,\mu \cdot m.$$

Die Gesammtkraft K welche von der Ladung des Conductors auf m ausgeübt wird ist somit

$$K = -4\,\pi\,\mu\,m.$$

Die Kraft, welche auf die Einheit der Elektricitätsmenge ausgeübt würde, ist somit gleich $-4\,\pi\,\mu$; dieselbe ist aber identisch mit dem Potentialgefälle $\frac{d\,V}{d\,n}$ an der Oberfläche des Körpers, man hat also:

$$\frac{d\,V}{d\,n} = -4\,\pi\,\mu.$$

Diese Gleichung drückt eine der wichtigsten Relationen der Elektrostatik aus, sie besagt, dass das Potentialgefälle oder die Kraft an irgend einem Punkte der Oberfläche der dort herrschenden Dichte der Ladung proportional ist.

Wenn wir obige Gleichung in der Form schreiben:

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\,\frac{d\,V}{d\,n},$$

so sind wir im Stande in allen jenen Fällen, wo wir das Potentialgefälle kennen, auch unmittelbar die Dichte an dem betreffenden Orte anzugeben.

Längs der ganzen Oberfläche eines geladenen Conductors hat $\frac{d\,V}{d\,n}$ einen endlichen von Null verschiedenen Werth, ausser an Stellen, wo eine Durchschneidung von Niveauflächen stattfindet; letztes kann, wie wir schon gesehen haben, nur stattfinden, wenn der Conductor der Induction einer äusseren Ladung unterworfen ist. Es folgt daraus, dass die Dichte der Ladung an allen Punkten des Körpers von Null verschieden ist, d. h. dass die Ladung stets continuirlich über die Oberfläche sich ausbreitet, ohne ungeladene Stellen frei zu lassen. Unterliegt der Conductor aber einer Inductionswirkung von aussen, so kann eine Linie mit der Dichte Null vorkommen, nämlich dort, wo eine Niveaufläche des äusseren elektrischen Feldes den Conductor schneidet. Diese Linie trennt zugleich den positiv elektrischen Theil desselben vom negativ elektrischen.

Wenn wir einen geschlossenen Hohlraum im Innern eines geladenen Conductors betrachten, so wissen wir, dass das Potential längs jeder Trajectorie durch denselben einen constanten Werth hat; es ist also $\frac{dV}{dn} = 0$ und daraus folgt, dass auch die Dichte an jedem inneren Punkte gleich Null sein muss. Es verbreitet sich somit eine Ladung stets nur über die äussere Oberfläche des Conductors, wie wir übrigens schon früher aus anderen Umständen zu schliessen Gelegenheit hatten.

Die Gleichung $K = -4\pi\mu m$ gilt nur so lange wir das Flächenstück NN' (Fig. 50 und 51) als eben betrachten können d. h. solange die Oberfläche des Conductors an der betreffenden Stelle continuirlich gekrümmt ist. Die Giltigkeit der Gleichung hört auf sobald daselbst die Oberfläche Kanten oder Ecken, seien dieselben ein- oder ausspringend, aufweist. Da die Oberfläche des Conductors selbst eine Niveaufläche ist und längs einer Kante eine Durchschneidung derselben stattfindet so wird daselbst der Ausdruck $\frac{dV}{dn}$ unbestimmt. In der That kann man von einer Dichte der Ladung an einer Kante nicht mehr sprechen da der Begriff der Dichte nothwendig den der Fläche voraussetzt, man kann nur mehr von einer Dichte an den Seitenflächen der Kante sprechen, und diese wird bei einer einspringenden immer kleiner je mehr man sich derselben nähert bei einer ausspringenden dagegen immer grösser. Wird der Kantenwinkel gleich 180° so geht die Dichte des einspringenden wie des ausspringenden Winkels in die normale Flächendichte über. Das gleiche findet auch bei ein- oder ausspringenden Ecken statt.

§ 26. Elektrostatischer Druck.

Im vorigen Paragraphen wurde gezeigt dass die Kraft K mit welcher die Ladung eines beliebig geformten Conductors auf eine unendlich nahe befindliche Elektricitätsmenge m wirkt nur abhängt von der Dichte an dem zunächst gelegenen Theil des Conductors und gegeben ist durch

$$K = -4\pi\mu m.$$

Es ist nun die Frage naheliegend wie gross denn diese Wirkung ist wenn man m aus unendlicher Nähe bis in die Oberfläche selbst versetzt d. h. wie gross die Kraft der Ladung auf ein eigenes Theilchen ist. Man hat früher angenommen dass dadurch die Grösse von K

nicht verändert wird; wenn wir also die Kraft der eigenen Ladung auf die Flächeneinheit suchen, so hätten wir in obiger Gleichung für m nur μ zu setzen, denn letzteres ist ja die Elektricitätsmenge auf der Flächeneinheit.

Es wäre dann

$$K = -4\pi\mu^2.$$

Die Kraft wäre somit dem Quadrate der Dichte proportional.

Gegen diese Auffassungsweise wurde aber zuerst von W. Thomson eingewendet dass sie aus folgendem Grunde nicht correct sei. Die Kraft K setzt sich, wie früher gezeigt wurde aus den Wirkungen K_1 und K_2 zusammen so dass $K = K_1 + K_2$. Dabei ist K_1 die Wirkung der benachbarten Theile der Ladung und K_2 die des Restes und ausserdem besteht die Relation $K_1 = K_2$. Wenn nun die Elektricitätsmenge auf welche eine Kraft ausgeübt wird in die Oberfläche selbst fällt, so muss nothwendig $K_1 = 0$ werden, denn man kann nicht annehmen dass die auf dem benachbarten unendlich kleinen, also ebenen Flächenstücke befindlichen Ladungen auf ein in derselben Ebene befindliches Theilchen eine Kraft ausüben die zu der Ebene normal gerichtet ist. Es bliebe demnach nur die Wirkung K_2 d. h. es müsste

$$K = -2\pi\mu^2$$

sein.

Da es sich hier nur darum handelt ob der einfache oder der doppelte Werth der richtige ist, und da, wie aus dem früheren folgt, dieses Verhältniss für alle Körperformen dasselbe bleibt so genügt es zu einer definitiven Entscheidung offenbar wenn sich die Kraft K für eine specielle Form feststellen lässt.

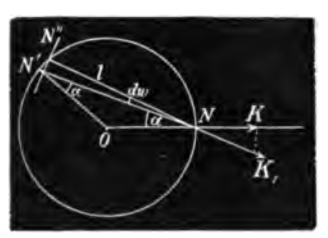


Fig. 52.

Für eine Kugel gelingt dies, wie Thomson gezeigt hat, sehr leicht.

Sei O in Fig. 52 das Centrum einer mit der Dichte μ geladenen Kugel und suchen wir die Wirkung der ganzen Ladung auf ein bei N gelegenes Flächenstückchen von der Grösse σ; zu diesem Zwecke betrachten wir zunächst die Kraft dK die von einem beliebig, etwa bei N' gelegenen anderen Flächenstückchen σ' auf σ ausgeübt wird.

Sind m und m' die respectiven Ladungen von σ und σ' und ist l ihre Distanz so wird

$$dK = -\frac{m\,m'}{l^2}.$$

Es ist aber $m = \sigma \cdot \mu$ und $m' = \sigma' \mu$; also ist

$$d K = - \frac{\sigma \sigma' \mu^2}{l^2}.$$

Das Flächenstück σ' wird von N aus unter einem gewissen Gesichtswinkel $d w$ erscheinen. Wenn wir von N aus mit dem Radius l eine Kugelschale N'' beschreiben so schneidet der Kegel $d w$ aus derselben ein Flächenstück aus das gleich $l^2 d w$ ist. Dieses Flächenstück ist aber nichts anderes als die Projection von σ' auf die Kugel N''; und da die Radien der beiden Kugeln mit einander den Winkel α einschliessen so gilt dies auch von den Flächenstücken N' und N''. Man hat somit:

$$l^2 d w = \sigma' \cdot \cos \alpha \text{ oder } \sigma' = \frac{l^2 d w}{\cos \alpha}$$

und weiter

$$d K = - \frac{\sigma \mu^2 d w}{\cos \alpha}.$$

Diese Kraft wirkt in der Richtung der Verbindungslinie von σ und σ'; die Gesammtresultirende muss aber, der Symmetrie der Figur entsprechend die Richtung $O N$ haben d. h. es kommt von $d K$ nur jene Componente wirklich zur Geltung die nach $O N$ wirkt; es ist also $d K$ noch mit $\cos \alpha$ zu multipliciren so dass man hat

$$d K = - \sigma \mu^2 d w.$$

Um die Wirkung der ganzen Kugel zu finden haben wir den Gesichtswinkel $d w$ so lange wachsen zu lassen bis er alle wirksamen Theile umspannt d. h. bis 2π; es wird dann

$$K = - \sigma \mu^2 2 \pi$$

und machen wir $\sigma = 1$, so erhalten wir die Kraft die auf die Flächeneinheit der Oberfläche wirkt gleich

$$K = - 2 \pi \mu^2.$$

Diese Relation ergibt sich auch aus dem allgemeinen Satz dass die Kraft auf einen Punkt mit der Ladung 1 in der Fläche das arithmetische Mittel aus den Kräften in zwei beiderseits benachbarten Punkten ist; in unserem Falle sind die letzteren $4 \pi \mu$ aussen und 0 innen, das Mittel somit wieder $2 \pi \mu$ und die Kraft per Flächeneinheit $2 \pi \mu^2$. Es ist interessant zu sehen dass diese Formel ganz allgemein gilt nicht nur wenn auf μ Kräfte von Seiten des eigenen Conductors wirken sondern auch im Falle äusserer Induction. So z. B. beim ebenen Condensator; haben die Platten A und B des-

selben die Dichten μ und $-\mu$ so ist die Kraft per Flächeneinheit von A nach unserer Formel $2\pi\mu^2$; es kann aber die Ladung von A selbst zu dieser Kraft nichts beitragen wegen der Anordnung in einer Ebene, sondern es stammt die ganze Kraft von B und diese ist, wie wir früher gesehen haben, eben gleich $2\pi\mu^2$.

Für einen Punkt zwischen A und B ist die Kraft $2\pi\mu$ von A her, und $-(-2\pi\mu)$ von B her in Summa somit $4\pi\mu$ was wieder mit unserer früheren Formel $\frac{dV}{dn} = -4\pi\mu$ übereinstimmt.

Die Grösse K nennt man den elektrostatischen Druck oder die Spannung an der Oberfläche eines geladenen Conductors. Da dieselbe dem Quadrate der Dichte proportional ist so kann sie leicht eine ganz bedeutende Grösse erreichen weshalb es auch sehr schwierig ist stark geladene Leiter gut isolirt zu erhalten. Auch kann, wenn ein Entweichen der Elektricität in die Umgebung ausgeschlossen ist dadurch eine vollständige Zerreissung des Leiters eintreten. Lässt man z. B. die Ladung einer starken Leydnerbatterie plötzlich durch einen äusserst dünnen Platindraht hindurchgehen so wird derselbe momentan vollständig zerstäubt. Man kann die Zerstäubungsfigur dadurch sichtbar machen dass man den Draht während des Versuches zwischen zwei Blätter Papier einlegt auf welchen sich dann das zerstäubte Platin niederschlägt.

Auch Seifenblasen sollen, wenn sie elektrisirt werden, durch ihre Ausdehnung das Vorhandensein des elektrostatischen Druckes anzeigen.

Da die Grösse dieses Druckes mit dem Quadrate der Dichte wächst so wird eine Entladung des isolirten Leiters gegen das umgebende Mittel zunächst an jenen Stellen stattfinden wo μ einen grössten Werth hat d. h. an den Stellen grösster Krümmung, an Kanten und Spitzen. Auf diesen Umstand muss man auch sein Augenmerk gerichtet haben wenn es sich um Anbringung einer möglichst gut isolirenden Stütze an einem Conductor handelt. Da die Kraft welche die Elektricität in die Stütze zu treiben und dadurch mangelhafte Isolirung hervorzurufen bestrebt ist von μ^2 an der betreffenden Stelle abhängt so wird man eine solche Stütze passender Weise an möglichst ebenen Stellen des Leiters, oder noch besser an einspringenden Stellen desselben befestigen, da an diesen die Dichte ein Minimum ist. Wenn es die Form des Conductors erlaubt wird man die Verbindungsstelle mit der Stütze ganz ins Innere desselben verlegen.

X. Capitel.

Zweite Differentialquotienten des Potentials.

§ 27. Eigenschaften der zweiten Differentialquotienten des Potentials. Gleichung von Laplace.

Wir haben schon als eine sehr bemerkenswerthe Eigenschaft der Potentialfunction die kennen gelernt dass die ersten Derivirten derselben nach irgend welcher Richtung uns die Intensität der Kraft angeben welche in dieser Richtung auf die Einheit der Elektricität wirkt. Aber nicht nur die ersten, auch die zweiten Derivirten dieser Function zeigen Eigenthümlichkeiten die für das Studium elektrischer Phänomene von eminenter Wichtigkeit sind und die im Nachfolgenden näher erörtert werden sollen.

Betrachten wir einen Punkt P im Raume an dem sich selbst keine Elektricität befindet, der also ganz ausserhalb der wirksamen Massen liegt und beziehen wir dessen Lage auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; die Coordinaten dieses Punktes seien ξ, η, ϑ. In beliebiger Lage um diesen Punkt herum sollen elektrische Massen m, m' ... vertheilt sein deren Coordinaten wir durch x, y, z, x', y', z' .... bezeichnen wollen. Die Abstände des Punktes P von m, m' ... nennen wir r, r' ....

Das Potential V im Punkte P ist dann gegeben durch den Ausdruck

$$V = \Sigma \frac{m}{r}$$

wo das Summenzeichen sich über sämmtliche wirksame Massen erstreckt.

Als Ausdruck für die Kräfte X, Y, Z in den drei Coordinatenrichtungen im Punkte P haben wir:

$$-X = \frac{dV}{dx} = \Sigma - \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dx}$$

$$-Y = \frac{dV}{dy} = \Sigma - \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dy}$$

$$-Z = \frac{dV}{dz} = \Sigma - \frac{m}{r^2} \cdot \frac{dr}{dz}.$$

Da aber

$$r^2 = (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\vartheta - z)^2$$

ist so erhalten wir durch Differentiation nach x, y und z die Ausdrücke:

$$\frac{dr}{dx} = -\frac{\xi - x}{r}; \quad \frac{dr}{dy} = -\frac{\eta - y}{r}; \quad \frac{dr}{dz} = -\frac{\vartheta - z}{r}$$

und durch Substitution in obige Gleichungen:

$$\frac{dV}{dx} = \Sigma\, m\, \frac{\xi - x}{r^3}$$

$$\frac{dV}{dy} = \Sigma\, m\, \frac{\eta - y}{r^3}$$

$$\frac{dV}{dz} = \Sigma\, m\, \frac{\vartheta - z}{r^3}.$$

Durch nochmalige Differentiation und Substituirung der obigen Werthe für $\frac{dr}{dx}$, $\frac{dr}{dy}$ und $\frac{dr}{dz}$ ergibt sich:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \Sigma\, m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(\xi - x)^2}{r^5}\right)$$

$$\frac{d^2 V}{dy^2} = \Sigma\, m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(\eta - y)^2}{r^5}\right)$$

$$\frac{d^2 V}{dz^2} = \Sigma\, m \left(-\frac{1}{r^3} + \frac{3\,(\vartheta - z)^2}{r^5}\right).$$

Bilden wir nun die Summe dieser drei Differentialquotienten und bezeichnen wir dieselbe zur Abkürzung mit ΔV so haben wir

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \Delta V = \Sigma m \left(-\frac{3}{r^3} + \frac{3}{r^5}[(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\vartheta - z)^2]\right).$$

Da aber $(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\vartheta - z)^2 = r^2$ ist so ergibt die ganze Summe gleich Null; es ist

$$\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2} = \Delta V = 0.$$

Dieser wichtige Satz dass die Summe der zweiten partiellen Derivirten des Potentials nach den drei Richtungen des Raumes gleich Null ist wurde schon von Laplace beim Studium der Gravitationserscheinungen erkannt; es trägt die Gleichung welche diesen Satz ausdrückt darum auch den Namen der Laplace'schen Gleichung.

Um dieselbe für einen speciellen Fall zu verificiren wählen wir das folgende einfache Beispiel. Es sei M in Fig. 53 eine elektrische Masse deren Niveauflächen concentrische Kugelschalen sind; eine derselben mit dem Potentiale V gehe durch den Punkt P in der Distanz R von M. Wir wollen die Laplace'sche Gleichung auf

diesen Punkt anwenden; indem wir die Richtung von R als x-Richtung und zwei darauf senkrechte als y- und z-Richtung wählen. Die yz-Ebene tangirt die Niveaufläche im Punkte P, es ist somit hier $\frac{dV}{dy} = \frac{dV}{dz} = 0$, da für diese Richtungen das Potential in P ein Maximum ist. Wenn aber auch die ersten Differentialquotienten nach y und z verschwinden so gilt dies nicht auch von den zweiten, die ja durch die Krümmung der Niveaufläche in P bedingt sind. Nur wenn diese Krümmung verschwinden würde d. h. für $R = \infty$ müssten auch die zweiten Differentialquotienten gleich Null werden.

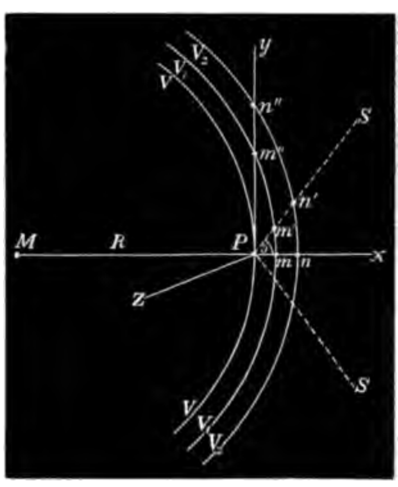


Fig. 53.

Da das Potential in P für die Richtung der y und z ein Maximum ist so werden die zweiten Differentialquotienten nach eben diesen Richtungen negativ sein müssen.

Um den Werth derselben zu finden verfahren wir folgendermassen. Wir wählen drei Punkte x, y, z (Fig. 53) die auf den betreffenden Coordinatenrichtungen sehr nahe an P liegen und bezeichnen die betreffenden Abstände gleichfalls durch x, y und z, sowie die Potentiale in diesen Punkten mit V_x, V_y, V_z.

Man hat dann

$$V_x = \frac{M}{R + x}; \quad \frac{dV}{dx} = -\frac{M}{(R + x)^2}$$

$$V_y = \frac{M}{R(^2 + y^2)^{1/2}}; \quad \frac{dV}{dy} = -\frac{My}{R(^2 + y^2)^{3/2}}$$

$$V_z = \frac{M}{(R^2 + z^2)^{1/2}}; \quad \frac{dV}{dz} = -\frac{Mz}{(R^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Für die zweiten Differentialquotienten erhalten wir weiter:

$$\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{2M}{(R + x)^3}$$

$$\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{-M(R^2 + y^2)^{3/2} + 3My^2(R^2 + y^2)^{1/2}}{(R^2 + y^2)^3}$$

$$\frac{d^2V}{dz^2} = \frac{-M(R^2 + z^2)^{3/2} + 3Mz^2(R^2 + z^2)^{1/2}}{(R^2 + z^2)^3}.$$

Für den Punkt P erhalten wir die entsprechenden Ausdrücke offenbar indem wir $x = y = z = 0$ werden lassen; es wird dann

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = \frac{2 M}{R^3}$$

$$\frac{d^2 V}{d y^2} = -\frac{M}{R^3}$$

$$\frac{d^2 V}{d z^2} = -\frac{M}{R^3}.$$

Es ist somit in der That $\Delta V = 0$ wie es die Laplace'sche Gleichung fordert. Auch sieht man dass die zweiten Derivirten nach y und z negativ sind wie es einem Maximum des Potentials nach diesen Richtungen im Punkte P entspricht. Wird $R = \infty$ d. h. werden die Niveauflächen parallele Ebenen dann wird $\frac{d^2 V}{d x^2} = \frac{d^2 V}{d y^2} = \frac{d^2 V}{d z^2} = 0$. Wenn aber $\frac{d^2 V}{d x^2} = 0$ ist so muss $\frac{d V}{d x} =$ Const. sein d. h. die Kraft in Richtung der x ist dann im ganzen elektrischen Felde eine constante, oder das Feld ist ein homogenes.

Da die zweiten Derivirten nach x positiv sind, nach y und z aber negativ so besagt das dass in ersterer Richtung das Potential schneller abnimmt als linear in den letzteren dagegen langsamer; die Curve des Potentialgefälles nach x ist gegen die Abscissenaxe convex, die nach y und z dagegen concav. Es ist vorauszusehen dass zwischen den Richtungen x einerseits und y und z andererseits ein allmäliger Uebergang des Potentialgefälles statthaben muss so dass für bestimmte Richtungen dasselbe ein lineares wird und damit der zweite Differentialquotient des Potentials nach diesen Richtungen verschwindet.

Das eben Gesagte gilt offenbar für einen jeden Punkt des Feldes das die Masse M erzeugt; da es aber von vorneherein nicht einleuchtend ist dass für einen jeden solchen Punkt Richtungen existiren in welchen das Potentialgefälle linear ist so wollen wir die Lage dieser Richtungen noch genauer untersuchen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke einen Punkt der in beliebiger Richtung aber sehr nahe an P (Fig. 53) gelegen ist; seine Distanz von P sei λ und der Winkel den λ mit der Richtung x einschliesst sei ϑ. Das Potential V in diesem Punkte ist dann

$$V = \frac{M}{(\lambda^2 + R^2 + 2 \lambda R \cos \vartheta)^{1/2}}$$

und für das Potentialgefälle in der Richtung λ hat man

$$\frac{dV}{d\lambda} = \frac{-M(\lambda + R\cos\vartheta)}{(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta)^{3/2}}.$$

Wenn wir diesen Ausdruck noch einmal nach λ differentiiren so erhalten wir:

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = \frac{1}{(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta)^2} \cdot \left\{ -\frac{M}{2}(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta) \right.$$

$$\Big[2(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta)^{-1/2} - \frac{1}{2}(2\lambda + 2R\cos\vartheta)(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta)^{-3/2}.$$

$$\left. \cdot(2\lambda + 2R\cos\vartheta)\Big] + \frac{M}{2}(\lambda^2 + R^2 + 2\lambda R\cos\vartheta)^{-1/2} \cdot (2\lambda + 2R\cos\vartheta)^2 \right\}.$$

Wollen wir aber den Werth der zweiten Derivirten nach λ im Punkte P selbst kennen so haben wir im vorstehenden Ausdrucke einfach $\lambda = 0$ zu setzen. Dadurch wird

$$\frac{d^2V}{d\lambda^2} = \frac{M}{R^3} \cdot (3\cos^2\vartheta - 1).$$

Wie man sieht sind die früher für die Richtungen x y und z abgeleiteten Ausdrücke nur specielle Fälle dieser allgemeinen Gleichung und ergeben sich aus derselben wenn man $\vartheta = 0$ oder $\vartheta = 90^\circ$ setzt.

Da wir jene durch P hindurchgehenden Richtungen suchen längs welcher das Potentialgefälle ein lineares ist wo also $\frac{d^2V}{d\lambda^2} = 0$ wird so haben wir

$$\frac{M}{R^3}(3\cos^2\vartheta - 1) = 0$$

zu setzen und finden so $\cos\vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$ oder $\vartheta = 54^\circ\ 45'$.

Diese Richtungen sind in Fig. 53 durch S, S bezeichnet; sie bilden die Mantelfläche eines um x symmetrischen Kegels mit der Spitze in P und mit dem Oeffnungswinkel 109° 30′. Es sind diese Richtungen wie man sieht von M und R ganz unabhängig, die Winkel ϑ sind also constant für alle Punkte eines von einer einzigen Masse erzeugten Feldes.

Es sind also in unmittelbarer Nähe von P die Curven der Potentialgefälle für alle Richtungen die innerhalb des Kegels SS fallen gegen die Abscissenaxe convex, für alle ausserhalb liegenden aber concav; für alle in die Mantelfläche des Kegels fallenden Richtungen sind sie linear.

Die geometrische Erklärung dieser Thatsache ergibt sich aus der Betrachtung der Niveauflächen V_1 und V_2 die dem Punkte P sehr nahe liegen. Man hat $V - V_1 = V_1 - V_2$; es ist aber $Pm < mn$ dagegen $P m'' > m'' n''$ somit nehmen die Potentialgefälle nach x ab, nach y und z dagegen zu. Für die Richtungen S bleiben sie constant weil für diese $P m' = m' n'$ ist.

Da nach y und z die Potentialgefälle wachsen, dieselben aber schliesslich in unendlicher Entfernung gleich Null werden müssen so ist klar dass in diesen Richtungen noch Inflexionspunkte für die Curve des Potentialgefälles folgen müssen; dieselben ergeben sich nach dem Vorstehenden dadurch dass man von M aus parallele Gerade zu $S S$ zieht bis zum Durchschnitt mit der Richtung der y und der z; diese Durchschnittspunkte sind die gesuchten Inflexionspunkte, denn in denselben schliesst der Radius vector von M mit den Richtungen y respective z den Winkel ϑ ein d. h. es ist $\frac{d^2 V}{d y^2} = \frac{d^2 V}{d z^2} = 0$ und somit dort das Potentialgefälle ein lineares.

Was die Grösse des Potentialgefälles, oder der Kraft, in den Richtungen $S S$ Fig. 53 anlangt so ergibt sich dieselbe aus der für $\frac{d V}{d \lambda}$ abgeleiteten Formel wenn wir in derselben wieder $\lambda = 0$ werden lassen.

Wir erhalten so für eine jede Richtung λ die mit x den beliebigen Winkel ϑ einschliesst

$$\frac{d V}{d \lambda} = - \frac{M}{R^2} \cos \vartheta.$$

Für die Richtungen S ist $\cos \vartheta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, somit $\frac{d V}{d S} = - \frac{M}{R^2 \sqrt{3}}$.

Für die Richtungen x y und z erhalten wir ferner die bekannten Relationen

$$\frac{d V}{d x} = - \frac{M}{R^2}; \quad \frac{d V}{d y} = \frac{d V}{d z} = 0.$$

§ 28. Folgerungen aus der Laplace'schen Gleichung.

Da die Gleichung $\Delta V = 0$ für alle Punkte eines elektrischen Feldes Giltigkeit hat in denen sich selbst keine elektrischen Massen befinden, so folgt daraus unmittelbar dass in allen diesen Punkten der Werth von V weder ein absolutes Maximum noch Minimum haben kann; denn wäre ein solches vorhanden so müsste die Summe

der zweiten Differentialquotienten negativ oder positiv sein was unserer Gleichung $\Delta V = 0$ widerspricht. Es kann also in keinem Punkte des Feldes V für alle Richtungen ein Maximum oder Minimum sein, was aber nicht hindert dass dasselbe für einzelne ein Maximum und für andere ein Minimum sein kann. Solche Punkte mit relativen Maximis und Minimis haben wir ja bei Besprechung des elektrischen Feldes schon mehrfach kennen gelernt; das einfachste Beispiel dafür ist der Mittelpunkt zwischen zwei gleichen Massen desselben Vorzeichens.

Wenn wir demnach um irgend einen Punkt eines Feldes uns eine kleine Kugel geschlagen denken und alle Radien gezogen so kann V nicht nach allen diesen Richtungen abnehmen oder nach allen zunehmen, sondern wenn es nach einzelnen hin steigt so muss es nach anderen wieder sinken.

Es wird die Gleichung $\Delta V = 0$ auch öfters benützt um zu beweisen dass im Innern eines Hohlraumes eines geladenen Conductors das Potential überall constant ist; man argumentirt dabei folgendermassen: die ganze Begrenzung des Hohlraumes hat, als einem Conductor angehörig, jedenfalls ein constantes Potential; wäre nun längs einer Trajectorie durch den Hohlraum das Potential nicht constant so müsste sich irgendwo ein Maximum oder Minimum finden, da Anfangs- und Endwerth einander gleich sind. Ein solches Maximum oder Minimum widerspricht aber der Gleichung $\Delta V = 0$.

Das letztere ist nun eben falsch da nur ein absolutes Maximum oder Minimum dieser Gleichung widerspricht keineswegs aber eines längs einer bestimmten Richtung. Es müsste erst bewiesen werden dass längs aller Trajectorien die durch einen Punkt gehen das Potential entweder ein Maximum oder ein Minimum sein müsste, dann würde erst die Constanz desselben daraus folgen. Es ist aber ein derartiger Beweis auch ganz überflüssig da die Sache sich ohne weiteres aus Folgendem ergibt: Denkt man sich den Hohlraum durch eine leitende Substanz ausgefüllt, so ist das Potential darin jedenfalls constant, und die Dichte der Elektricität gleich Null, da diese sich nur an der Oberfläche befindet. Wenn wir nun die Füllmasse wieder entfernt denken so wird dadurch an der Lage der elektrischen Massen gegen jeden Punkt des Hohlraumes durchaus nichts geändert, und da das Potential nur von dieser Lage abhängt so muss es auch jetzt im ganzen Raume des Conductors constant sein.

Aber ein anderer wichtiger Satz lässt sich aus der Gleichung $\Delta V = 0$ folgern. Wie wir schon in den §§ 20—23 gesehen haben besitzt

eine elektrische Ladung m, wenn sie sich unter dem Einflusse anderer Ladungen im Raume befindet eine gewisse Energie; ist das von den übrigen Massen am Orte von m erzeugte Potential $= V$, so ist diese Energie gleich $m V$. Soll das Theilchen m sich aber im Gleichgewichte befinden so muss diese Energie ein Maximum oder Minimum sein; im ersteren Falle ist das Gleichgewicht ein labiles, im letzteren ein stabiles. Ist m so klein dass dadurch das elektrische Feld der übrigen Massen nicht gestört wird so muss, für den Fall des Gleichgewichtes, $m V$ und damit auch V ein Maximum oder Minimum werden. Da aber V ein absolutes Maximum oder Minimum nicht sein kann so kann die Masse m sich auch in keinem Punkte des Feldes im absolut stabilen oder absolut labilen Gleichgewichte befinden. Ist das letztere für einzelne Richtungen stabil so muss es in demselben Punkte für andere Richtungen labil sein.

Das eben Gesagte gilt aber nicht nur für eine sehr kleine Ladung m sondern für jeden beliebigen elektrisirten Körper, sei dieser leitend oder ein Isolator, der sich in einem elektrischen Felde befindet; denn die Existenz einer Gleichgewichtslage und die Art derselben hängt auch für diesen nur von den Kräften ab die auf ihn bewegend einwirken. Zu letzteren gehört aber nicht die Wechselwirkung der Theilchen seiner eigenen Ladung, da diese in Folge der Gleichheit von Wirkung und Gegenwirkung keine Bewegung desselben erzeugen kann wie immer sie auch auf demselben vertheilt sein mag. Es bleibt somit nur die Wirkung der übrigen elektrischen Massen; diese würden für sich allein — auch in der Neuvertheilung in die sie vielleicht durch Induction von Seiten des elektrischen Körpers versetzt wurden — ein Feld erzeugen für welches in jedem Punkte die Gleichung $\Delta V = 0$ gilt. Ueber dieses Feld lagert sich nun noch das des elektrischen Körpers, doch übt dieses auf den Bewegungszustand desselben keinen Einfluss, so dass sein Gleichgewicht wieder der Gleichung $\Delta V = 0$ genügen muss, wo V das von den übrigen Massen herrührende Potential ist. Und da dieses ein absolutes Maximum oder Minimum nicht hat so kann ein elektrischer Körper sich in einem elektrischen Felde überhaupt nicht im absolut labilen oder stabilen Gleichgewichte befinden; das Gleichgewicht, wenn ein solches existirt, muss für verschiedene Richtungen im Raum ein verschiedenartiges sein.

Dieses Theorem rührt von Earnshaw her.

Als ein weiteres Beispiel der Anwendung der Laplace'schen Gleichung wollen wir die Ladung eines ebenen Condensators bestimmen wenn dessen Dimensionen und Potentiale bekannt sind.

Wir nehmen an, die beiden parallelen Platten seien kreisförmig .nd in der Distanz d von einander, die gegen den Durchmesser derelben sehr klein sei. Der Zwischenraum ist demnach ein Kreiscylinder on sehr geringer Höhe dessen beide ebenen Begrenzungsflächen Iiveauflächen sind; die eine habe das Potential V_1 die andere V_2.)urch jeden Punkt des Zwischenraumes wird eine Niveaufläche gehen .ie eine zu den Platten parallele Ebene ist, wie dies schon in § 15 Fig. 38) hervorgehoben wurde.

Wählen wir demnach irgend einen Punkt P des Zwischenaumes und legen die x-Axe senkrecht zu den Plattenebenen die y-ınd z-Axe aber dazu parallel, verlegen den Anfangspunkt des Coordinatensystems in den entsprechenden Punkt der einen Platte, und bezeichnen ferner das Potential in P mit φ, so wird φ längs y und z einen constanten Werth haben, und nur längs x variiren.

Wir haben sonach

$$\frac{d\varphi}{dy} = \frac{d\varphi}{dz} = 0 \text{ und } \frac{d^2\varphi}{dy^2} = \frac{d^2\varphi}{dz^2} = 0.$$

Da sich aber im Punkte P keine Elektricität befindet so muss dort $\Delta\varphi = 0$ sein; man hat also auch

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = 0$$

und daraus folgt

$$\frac{d\varphi}{dx} = C$$

wo C eine zu bestimmende constante Grösse bedeutet. Durch Integration der vorstehenden Gleichung ergibt sich

$$\varphi = C \cdot x + A$$

wo A gleichfalls eine Constante ist. Die Werthe von C und A lassen sich aus der Betrachtung der Grenzwerthe von φ an beiden Platten des Condensators leicht ermitteln, da ja auch für diese die vorstehende Gleichung noch gelten muss. Für die eine Platte haben wir $\varphi = V_1$ und $x = 0$, und für die zweite: $\varphi = V_2$ und $x = d$.

Somit ergibt sich

$$V_1 = A$$
$$V_2 = C \cdot d + A = C \cdot d + V_1$$
$$C = \frac{V_2 - V_1}{d}$$
$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{V_2 - V_1}{d}.$$

Nach den Ausführungen des § 25 setzt uns aber die letztere Gleichung in den Stand die Dichte der Elektricität an jeder der Platten anzugeben, denn es ist ganz allgemein

$$\mu = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn}$$

wenn μ die Flächendichte irgend einer geladenen Fläche bedeutet und $\frac{dV}{dn}$ das ebendaselbst herrschende Potentialgefälle in Richtung der Normale; die letztere fällt in unserem Beispiele aber mit der x-Richtung zusammen so dass wir schreiben können

$$\mu_1 = -\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{V_2 - V_1}{d} \text{ und } \mu_2 = -\mu_1$$

wenn wir mit μ_1 die Dichte auf der Platte V_1 und mit μ_2 die auf der Platte V_2 bezeichnen.

Ist die Fläche einer Condensatorplatte gleich S, so wird die Gesammtladung derselben $Q = \mu S$, da die Dichte eine constante ist: es wird also

$$Q_1 = -\frac{S}{4\pi} \cdot \frac{V_2 - V_1}{d} \text{ und } Q_2 = -Q_1.$$

Ist die eine Platte des Condensators, wie dies gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, zur Erde abgeleitet also z. B. $V_2 = 0$ so wird

$$Q_1 = \frac{S \cdot V_1}{4\pi d} \text{ und } Q_2 = -\frac{S \cdot V_1}{4\pi d}.$$

§ 29. Gleichung von Poisson.

Die Laplace'sche Gleichung $\Delta V = 0$ gilt nur so lange der betrachtete Punkt vollkommen ausserhalb der wirksamen elektrischen Massen liegt denn sonst werden einzelne der Distanzen r in den Formeln des § 27 unendlich klein und die dort vorgenommene Differentiation unter dem Summenzeichen ist nicht mehr statthaft; es fragt sich, welchen Werth nimmt der Ausdruck ΔV an wenn er sich auf einen Punkt bezieht der von continuirlich im Raume vertheilten elektrischen Massen umgeben ist, der demnach diesen selbst angehört? Die Lösung dieser Frage ist zuerst von Poisson gegeben worden und lässt sich auf folgende Weise erhalten.

Wir betrachten den Punkt P, Fig. 54 im Innern eines beliebigen Körpers A in welchem die Vertheilung der Elektricität gleichfalls eine ganz beliebige sein soll. Die Elektricitätsmenge die sich an irgend

einer Stelle in der Volumseinheit des Körpers vorfindet wollen wir die dort herrschende Raumdichte der Elektricität nennen und mit ρ bezeichnen. Wir theilen zunächst den ganzen Körper durch eine Kugelschale vom Radius R mit dem Centrum in O in zwei Theile, so dass der Punkt P innerhalb der Kugel OR zu liegen kommt. Das Potential V welches in P herrscht setzt sich dementsprechend aus zwei Theilen V_1 und V_2 zusammen, wovon der erste die Wirkung der innerhalb der Kugel R befindlichen Elektricitäten ist, der zweite aber von der Ladung des Körperrestes herrührt. Wir haben demnach

$$V = V_1 + V_2$$

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2.$$

In Bezug auf den Körperrest ist aber der Punkt P ein ganz ausserhalb gelegener, so dass wir auf ihn die Gleichung von Laplace anwenden können wonach sich ergibt

$$\Delta V_2 = 0; \ \Delta V = \Delta V_1.$$

Es handelt sich somit nur noch um die Bestimmung des Potentials das die innerhalb der Kugel gelegenen Massen in P erzeugen; zur Berechnung desselben wollen wir annehmen dass der Radius OR zwar von endlicher Grösse aber doch so klein gewählt sei dass wir die Dichte ρ innerhalb der Kugel ohne merklichen Fehler als constant ansehen können. Es muss jedoch bemerkt werden dass diese Annahme durchaus nicht nothwendig ist sondern dass man zu ganz demselben Resultate gelangt unter Voraussetzung einer variablen Dichte innerhalb R, nur gestaltet sich dann die Rechnung etwas langwieriger; wir wollen daher an obiger Annahme festhalten.

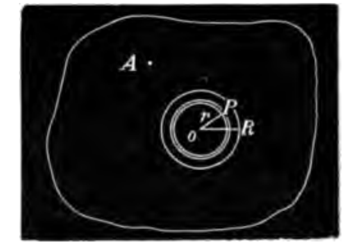


Fig. 54.

Wenn wir um O mit dem Radius $OP = r$ eine zweite Kugel legen, so theilen wir dadurch die erste wieder in zwei Theile wovon die Vollkugel Or in P das Potential v_1 und die Kugelschale das Potential v_2 erzeugen sollen. Wir haben folglich

$$V_1 = v_1 + v_2$$

$$\Delta V = \Delta V_1 = \Delta (v_1 + v_2).$$

Die Werthe von v_1 und v_2 lassen sich leicht angeben; v_1 ist bekanntlich so gross wie wenn die ganze Masse der Kugel r sich

in ihrem Centrum O befinden würde. Diese Masse m_1 ist gegeben durch den Ausdruck

$$m_1 = \frac{4}{3} r^3 \pi \cdot \rho$$

Es wird sonach

$$v_1 = \frac{4}{3} r^2 \pi \rho.$$

Das Potential v_2 erhalten wir folgendermassen: es ist das Potential das von der Kugelschale $(R - r)$ herrührt jedenfalls im ganzen inneren Raume ein constantes, mithin muss v_2 auch gleich dem Potentiale dieser Schale in O sein. Schneiden wir aus derselben eine unendlich dünne Schale heraus die von den Radien r und $r + dr$ begrenzt ist so ist das Volumen derselben gleich $4 r^2 \pi d r$ und die darin enthaltene Elektricitätsmenge $= 4 r^2 \pi \rho d r$. Das von derselben herrührende Potential $d v_2$ im Punkte O ist:

$$d v_2 = 4 r \pi \rho d r.$$

Daraus erhalten wir v_2:

$$v_2 = 4 \pi \rho \int_r^R r \, d r = 2 \pi \rho (R^2 - r^2).$$

Wir haben somit

$$V_1 = v_1 + v_2 = \frac{4}{3} r^2 \pi \rho + 2 \pi \rho (R^2 - r^2) = 2 \pi \rho R^2 - \frac{2}{3} \pi \rho r^2.$$

Wenn wir den Punkt O zum Anfangspunkte des Coordinatensystems wählen und die Coordinaten von P mit x, y, z bezeichnen so besteht die Relation

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

während R von x, y und z unabhängig ist.

Man erhält somit durch Differentiation

$$\frac{d V_1}{d x} = -\frac{4}{3} \pi \rho r \frac{d r}{d x} = -\frac{4}{3} \pi \rho x$$

wobei aus der vorangehenden Gleichung der Werth $r \frac{d r}{d x} = x$ zu entnehmen ist.

Durch Differentiation nach x y und z ergeben sich somit die Gleichungen

$$\frac{d V_1}{d x} = -\frac{4}{3} \pi \rho x$$

$$\frac{d V_1}{d y} = -\frac{4}{3} \pi \rho y$$

$$\frac{d V_1}{d z} = -\frac{4}{3} \pi \rho z.$$

Durch nochmalige Differentiation ergibt sich weiter:

$$\frac{d^2 V}{d x^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho$$

$$\frac{d^2 V}{d y^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho$$

$$\frac{d^2 V}{d z^2} = -\frac{4}{3}\pi\rho.$$

Die gesuchte Summe ΔV ist somit: $\Delta V = \Delta V_1 = -4\pi\rho$.

In dieser allgemeinen Form wurde die Gleichung zuerst von isson aufgestellt; man sieht dass die Gleichung von Laplace : ein specieller Fall derselben ist, denn wenden wir die vorstehende ̇ einen Punkt an der ganz ausserhalb der elektrischen Massen liegt ist dort eben $\rho = 0$ und es wird $\Delta V = 0$, wie in dem Ausdrucke ı Laplace.

Es ist wohl selbstverständlich dass eine Relation zwischen dem tentialgefälle an einem Orte und der Raumdichte der Elektricität ndaselbst von ganz besonderer Wichtigkeit ist und wir werden ch öfters Gelegenheit haben von derselben Gebrauch zu machen; r sei nur beispielshalber auf die folgenden zwei Consequenzen ıgewiesen.

Im Innern eines massiven geladenen Conductors hat das Potential erall denselben Werth; wenn aber V auf endlichen Strecken conınt ist so verschwinden alle Differentialquotienten d. h. es ist

$$\Delta V = -4\pi\rho = 0 \text{ oder } \rho = 0.$$

In einem Conductor muss also die Raumdichte überall gleich ıll sein, mit anderen Worten, die Elektricität kann sich nur auf r Oberfläche desselben befinden.

Da für einen elektrisirten Punkt ΔV nicht mehr gleich Null so kann das Potential daselbst ein absolutes Maximum oder Miniım haben je nachdem $\Delta = \mp$ oder $\rho = \pm$ ist. Der Fall wird auch mer eintreten wenn ρ genügend gross ist; ist $\rho = \mp\infty$ d. h. ist ıe Elektricitätsmenge in einem Punkte angehäuft so hat derselbe, e immer sonst das elektrische Feld in dem er sich befindet, auch schaffen sein mag, jedenfalls ein absolutes Maximum oder Minimum s Potentials. Für einen Punkt wo $\rho = 0$, ist ein derartiger Fall r ausgeschlossen wie wir im § 28 gesehen haben.

Von einer elektrischen Masse aus kann auch das Potentialälle nicht nach allen Richtungen des Raumes ein lineares sein, ın das würde voraussetzen dass

$$\frac{dV}{dx} = C; \ \frac{dV}{dy} = C'; \ \frac{dV}{dz} = C''$$

oder dass

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = \frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0 \text{ und somit } \Delta V = 0$$

ist, wo $C \ C' \ C''$ Constanten bedeuten. Ein derartig allseitig lineares Gefälle kann somit nur an einem Punkte ausserhalb der elektrischen Massen vorkommen und findet sich z. B. an jeder Stelle im Innern eines ebenen Condensators.

XI. Capitel.

Kraftströmung und Induction.

§ 30. Kraftströmung.

Es wurde schon im § 8 das Wesen und der allgemeine Charakter der Inductionserscheinungen erörtert; da das Phänomen der Induction ein bei jedem elektrischen Experimente auftretendes ist so wäre eine umfassende Lösung des Problems von höchster Wichtigkeit. Die zu beantwortende Frage wäre: gegeben sei eine bestimmte elektrische Ladung und in ihrer Nähe bestimmte Conductoren, wie wird auf letzteren die durch die Induction hervorgerufene Vertheilung der Elektricitäten sein?

Diese wichtige Frage ist in dieser Allgemeinheit leider nicht lösbar; wir müssen uns darauf beschränken die Wirkungen der Induction für ganz specielle Anordnungen der Conductoren anzugeben und im Uebrigen nach Betrachtungsweisen zu suchen die uns für alle Fälle in den Stand setzen wenigstens ein ungefähres Bild der auftretenden Inductionswirkung entwerfen zu können. Eine solche Betrachtungsweise soll im Folgenden näher erörtert werden.

Von einer jeden elektrischen Masse geht allseitig eine gewisse Kraftwirkung aus die uns in jedem Punkte des umgebenden Raumes ihrer Richtung nach durch die den Punkt passirende Kraftlinie gegeben ist; ist der Raum herum allseitig symmetrisch, befindet sich z. B. ausser der wirksamen Masse, die wir uns in einem Punkte concentrirt denken, sonst keine Elektricität und auch kein Conductor in demselben, so ist die Kraftwirkung gleichfalls allseitig symmetrisch und die Kraftlinien sind von der wirksamen Masse auslaufende, gleichmässig im Raume vertheilte Gerade. Hört diese Symmetrie des Raumes auf so gilt dies auch von der Anordnung der Kraftlinien, sie werden

dann im Allgemeinen nicht mehr Gerade sein, sie werden in einzelnen Theilen des Feldes, wo die Intensität der Kraft eine grössere ist, dichter aneinander liegen als in anderen von geringer Intensität; aber immer wird diese längs einer Kraftlinie sich continuirlich ändern.

Denken wir uns nun von irgend einer Niveaufläche ein kleines Stückchen abgegrenzt, so wird die ganze Peripherie desselben von einer Reihe von Kraftlinien getroffen die, neben einander herlaufend — da eine Durchschneidung von Kraftlinien nicht möglich ist — ein röhrenförmiges Gebilde aus dem Raume herausschneiden, das wir nach dem Vorgange Faraday's eine Kraftröhre oder ein Sphondiloid nennen wollen. Im Allgemeinen wird der Querschnitt einer solchen Kraftröhre von Ort zu Ort im Raume sich ändern, aber immer werden es dieselben Kraftlinien sein die diesen Querschnitt bestimmen, und die Anzahl Kraftlinien die sich im Innern der Röhre vorfindet wird gleichfalls eine constante sein. Da, wie wir früher schon gesehen haben, die Anzahl der Kraftlinien, die die Flächeneinheit einer Niveaufläche durchschneidet zugleich ein Maass für die dort herrschende Intensität der Kraft ist so werden wir daraus schliessen müssen dass die Kräfte an verschiedenen Stellen ein und derselben Kraftröhre sich umgekehrt wie die Querschnitte derselben an eben diesen Orten verhalten.

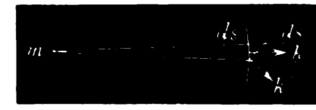


Fig. 55.

Nun betrachten wir das unendlich kleine Flächenstückchen $d\,s$ (Fig. 55) einer von der Masse m erzeugten Niveaufläche; die Kraft an diesem Orte sei k, und da $d\,s$ unendlich klein ist so können wir die Kraftröhre die dasselbe zum Querschnitt hat, für diesen Ort als cylindrisch d. h. die Kraftlinien als Gerade ansehen. Auf Massen die sich etwa hinter $d\,s$ befinden, würde von m aus eine gewisse Wirkung ausgeübt werden die die Fläche $d\,s$ passiren müsste, und in diesem Sinne und um den continuirlichen Charakter dieser Wirkung besonders hervorzuheben sprechen wir von einer sogenannten Kraftströmung die die Fläche $d\,s$ passirt; dieselbe wird in ihrer Intensität abhängen von der Grösse der Kraft k, die für das ganze Flächenstück $d\,s$ als constant anzusehen ist, und von der Ausdehnung des letzteren.

Bezeichnen wir die Kraftströmung mit f so haben wir demnach

$$f = k \cdot d\,s.$$

Aus dem früher Gesagten ergibt sich hieraus schon unmittelbar dass längs einer Kraftröhre, welche Form dieselbe auch immer an-

nehmen mag, die Kraftströmung eine constante ist, da in jedem Punkte k umgekehrt mit ds variirt.

Die Niveaufläche welcher ds angehört theilt demnach den Raum in zwei Theile aus dessen einem continuirlich in den anderen — durch ds hindurch — die Wirkung $k \cdot ds$ strömt. Um eine bestimmte Vorstellung mit diesen Worten zu verknüpfen könnte folgender Fall herangezogen werden. Wäre der ganze Raum mit absolut leicht beweglichen elektrischen Massen in unbegrenzter Menge erfüllt, und würde dadurch das Feld welches m erzeugt nicht alterirt, so würde sich eine continuirliche Strömung dieser Elektricitäten durch ds herausstellen deren Intensität proportional $k \cdot ds$ wäre, d. h. es würde in der Zeiteinheit eine der Grösse $k \cdot ds$ proportionale Quantität elektrischer Massen durch ds strömen.

Legen wir nun an Stelle von ds eine beliebige Fläche ds' (Fig. 55) durch die Kraftröhre so wird jetzt die Kraftrichtung diese Fläche nicht mehr normal schneiden; zerlegen wir aber die Kraft k in zwei Componenten tangential und normal zu ds' so wird erstere keinerlei Bewegung von der einen Seite von ds' nach der anderen hervorrufen können; letzteres kann nur durch die normale Componente, die wir mit k' bezeichnen wollen, geschehen. Die ganze Kraftströmung f' also, die die Fläche ds' passirt ist

$$f' = k' \cdot ds'.$$

Schliessen ds und ds' den Winkel α ein, so gilt dies auch von den beiden Normalen k und k' so dass die Relationen bestehen

$$ds = ds' \cdot \cos\alpha\,;\ k' = k \cdot \cos\alpha$$

woraus folgt

$$\frac{ds}{ds'} = \frac{k'}{k}\,;\ k \cdot ds = k' \cdot ds'\,;\ f = f'.$$

Es ist also die Kraftströmung an einem bestimmten Punkt der Röhre für jede Durchschnittsebene die gleiche.

Der vorstehende Satz ermöglicht die Beantwortung der Frage wie gross die Gesammtkraftströmung ist die durch eine geschlossene Fläche hindurch geht wenn sich die wirksamen Massen ausserhalb oder innerhalb derselben befinden, oder beides zugleich.

Es sei AB in Fig. 56 a eine solche ideelle Fläche die den Raum in zwei vollständig getrennte Theile zerlegt. Von der ausserhalb befindlichen Masse m gehe eine Kraftströmung aus die zum Theil auf AB trifft durch die Seite A eindringt und durch B wieder austritt. Diese Kraftströmung können wir uns als in unendlich vielen Kraftröhren vor sich gehend vorstellen von denen eine jede die Fläche

A B zweimal in entgegengesetztem Sinne durchschneidet. Seien die von einer solchen Kraftröhre aus *A B* herausgeschnittenen Stücke *d s* respective *d s'*, ihre Projectionen auf die zugehörigen Niveauflächen σ und σ' ihre Distanzen von der Masse m gleich r und r' die Kräfte in diesen Entfernungen k und k', die Kraftströmungen durch *d s* und *d s'* gleich f und f', so ist:

$$k = \frac{m}{r^2}; \quad \sigma = r^2 \, d w; \quad f = k \sigma = m \, d w$$

$$k' = \frac{m}{r'^2}; \quad \sigma' = r'^2 \, d w; \quad f' = k' \sigma' = m \, d w$$

$$f = f'.$$

Es sind also die Kraftströmungen die durch ein und dieselbe Kraftröhre in die Fläche *A B* eintreten respective aus derselben austreten numerisch einander gleich; wenn wir aber die nach einwärts gerichtete Kraft positiv zählen so müssen wir die nach auswärts gerichtete mit negativem Vorzeichen versehen d. h. es wird mit Rücksicht auf die Strömungsrichtung gegen *A B*

$$f = -f'.$$

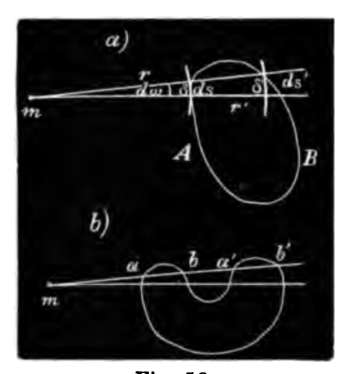


Fig. 56.

Da das gleiche auch für alle anderen Kraftröhren gilt die *A B* durchsetzen so sieht man dass die gesammte Kraftströmung die *A B* passirt gleich Null sein muss wenn dieselbe von einer ausserhalb gelegenen Masse herkommt. Ist also in irgend einem Punkte der Fläche die Kraft $= k$ in Richtung der Normale — wobei nach aus- und einwärts gerichtete Normalen mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen sind — und ist *d s* das betreffende Flächenstückchen so können wir vorstehenden Satz kurz durch die Gleichung

$$\int k \cdot d s = 0$$

ausdrücken, wobei das Integral sich über die ganze Fläche *A B* erstreckt.

Die vorstehende Gleichung behält ihre Giltigkeit auch wenn die Fläche von den Kraftröhren öfters als zweimal geschnitten wird, wie aus Fig. 56 *b* hervorgeht; denn tritt dieser Fall ein so ist die Zahl der Durchschneidungen jedenfalls eine gerade Zahl. Die eine

Hälfte dieser Durchschneidungen erfolgt in dem einen Sinn die andere in dem entgegengesetzten so dass die Kraftströmungen sich paarweise aufheben wie an den Stellen a, b und $a' b'$.

Befinden sich im Raume ausserhalb AB mehrere elektrische Massen, so dass von einer jeden eine gewisse Kraftströmung AB passirt so sind diese doch einzeln genommen gleich Null, es verschwindet also auch ihre Summe.

Anders wird die Sache wenn die wirksame Masse m sich innerhalb der Fläche AB befindet; die Kraftströmung f die durch ein Flächenstückchen hindurchgeht das von m aus unter dem Gesichtswinkel dw gesehen wird ist dem früheren zufolge:

$$f = m \cdot dw.$$

Jetzt sind aber sämmtliche Kraftströmungen von innen nach aussen gerichtet, ihre Summe verschwindet daher nicht mehr sondern wird gleich $m \int dw = 4\pi m$ da die Summe aller Raumwinkel um einen Punkt gleich 4π ist. Sind im Innern von AB mehrere Massen $m, m', m'' \ldots$ vorhanden so wird die Gesammtkraftströmung $4\pi (m + m' + m'' + \ldots) = 4\pi M$, wenn M die Summe aller vorhandenen elektrischen Massen bedeutet.

Wie man sieht ist die Kraftströmung von der Lage dieser Massen im Innern ganz unabhängig; wenn wir, wie früher, mit ds ein unendlich kleines Stück von AB bezeichnen und mit k die Kraft die daselbst in Richtung der Normale wirkt, so dass $k \cdot ds$ die Kraftströmung durch ds angibt so gilt die Gleichung

$$\int k \cdot ds = 4\pi M$$

wo M die innerhalb der geschlossenen Fläche befindlichen Elektricitäten bedeutet; ob ausserhalb derselben auch noch solche vorhanden sind oder nicht, das ändert den Werth der Kraftströmung durch die Fläche nicht.

Wie man sieht ist die frühere Gleichung $\int k \cdot ds = 0$ nur ein specieller Fall der vorstehenden. Ausser den beiden Fällen wo die wirksame Masse sich innerhalb oder ausserhalb der geschlossenen Fläche befindet ist auch noch der dritte möglich dass dieselbe sich in der Fläche selbst befindet; in diesem Falle wird

$$\int k \cdot ds = \Omega M$$

wo Ω den Raumwinkel bedeutet den alle Tangenten an die Fläche in dem Punkte einschliessen wo sich M befindet oder den Gesichtswinkel unter welchem die Fläche von M aus erscheint; für einen äusseren Punkt wird $\Omega = 0$, für einen inneren wird $\Omega = 4\pi$, wodurch sich die beiden früheren Gleichungen ergeben. Die letzte, allgemeine Lösung der gestellten Aufgabe rührt von Gauss her, die beiden speciellen wurden schon von Green angegeben.

Da die Kraft K in Richtung der Normale identisch ist mit dem negativen Werthe des Potentialgefälles in gleicher Richtung so können wir die gewonnenen Relationen auch in der Form schreiben:

$$-\int \frac{dV}{dn}\,ds = 0; \quad -\int \frac{dV}{dn}\,ds = 4\pi M; \quad -\int \frac{dV}{dn}\,ds = \Omega M$$

wenn wir mit n die Richtung der Normale und mit M die innerhalb, respective auf der Fläche gelegenen Massen bezeichnen.

Wenn wir das früher schon zur Erläuterung des Begriffes der Kraftströmung verwendete Beispiel auch auf die vorstehenden Sätze anwenden so ergibt sich Folgendes: stünde irgend eine ideelle, geschlossene Fläche unter dem Einfluss einer oder mehrerer äusserer elektrischer Massen, und wären im ganzen Raum frei bewegliche Elektricitätstheilchen in unbeschränktem Maasse vorhanden, ohne dass dadurch das elektrische Feld gestört würde, so würden dieselben durch die geschlossene Fläche einerseits ein- andererseits ausströmen, und der Betrag dieser beiden Strömungen wäre numerisch der gleiche. Die Gesammtmenge welche nach Verlauf einer beliebigen Zeit von aussen nach innen transportirt würde wäre daher gleich Null.

Befindet sich die wirksame Masse aber innerhalb der Fläche so findet nur ein Strömen von innen nach aussen oder umgekehrt statt je nachdem die Masse positiv oder negativ ist; die nun nach Verlauf einer bestimmten Zeit in der einen oder anderen Richtung transportirte Quantität wird nicht mehr Null sondern proportional $4\pi m$ sein. Sind mehrere wirksame Massen gleichzeitig vorhanden so summiren sich ihre Wirkungen; befinden sich z. B. die beiden Massen $+m$ und $-m$ im Innern, so ist die ganze Kraftströmung jedenfalls gleich Null, da diese nur von der Quantität nicht von der Lage derselben abhängt, es würden also von unseren leicht beweglichen Elektricitätstheilchen in diesem Falle in jeder Zeit eben so viele die Fläche von aussen nach innen passiren wie in umgekehrter Richtung, so dass der schliessliche Effect des Transportes wieder gleich Null ist.

§ 31. Beispiele für die Anwendung des Principes der Kraftströmung.

Im Folgenden soll an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden wie sich das Princip der Kraftströmung in manchen Fällen sehr vortheilhaft zur Lösung gestellter Aufgaben verwenden lässt.

Es ist bekannt dass eine elektrisirte Kugel nach aussen ebenso wirkt als wenn ihre ganze Ladung im Centrum concentrirt wäre. Wir haben für diesen Satz auch schon früher einen Beweis kennen gelernt der, unter Anwendung auf das analoge Problem der Gravitation, zuerst von Newton gegeben wurde und ziemlich complicirter Natur ist; mit Hilfe des oben genannten Principes lässt der Satz sich aber sehr leicht ableiten.

Bezeichnen wir den Radius der Kugel mit r, ihre Ladung mit m, und betrachten wir einen Punkt P der in der Distanz R vom Kugelcentrum sich befindet. Die Grösse der Kraft in diesem Punkt sei k. Wir denken uns nun durch P eine zur ersten concentrische Kugel gelegt, also mit dem Radius R und untersuchen die Kraftströmung die diese Fläche passirt. Nach den früheren Sätzen gilt die Gleichung

$$\int k\, d\, s = 4\, \pi\, m.$$

Da in unserem Falle die Grösse von k längs der ganzen durch P gelegten Kugel jedenfalls constant ist, wie ja aus der Symmetrie der Anordnung folgt, so können wir auch schreiben

$$k \int d\, s = 4\, \pi\, m.$$

Es ist aber

$$\int d\, s = 4\, \pi\, R^2 \text{ und } k \cdot 4\, \pi\, R^2 = 4\, \pi\, m$$

und somit

$$k = \frac{m}{R^2},$$

das ist eben jene Intensität die in P herrschen würde wenn die ganze Ladung m sich im Centrum der Kugel befände.

Als weiteres Beispiel soll im Folgenden eine sehr kurze Ableitung der Poisson'schen Gleichung $\Delta\, V = -4\, \pi\, \rho$ gegeben werden.

Zu diesem Zwecke betrachten wir wieder einen Punkt P der beliebig von elektrischen Massen, auch in unmittelbarer Nähe, umgeben sein soll; nach P verlegen wir den Anfangspunkt eines rechtwinkligen Coordinatensystems und construiren uns daselbst einen

unendlich kleinen Würfel mit den Seiten dx, dy, dz. Ist die Dichte der Elektricität im Punkte P gleich ρ so wird die Elektricitätsmenge m die sich in diesem Würfel befindet:

$$m = \rho \cdot dx\, dy\, dz.$$

Ist der Punkt P irgend welchen elektrischen Kräften von aussen unterworfen so werden die nach den Coordinatenaxen genommenen Kraftcomponenten sein

$$X = -\frac{dV}{dx},\ Y = -\frac{dV}{dy},\ Z = -\frac{dV}{dz}$$

wenn V das Potential in P bedeutet.

Die Kraftströmung die den Würfel trifft zerlegen wir in ihre drei Componenten parallel den Coordinatenaxen und bezeichnen ihre Intensitäten mit f_x, f_y, f_z. Es gelten dann, wie leicht zu übersehen ist, die Beziehungen

$$f_x = X \cdot dy \cdot dz,\ f_y = Y \cdot dx\, dz;\ f_z = Z \cdot dx\, dy.$$

Den Kraftströmungen die einerseits in den Würfel eintreten stehen aber jene gegenüber die auf der anderen Seite desselben austreten; diese wollen wir mit f'_x, f'_y, f'_z bezeichnen. Die Kräfte die an den Rückseiten des Würfels wirken sind im Allgemeinen nicht mehr von derselben Intensität wie an den Eintrittsflächen; an Stelle von X, Y, Z kommen jetzt die Ausdrücke

$$X + \frac{dX}{dx}dx,\ Y + \frac{dY}{dy}dy,\ Z + \frac{dZ}{dz}dz$$

so dass die austretenden Strömungen die Form annehmen:

$$f'_x = \left(X + \frac{dX}{dx}dx\right) dy\, dz;\ f'_y = \left(Y + \frac{dY}{dy}dy\right) dx\, dz;$$

$$f'_z = \left(Z + \frac{dZ}{dz}dz\right) dx\, dy.$$

Die schliesslich den Würfel wirklich passirende Kraftströmung F ist demnach

$$F = (f'_x - f_x) + (f'_y - f_y) + (f'_z - f_z)$$

$$F = \left(\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz}\right) dx\, dy\, dz$$

und wenn wir noch die Relation

$$X = -\frac{dV}{dx},\ Y = -\frac{dV}{dy},\ Z = -\frac{dV}{dz}$$

berücksichtigen so können wir auch schreiben

$$F = -\left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right) dx\, dy\, dz$$

$$F = -\Delta V\, dx\, dy\, dz.$$

Nach dem Principe der Kraftströmung ist aber, da m die elektrische Masse im Innern des Würfels bedeutet

$$F = 4\pi m = 4\pi\rho\, dx\, dy\, dz$$

und somit wird

$$-\Delta V dx\, dy\, dz = 4\pi\rho\, dx\, dy\, dz \text{ oder } \Delta V = -4\pi\rho$$

was eben der Ausdruck der Poisson'schen Gleichung ist.

Als weiteres Beispiel für die Anwendung des Principes der Kraftströmung sei noch ein einfacher Beweis dafür gegeben dass ein absolutes Maximum des Potentials nur an einem Punkte mit + Ladung herrschen kann; sei dieser Punkt P und denken wir uns um denselben eine geschlossene Fläche in unmittelbarer Nähe geschlagen so muss, wenn in P ein absolutes Maximum herrschen soll die Kraftströmung durch diese Fläche nach allen Richtungen positiv sein d. h. eine positive Summe ergeben. Nun ist aber $\int k\, d s = 4\pi m$, es muss also m einen positiven Werth besitzen. Auf gleiche Weise ergibt sich natürlich dass ein absolutes Minimum des Potentials sich nur an einem Orte mit negativer Ladung vorfinden kann.

Es wurde schon erwähnt dass die Intensitäten der Kräfte an verschiedenen Stellen ein und derselben Kraftröhre sich umgekehrt verhalten wie die Querschnitte der Röhre an den betreffenden Stellen; auch dieser Satz fliesst unmittelbar aus dem Principe der Kraftströmung. Denn bezeichnen wir zwei in beliebiger Distanz von einander gelegene Querschnitte der Kraftröhre mit $d s$ und $d s'$, die an den beiden Orten herrschenden Kräfte mit k und k' sowie die Kraftströmungen durch $d s$ und $d s'$ mit f und f' so bestehen die Relationen

$$f = k \cdot d s;\; f' = k' \cdot d s'.$$

Die drei Flächen $d s$, $d s'$ und das dazwischenliegende Mantelstück der Kraftröhre schliessen einen Theil des Raumes vollständig ein in welchem sich keine Elektricität befindet, wir können demnach auf denselben den Satz

$$\int k\, d s = 0$$

anwenden. Von dieser Summe verschwindet jener Theil offenbar der sich über das Mantelstück der Kraftröhre erstreckt weil für diesen überall $k = 0$ ist da senkrecht zu den Kraftlinien keine Wirkung stattfindet. Es bleibt somit nur noch die Kraftströmung durch $d s$ und durch $d s'$ übrig so dass wir haben

$$f + f' = 0$$

wobei wir aber jetzt f und f' mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmen haben da die eine Strömung in den betrachteten Raum ein- die andere aber aus demselben austritt. Es folgt somit

$$k\,d\,s = k'\,d\,s'$$

$$\text{oder } \frac{k}{k'} = \frac{d\,s'}{d\,s}$$

d. h. die Kräfte verhalten sich umgekehrt wie die Röhrenquerschnitte.

Ist das elektrische Feld ein derartiges dass die Kraftlinien einander parallel verlaufen, wie z. B. im Innern eines ebenen Condensators so bleibt der Werth des Querschnittes ungeändert und damit auch die Intensität der Kraft, das elektrische Feld ist ein homogenes, das Potentialgefälle ein lineares.

§ 32. Folgerungen aus dem Princip der Kraftströmung; Faraday's Theorem.

Wir betrachten eine leitende mit Elektricität geladene Fläche AB, Fig. 57, die zwei Körper von einander trennt; wenn die Ladung auf AB in Ruhe bleiben soll so setzt das voraus dass mindestens einer der beiden Körper ein Isolator sei. Die Dichte dieser Ladung wollen wir mit μ bezeichnen. In der Richtung der Normalen auf die Fläche werden dann nach beiden Seiten Kräfte ausgeübt die im Allgemeinen von verschiedener Grösse sind und die wir mit K_+ und K_- bezeichnen, wobei uns die Indius $+$ und $-$ die Richtungen nach aussen und innen von AB andeuten. Auf AB denken wir uns ein unendlich kleines Flächenstückchen ds abgegrenzt und die Kraftröhre KK die demselben entspricht construirt, ferner denken wir uns zwei Niveauflächen NN' und $N_1 N_1'$ unendlich nahe an AB gezogen; die Durchschnittsflächen dieser mit der Kraftröhre werden dann gleichfalls die Grösse ds haben. Der geschlossene Raum welcher so durch die Kraftröhre und die beiden Stücke ds begrenzt ist enthält eine Elektricitätsmenge $m = \mu\,d\,s$ und die Gesammtkraftströmung F die ihn passirt folgt der Gleichung:

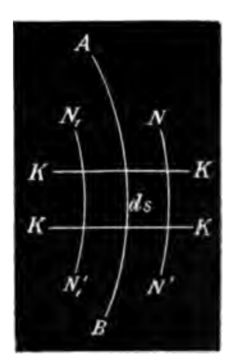


Fig. 57.

$$F = 4\,\pi\,\mu\,d\,s.$$

Diese Strömung F setzt sich aus den beiden die Stücke ds passirenden Strömungen zusammen und ist, wenn wir letztere mit f_+ und f_- bezeichnen.

$$F = f_+ + f_-.$$

Unter Berücksichtigung des Umstandes dass wir nach entgegengesetzten Seiten wirkende Kräfte auch mit verschiedenen Vorzeichen versehen müssen erhalten wir weiter:

$$f_+ = K_+ \, d s; \; f_- = - K_- \, d s$$

und somit

$$F = K_+ - K_- = 4 \pi \mu.$$

Die Kräfte K können wir auch in der üblichen Weise durch die negativen Differentialquotienten des Potentials nach der Richtung der Normalen ausdrücken und schreiben

$$-\left(\frac{d V}{d n}\right)_+ - \left(\frac{d V}{d n}\right)_- = 4 \pi \mu.$$

Diese Gleichung ist eine der wichtigsten der Elektrostatik und bekannt unter dem Namen der charakteristischen Gleichung einer elektrisirten Fläche: sie gilt, wie aus dem Gang der Ableitung hervorgeht, für alle Punkte einer beliebig gekrümmten Fläche jedoch mit der Einschränkung dass diese Krümmung eine stetige sei: denn würde das Flächenstück $d s$ eine Kante oder Ecke enthalten so dürften wir die Dichte μ auf demselben nicht mehr constant, die Ladung also auch nicht mehr $= \mu \, d s$ setzen. Der Ausdruck für F wäre dann unbestimmt.

Trennt die Fläche $A B$ nicht zwei Isolatoren von einander sondern einen Isolator von einem Leiter, so verschwindet die Kraft in der Richtung der Normalen gegen das Innere des letzteren da ja hier das Potential ein constantes ist. Befindet sich z. B. der Leiter an der concaven Seite von $A B$ (in Fig. 57) so wird

$$\left(\frac{d V}{d n}\right)_+ = 0 \text{ und } \left(\frac{d V}{d n}\right)_- = - 4 \pi \mu.$$

Dieselbe Gleichung resultirt wenn wir den Leiter an die andere Seite von $A B$ verlegen und berücksichtigen dass wir ursprünglich der Kraft K_- das entgegengesetzte Vorzeichen ertheilt haben wie der Kraft K_+.

Die letzte Gleichung ist nichts anderes als der Ausdruck des schon in § 25 erwähnten Coulomb'schen Satzes.

Im Folgenden wollen wir das Princip der Kraftströmung auf das Problem der Induction anwenden. Es sei A (Fig. 58) ein positiv geladener Conductor dem gegenüber sich ein anderer, ursprünglich unelektrischer, B, befinde. Die Kraftlinien die von A ausgehen werden zum Theil auf B treffen zum Theil aber auch ins Unendliche verlaufen oder auf anderen etwa noch vorhandenen Conductoren endigen.

Betrachten wir nun eine bestimmte Kraftröhre die auf A das Flächenstück $d s_1$, umschliesst und, ganz auf B treffend, dort das gleichfalls unendlich kleine Stück $d s_2$ der Oberfläche abgrenzt. Wenn A positiv geladen war so werden wir auf der zugekehrten Seite von B eine inducirte negative Ladung erwarten deren Grössenverhältniss näher untersucht werden soll. Wir verlängern zu diesem Zwecke die Kraftröhre um ein beliebiges Stück beiderseits in die Conductoren hinein und denken uns dieselbe durch zwei Flächen N_1 und N_2 im Innern der Conductoren geschlossen. Es entsteht so ein vollkommen abgegrenzter Raum der die Ladungen von $d s_1$ und $d s_2$ umhüllt. Wenn wir auf diesen das Princip der Kraftströmung anwenden so werden wir bemerken dass durch die ganze Begrenzung dieses Raumes gar keine Kraftströmung hindurchgeht da die Kraft an allen Punkten derselben Null ist: an der Mantelfläche weil dieselbe von Kraftlinien gebildet wird und an den beiden Endflächen weil dieselben im Innern von Conductoren liegen. Bezeichnen wir demnach die Dichte auf $d s_1$ mit μ_1 und auf $d s_2$ mit μ_2 so folgt, wenn wir die Kraftströmung wieder F nennen:

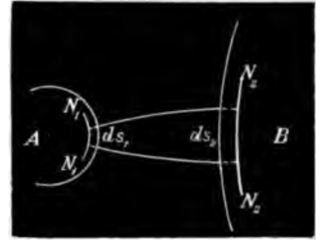


Fig. 58.

$$F = 4\pi(\mu_1 d s_1 + \mu_2 d s_2) = 0$$

oder

$$\mu_1 d s_1 = - \mu_2 d s_2.$$

Es folgt somit der wichtige Satz: Wenn eine Kraftröhre von irgend einem Conductor ausgeht und auf irgend einem Conductor endigt, so sind die beiden correspondirenden Flächenstücke dieser Conductoren mit gleichen und entgegengesetzten Elektricitätsmengen geladen.

Gesetzt wir hätten einen positiv elektrisirten Conductor so würde dieser in seiner ganzen Umgebung ein elektrisches Feld erzeugen und jeder Körper der an irgend eine Stelle desselben gebracht würde wäre einer Induction unterworfen welche der dem betreffenden Orte zukommenden Kraftströmung entspricht; wenn wir aber auf irgend eine Weise dafür sorgen dass diese Kraftströmung gar nicht jenen Ort erreicht so werden wir auch offenbar den Körper vor Induction schützen. Nennen wir den elektrisirten Conductor A und den der Induction unterworfenen Körper B und denken wir uns nun zwischen beide einen zur Erde abgeleiteten Leiter C eingeschoben so ist klar

dass jetzt — je nach der Grösse von C — wenigstens ein Theil der Kraftröhren die sonst B getroffen hätten schon auf C endigen werden; der Leiter C absorbirt so gewissermassen die Kraftwirkung von A und schützt dadurch den Körper B. Ist C mit der Erde verbunden, also auf dem Potential Null so gehen von ihm selbst nach rückwärts d. h. gegen B keine Kraftlinien aus und es findet daher zwischen diesen beiden keine Wechselwirkung statt.

Ist C isolirt so steigt sein Potential und es gehen jetzt auch von seiner Rückfläche Kraftlinien gegen B — die B zugekehrte Seite von C hat jetzt eine positive Ladung — so dass dieses nun zwar nicht direct von A dafür aber von C inducirt wird. Es hat gleichsam C die Kraftwirkung von A absorbirt und gibt sie wieder gegen B hin ab. Ist C zwar isolirt aber von sehr grossen Dimensionen, so steigt sein Potential durch die Anwesenheit von A nicht merklich, die inducirte positive Ladung wird sich an die entferntesten Punkte begeben und der Körper B erscheint wieder geschützt wie wenn C zur Erde abgeleitet wäre.

Es sind dies die schon früher betrachteten Phänomene des elektrischen Schattens.

Wenn sich in der Nähe des eben betrachteten Conductors A sehr viele Leiter C befinden so wird eine beträchtliche Anzahl der von A ausgehenden Kraftröhren auf diesen endigen und somit auch ein grosser Theil der Kraftwirkung von A absorbirt werden und nur indirect in den dahinter gelegenen Raum eintreten, wenn die Conductoren C isolirt sind oder auch ganz verschwinden, wenn diese mit der Erde in Verbindung stehen. Denken wir uns schliesslich A vollständig von einer leitenden Hülle eingeschlossen — also von unendlich vielen sich vollständig berührenden Conductoren C umgeben — so lässt sich der Effect leicht übersehen: die sämmtlichen Kraftröhren die von A ausgehen endigen nun auf der Hülle und die ganze Kraftwirkung wird von dieser absorbirt. Bezeichnen wir mit ds ein Flächenelement von A, mit μ dessen Dichte, die correspondirenden Flächenstücke der Innenseite der Hülle mit ds' und ihre Dichte mit μ' so haben wir zufolge des früher gefundenen Satzes über die Ladungen der Endfläche einer Kraftröhre:

$$\int \mu \, ds = - \int \mu' \, ds' \quad \text{oder} \quad M = - M'$$

wenn M und M' die Gesammtladungen auf A und auf der Innenseite der Hülle bezeichnen.

Ist die Hülle isolirt so wird sich auf der Aussenseite derselben die Ladung $+M$ befinden und zwar wird sich diese auf derselben gerade so vertheilen als wären im Innern derselben gar keine Ladungen vorhanden, also so als hätte man der ursprünglich unelektrischen Hülle einfach die Ladung $+M$ mitgetheilt. Es folgt dies aus dem Umstande dass die Hülle ein Leiter, das Potential also im ganzen Raume zwischen der inneren und äusseren Begrenzung derselben ein constantes ist; die Kraft durch die Masse der Hülle hindurch und somit auch die auf die äussere Ladung ist gleich Null.

Es wird in diesem Falle also die ganze von A ausgehende Kraftwirkung von der Hülle absorbirt, von deren äusserer Ladung aber auch in vollem Betrag wieder in den umgebenden Raum abgegeben da diese Ladung gleich der von A ist. Es erscheint solcherweise der umgebende Raum also nicht vor der Wirkung von A geschützt sondern diese wird nur insofern anders räumlich vertheilt als an die Stelle der beliebig im Innenraum der Hülle gelegenen Ladung $+M$ die über die Aussenfläche der Hülle normal vertheilte gleiche Ladung $+M$ tritt. Wäre der Conductor A eine Kugel und die Hülle eine concentrische Kugelschale so würde die Kraftwirkung an jedem Punkte ausserhalb der letzteren von der Anwesenheit der Hülle ganz unabhängig sein.

Wird die leitende Hülle mit der Erde verbunden so nimmt sie das Potential Null an, die auf ihrer äusseren Oberfläche frei vertheilte Ladung verschwindet und es geht somit in den äusseren Raum gar keine Kraftströmung mehr über; jeder Körper der sich in letzterem befindet ist somit vor der Wirkung von A vollständig geschützt.

Würde sich der Conductor A nicht innerhalb sondern ausserhalb der Hülle befinden so würde, wie leicht einzusehen ist durch dieselbe der ganze Innenraum vor Induction geschützt werden, und zwar unabhängig davon ob die Hülle isolirt oder abgeleitet ist. In ersterem Falle würde das Potential im Innern nicht Null bleiben sich aber an allen Punkten gleichmässig ändern so dass die Kraft überall Null bleibt.

Man kann die vorstehenden Sätze durch folgendes Experiment illustriren. Man verbinde ein isolirtes metallenes Gefäss von möglichst geschlossener Form, etwa einen Cylinder dessen Höhe das 8—10fache seines Durchmessers ist, mit einem Goldblatt-Elektroskop und senke von oben eine elektrisirte kleine Kugel die sich an einem isolirenden Faden befindet, allmälig in dasselbe. Das Elektroskop wird dabei eine steigende Divergenz der Blättchen anzeigen die aber wieder ver-

schwindet wenn man die Kugel aus dem Gefäss herauszieht. Wenn die Kugel eine gewisse Tiefe im Innern der Hülle erreicht hat so wird ein weiteres Einsenken derselben keine merkliche Vergrösserung des Elektroskopausschlages mehr hervorbringen, und wenn die Kugel schliesslich den Boden des Gefässes berührt so wird der Ausschlag doch ungeändert bleiben; aber die Ladung verschwindet jetzt nicht wenn man die Kugel herauszieht, dafür ist aber letztere unelektrisch geworden. Es beweist dieser Versuch dass die an der Innenseite der Hülle inducirte Ladung gleich und entgegengesetzt derjenigen der Kugel war die sie bei der Berührung vollständig neutralisirte.

Ein experimenteller Nachweis der Schutzwirkung geschlossener metallener Gehäuse wurde bereits früher erörtert.

Die vorstehenden Sätze wurden zuerst von Faraday experimentell erwiesen und es führen dieselben auch den Namen des Faraday'schen Theorems.

§ 33. Folgerungen aus dem Faraday'schen Theorem.

Aus dem Faraday'schen Theorem ergeben sich einige wichtige Sätze von denen wir schon in § 15 bei Besprechung der elektrischen Felder Anwendung gemacht haben. Wir haben gesehen dass eine isolirte leitende Hülle die eine elektrische Masse $+m$ vollständig umgibt an ihrer Innenfläche die Ladung $-m$ an der Aussenfläche die Ladung $+m$ erhält. Letztere ist normal über die Hülle vertheilt da die beiden Ladungen $+m$ und $-m$ im Innern nach aussen keine Wirkung üben; erstere dagegen wird im Allgemeinen nicht normal über die Innenseite der Hülle ausgebreitet sein sondern ihre Anordnung wird von der Gestalt der Hülle sowie von der Lage der Masse $+m$ in ihrem Innern abhängen. Hat aber die Hülle zufällig die Gestalt einer Niveaufläche der Masse $+m$ d. h. können wir die Dicke der Hülle vernachlässigen und ihre beiden Begrenzungsflächen als zwei benachbarte Niveauflächen betrachten dann wird offenbar auch die inducirte Ladung $-m$ eine normale Vertheilung haben. Denn befindet sie sich auf einer Niveaufläche von $+m$ so treffen alle Kraftlinien dieselbe in normaler Richtung und ergeben somit keine Bewegungscomponenten in der Richtung der bedeckten Fläche; auf dieser setzt sich somit die Ladung $-m$ lediglich unter dem Einfluss jener Kräfte ins Gleichgewicht die die einzelnen Theile derselben auf einander ausüben d. h. sie vertheilt sich normal.

Da einerseits die beiden gleichvertheilten Ladungen $+m$ und $-m$ der Hülle nach aussen offenbar keine Wirkung üben, anderer-

seits aber dasselbe von den Ladungen — m und + m im Innern gilt so folgt daraus dass die Wirkungen der beiden Massen + m nach aussen einander gleich sind. Wir können demnach den Satz aussprechen: wenn eine Masse + m von irgend einer Niveaufläche vollständig umschlossen ist so bleibt die Wirkung auf alle ausserhalb dieser Fläche gelegenen Punkte unverändert wenn wir die Masse + m aus dem Innern auf die Niveaufläche verlegen und sich dort frei vertheilen lassen. Wir haben in § 15 diesen Satz in der folgenden Form ausgesprochen: wenn man in einem durch beliebig vertheilte elektrische Massen erzeugten Felde sich die Kraftlinien und Niveauflächen gezeichnet denkt so kann man innerhalb einer Niveaufläche die Zeichnung weglöschen ohne dass an der Richtigkeit der Zeichnung des ausserhalb dieser Fläche befindlichen Stückes dadurch etwas geändert wird. Die Zeichnung bezieht sich jetzt nur auf den Fall dass der ganze von der betreffenden Niveaufläche umschlossene Raum plötzlich leitend geworden ist wodurch sich die ursprünglich innerhalb derselben befundenen Massen an dessen Oberfläche begeben haben.

Die Wirkung einer elektrischen Masse nach aussen können wir also immer ersetzen durch die Wirkung einer gleichen Masse die normal über irgend eine der Niveauflächen vertheilt ist.

Es folgt daraus auch dass die Wirkung nach aussen gleich Null wird wenn wir auf irgend einer die Masse + m umschliessenden Niveaufläche die Ladung — m normal vertheilen; da die letztere, als normale Ladung nach innen keine Kraft ausübt so wird dadurch das elektrische Feld im Innern gar nicht verändert und wir können daher bei irgend einer graphischen Darstellung die sämmtlichen ausserhalb einer bestimmten Niveaufläche gelegenen Kraftlinien und Niveauflächen weglöschen, ohne an den innerhalb derselben gelegenen und an deren Richtigkeit etwas zu ändern. Der Rest des elektrischen Feldes entspricht dann den innerhalb der betreffenden Niveaufläche gelegenen Massen + Σm und einer auf dieser Niveaufläche normal vertheilten Ladung — Σm.

Eine Anwendung dieser Sätze auf verschiedene elektrische Felder führt zu sehr instructiven Veranschaulichungen. So ergibt sich z. B. unmittelbar dass zwei gleiche und entgegengesetzte Massen nicht von einer Niveaufläche gemeinsam umschlossen sein können, wenigstens nicht in endlicher Entfernung, denn sonst müsste die Wirkung ausserhalb derselben gleich Null sein. Im folgenden Paragraph werden wir Gelegenheit haben diese Sätze weiter anzuwenden.

§ 34. Problem der Induction. Princip der elektrischen Bilder.

Es wurde schon erwähnt dass eine allgemeine Lösung des Problems der Induction nicht möglich ist d. h. es ist nicht möglich bei gegebener Vertheilung beliebiger Leiter und ihrer Potentiale — von denen einzelne natürlich auch Null sein können — ganz allgemein die Dichte der Ladungen an allen Punkten anzugeben. Wir müssen uns in dieser Beziehung theils auf eine allgemeine Betrachtung, theils auf die Lösung einzelner Aufgaben beschränken von denen einige bereits erörtert wurden.

Ganz allgemein lässt sich nur das Folgende aussagen: ist ein positiv geladener Körper A gegeben und befinden sich in dessen Nähe verschiedene Leiter die mit der Erde verbunden sind, also das Potential Null haben, so werden alle Kraftröhren die von A ausgehen entweder ins Unendliche verlaufen oder auf diesen Leitern endigen. Diese letzteren werden sämmtlich nur negative Ladungen besitzen, von ihnen wird somit keine Kraftströmung in den Raum ausgehen, ihre Wirkung beschränkt sich lediglich auf eine Absorption der von A ausgehenden. Da nach einem früheren Satze die correspondirenden Endflächen einer Kraftröhre immer gleiche und entgegengesetzte Ladungen besitzen, und da nicht alle von A ausgehenden Kraftlinien die Leiter treffen so folgt daraus unmittelbar dass die Summe der auf letzteren inducirten negativen Ladungen kleiner sein muss als die ursprüngliche Ladung von A. Einander gleich würden diese beiden Grössen nur werden wenn alle Kraftlinien von A auf Leiter treffen d. h. wenn A vollständig von einer abgeleiteten Hülle umgeben ist.

Sind die Leiter in der Nähe von A isolirt und ursprünglich unelektrisch so werden sie zwar auch einen Theil der Kraftwirkung von A absorbiren denselben aber vollständig wieder an den umgebenden Raum abgeben; denn da die inducirten negativen und positiven Ladungen auf ihnen einander gleich sind so werden von letzteren ebenso viele Kraftlinien wieder ausgehen als auf ersteren endigen. Bilden nun die Leiter eine geschlossene aber isolirte Hülle, so wird diese die Kraftströmung von A vollständig absorbiren aber auch in vollem Betrag wieder in den Raum abgeben.

Wir würden die Dichte in jedem Punkte der inducirten Leiter anzugeben, und damit die Aufgabe allgemein zu lösen im Stande sein, wenn sich der Verlauf der Kraftlinien vollkommen bestimmen

liesse; das ist aber nur in den allerwenigsten Fällen möglich, nur wenn sehr einfache geometrische Bedingungen vorliegen.

Es hat W. Thomson auf Grund einer genialen Anschauung des Problems zuerst den Weg gezeigt wie man in vielen Fällen zu einer Lösung der gestellten Aufgabe mit Hilfe des sogenannten Principes der elektrischen Bilder gelangen kann.

Wir betrachten zur Erläuterung dieses Principes zunächst den einfachen Fall dass eine leitende unendliche Ebene $A\,A'$ (Fig. 59) der Induction einer elektrischen Masse $+m$ unterworfen sei die sich im Punkte P befinde, in der Distanz a von $A\,A'$. Die Aufgabe wird gelöst sein wenn wir im Stande sind für jeden Ort der unendlichen Ebene die Dichte der dort inducirten Ladung anzugeben.

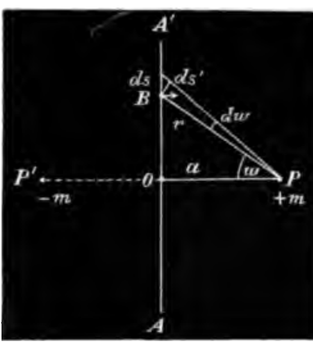


Fig. 59.

Folgende drei Punkte sind bei dieser Aufgabe a priori einleuchtend:

1. Es ist gleichgiltig ob die Ebene $A\,A'$ zur Erde abgeleitet oder isolirt ist denn da ihr Potential überall constant sein muss so wird es jedenfalls den Werth Null behalten. Die inducirte positive Elektricität, die sich ins Unendliche ausbreitet kann das Potential der Ebene um nichts Endliches erhöhen, und andererseits wird das Potential das von $+m$ im Punkte P und von der inducirten negativen Ladung herrührt in unendlicher Entfernung jedenfalls gleich Null und somit auch an allen anderen Punkten der Ebene $A\,A'$.
2. Alle Kraftlinien die von $+m$ ausgehen, müssen die Ebene $A\,A'$ treffen und zwar unter senkrechter Incidenz.
3. Nach dem Gesetze der correspondirenden Flächenstücke muss daher die gesammte inducirte negative Ladung gleich $-m$ sein. Diese Ladung ist auf $A\,A'$ natürlich im Gleichgewichte.

Für irgend einen Punkt B auf $A\,A'$ in der Distanz r von P können wir die Dichte der Ladung angeben sobald uns die Grösse der Kraft die dort normal auf $A\,A'$ wirkt bekannt ist; denn es gilt die allgemeine Relation:

$$\mu = \frac{1}{4\pi} K$$

wo K eben diese Kraft bedeutet. Diese letztere können wir aber aus folgender Betrachtung entnehmen.

Wenn die leitende Ebene $A A'$ nicht vorhanden wäre, sondern statt dessen sich im Punkte P' — der in Bezug auf $A A'$ die Lage eines Spiegelbildes von P hat — eine Ladung — m befände so würden die sämmtlichen Kraftlinien von P in P' endigen und das elektrische Feld jene Gestalt annehmen wie sie in Fig. 36 für zwei gleiche und entgegengesetzte Massen schon dargestellt wurde. Die Kraftlinien würden sämmtlich die Symmetrieebene $A A'$ normal durchsetzen, und diese selbst hätte das Potential Null.

Wenden wir nun auf diesen Fall die Sätze der vorangegangenen Paragraphe an, speciell den welcher besagt dass es immer gestattet ist, wenn eine Niveaufläche eine elektrische Masse vollkommen umschliesst, diese Masse sich über die betreffende Niveaufläche im Gleichgewichte vertheilt zu denken ohne dass dadurch das elektrische Feld ausserhalb irgendwie verändert wird.

Nun können wir die Ebene $A A'$ als die letzte Niveaufläche ansehen die den Punkt P' und die Masse — m vollkommen umschliesst, und lassen wir daher die Ladung — m sich auf $A A'$ ins Gleichgewicht setzen so wird dadurch der Verlauf der Kraftlinien und Niveauflächen in der ganzen rechten Hälfte der Figur nicht afficirt. Wir haben somit jetzt eine unendliche Ebene vom Potential Null auf welcher sich unter dem Einfluss der Masse $+ m$ in P die Ladung — m ins Gleichgewicht setzt und es ist klar dass dieser Fall mit der ursprünglich gestellten Aufgabe identisch ist.

Die Kraft K welche im Punkte B thätig ist können wir jetzt angeben, sie ist die Summe der Wirkungen von P und P' und normal auf $A A'$ gerichtet; man erhält so:

$$K = \frac{2\, m\, a}{r^3} \text{ und } \mu = \frac{K}{4\,\pi} = \frac{m\, a}{2\,\pi\, r^3}.$$

Damit ist die Aufgabe auch gelöst: es ist die Dichte an irgend einem Punkte der dritten Potenz der Entfernung von der wirksamen Masse umgekehrt proportional.

W. Thomson nennt den Punkt P' das elektrische Bild von P; die Analogie mit dem optischen Phänomen ist in der That einleuchtend denn bei letzterem ersetzt die spiegelnde Fläche $A A'$ für den ganzen rechtsseitigen Raum die Lichtquelle in P' gerade so, wie in elektrischer Beziehung die Ladung — m auf $A A'$ die Wirkung von — m in P' für denselben Raum ersetzt.

Wäre die Ebene $A A'$ nicht vorhanden, so würde die Kraftströmung von P nach allen Seiten gleichmässig ausgehen und durch

ein Flächenstück ds des Raumes das von P aus unter dem Gesichtswinkel dw erscheint, ginge ein Betrag f hindurch:

$$f = m\,d\,w.$$

Ist aber die leitende Ebene $A\,A'$ vorhanden so geht durch dasselbe Flächenstück ds eine andere Kraftströmung f_1 die gegeben ist durch:

$$f_1 = K\,d\,s.$$

Unter Berücksichtigung des früher für K gefundenen Werthes ergibt sich somit:

$$f_1 = K \cdot d\,s = \frac{2\,m\,a}{r^3}\,d\,s = \frac{2\,m\,a}{r^3} \cdot \frac{d\,s'}{\cos w} = \frac{2\,m\,a}{r^3} \cdot \frac{r^3\,d\,w}{a} =$$

$$= 2\,m\,d\,w = 2\,f.$$

Es erscheint jetzt die Kraftströmung an jedem Punkte der Ebene $A\,A'$ doppelt so gross, was dem Umstande zuzuschreiben ist dass bei alleiniger Anwesenheit von $+m$ im Raume nur die Hälfte der Kraftlinien die Ebene $A\,A'$ passirt, während letztere, wenn sie mit leitender Substanz belegt ist von allen von $+m$ ausgehenden Kraftlinien geschnitten wird.

Da wir den ganzen linksseitigen Raum in Fig. 59 als von der Niveaufläche $A\,A'$ mit dem Potentiale Null umschlossen betrachten können so folgt daraus auch dass das Potential an jedem Punkt dieses Raumes den Werth Null behält; es übt somit die Masse $+m$ auf die Orte hinter der Ebene $A\,A'$ keinerlei Wirkung aus, was mit dem schon besprochenen Falle des elektrischen Schattens identisch ist.

Man kann die Induction die zwischen einem elektrisirten Punkt und einer zur Erde abgeleiteten Platte — welch letztere die Wirkung einer unendlichen Ebene praktisch ersetzen soll — stattfindet dadurch experimentell veranschaulichen, dass man eine kleine Kugel die mit einem Büschel leicht beweglicher Fäden, etwa Streifen aus Seidenpapier, versehen ist mit der Elektrisirmaschine ladet, wobei sich das Büschel allseitig gleichmässig sträubt indem die einzelnen Fäden desselben sich in die Richtung der Kraftlinien einstellen. Nähert man nun die abgeleitete Platte von einer Seite dem Büschel so sieht man wie alle Kraftlinien von der anderen Seite sich herüberbiegen um die Platte zu erreichen, und so die Dichte der Kraftlinien auf dieser Seite auf den doppelten Betrag steigt.

Wir wollen im Folgenden das Princip der elektrischen Bilder dazu benützen noch einen weiteren, für viele experimentelle Untersuchungen sehr wichtigen Fall der Induction zu untersuchen, nämlich

den wo ein elektrisirter Punkt auf eine leitende isolirte oder nicht isolirte Kugel wirkt.

Bei Untersuchung des elektrischen Feldes das von zwei ungleichen und entgegengesetzten Massen erzeugt wird haben wir gesehen dass stets die kleinere von einer kugelförmigen Niveaufläche umschlossen ist und dass dieser das Potential Null zukommt; in Fig. 33 ist diese Niveaufläche punktirt angegeben. Wir können uns diesen Umstand nun zunutze machen indem wir bedenken dass das elektrische Feld ausserhalb der Kugelfläche nicht geändert wird wenn wir die innerhalb befindliche Masse über dieselbe sich ausbreiten lassen und dass das Gleiche für den inneren Raum gilt wenn wir der Masse auf der Kugelfläche das entgegengesetzte Vorzeichen geben. Was die Lage dieser Kugelfläche anlangt so sei daran erinnert dass in Bezug auf dieselbe die Punkte in welchen sich die beiden wirksamen Massen befinden conjugirte Punkte sind.

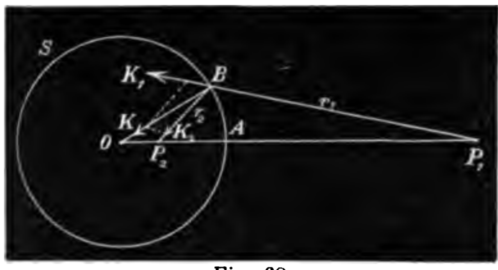


Fig. 60.

In Fig. 60 sei S die besprochene Kugelfläche vom Potential Null; in P_1 und P_2 befinden sich zwei Massen m_1 und m_2, von denen wir die letztere als negativ annehmen wollen. Die von m_1 ausgehenden Kraftlinien durchschneiden zum Theil die Fläche S und endigen in m_2, zum Theil verlaufen sie auch ins Unendliche. Wir denken uns nun die negative Ladung m_2 über S verbreitet, und ins Gleichgewicht gesetzt unter dem Einflusse von m_1 so wird dadurch das elektrische Feld ausserhalb S gar nicht verändert und das Potential von S bleibt nach wie vor gleich Null. Es ist klar dass dieser Zustand vollkommen mit jenem übereinstimmt den man erhalten würde wenn man eine leitende und zur Erde abgeleitete Kugel S der Induction von m_1 aussetzt, denn das elektrische Feld ist in beiden Fällen das gleiche. Wir können nun aus den Kraftwirkungen die in unserem Falle auftreten und die uns bekannt sind die Kraft ableiten, die an irgend einem Punkte B der Fläche S wirkt, und aus dieser Kraft erhalten wir mit Hilfe des Coulomb'schen Satzes auch die dort herrschende Dichte der Ladung womit unsere Aufgabe gelöst ist.

Haben wir es also in Wirklichkeit mit einer Ladung $+ m_1$ in P_1 und mit einer abgeleiteten Kugel S zu thun, so können wir die Wirkung der auf letzterer inducirten Ladung in Bezug auf alle Punkte

ausserhalb durch die Wirkung einer Ladung $-m_2$ in dem zu P_1 conjugirten Punkte P_2 innerhalb der Kugel ersetzen. Diese Vertauschung hat selbstverständlich auch noch für die Punkte der Fläche S selbst Giltigkeit und wir können so die Kraft k die z. B. im Punkte B auf die Masseneinheit wirkt als die Resultirende der beiden Kräfte k_1 und k_2 ansehen die von den respectiven Massen m_1 und m_2 ausgeübt würden. Die Ladung $-m_2$ bezeichnen wir als das Bild der Ladung m_1 in der Kugel S.

Was zunächst das numerische Verhältniss dieser Massen zu einander anlangt so geht dasselbe aus der Bedingung hervor dass das Potential längs S gleich Null sein soll. Bezeichnen wir die Entfernungen des Punktes B von den Massen mit r_1 und r_2 so ergibt sich das Potential V in B:

$$V = 0 = \frac{m_1}{r_1} - \frac{m_2}{r_2}$$

und daraus resultirt

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{r_1}{r_2} = C.$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$BP_1 = r_1 \qquad OP_1 = x_1 \qquad OA = R$$
$$BP_2 = r_2 \qquad OP_2 = x_2 \qquad P_1P_2 = \delta.$$

Da P_1 und P_2 conjugirt sind so ergibt sich das Verhältniss:

$$OP_2 : OB = OB : OP_1$$

und daraus folgt

$$\triangle OP_2B \sim \triangle OBP_1 \text{ sowie } \sphericalangle P_1 = \sphericalangle B.$$

Aus letzterer Gleichheit resultirt aber $\triangle Bk_1k \sim \triangle BP_2P_1$ woraus man die Verhältnisse

$$k : \delta = k_1 : r_2 = k_2 : r_1$$

entnimmt. Die Richtungen von k k_1 und k_2 sind dadurch bestimmt dass erstere gegen das Centrum der Kugel, letztere aber gegen P_1 und P_2 gerichtet sein müssen. Es ist demnach

$$k = \delta \cdot \frac{k_1}{r_2} = \delta \cdot \frac{k_2}{r_1}.$$

Die Kräfte k_1 und k_2 ergeben sich aber unmittelbar denn es ist

$$k_1 = \frac{m_1}{r_1^2}\,;\; k_2 = \frac{m_2}{r_2^2}.$$

Es ist hier, wie im Folgenden, nur auf den absoluten Werth der Kräfte, nicht auf ihr Vorzeichen Rücksicht genommen, da über

die Natur der Ladungen die aus denselben resultiren kein Zweifel sein kann; dieselben müssen ja immer das entgegengesetzte Vorzeichen haben wie die inducirenden.

Man erhält somit die beiden identischen Gleichungen

$$k = \delta \cdot \frac{m_1}{r_1^2 r_2} = \delta \cdot \frac{m_2}{r_2^2 r_1}$$

oder unter Berücksichtigung des Umstandes dass $\frac{r_1}{r_2} = C$ ist:

$$k = \delta \cdot C \cdot \frac{m_1}{r_1^3} = \delta \cdot \frac{m_2}{C \cdot r_2^3}.$$

Bezeichnen wir die Dichte der inducirten Ladung im Punkte B mit σ so muss diese der allgemein giltigen Gleichung

$$\sigma = \frac{k}{4\pi}$$

genügen, so dass man erhält

$$\sigma = \frac{\delta \cdot C \cdot m_1}{4\pi r_1^3} = \frac{\delta \cdot m_2}{4\pi C r_2^3}.$$

Diese beiden Ausdrücke für σ lassen sich nun passend verwerthen je nachdem eine inducirende Masse m_1 ausserhalb oder eine Masse m_2 innerhalb der zur Erde abgeleiteten Kugel s sich befindet.

1. Es befinde sich die Masse m_1 ausserhalb, in der Distanz x_1 vom Kugelmittelpunkte.

Die in B inducirte Dichte σ_a ist dann gegeben durch:

$$\sigma_a = \frac{\delta \cdot C \cdot m_1}{4\pi r_1^3}$$

in welchem Ausdruck noch die Grössen δ und C durch entsprechende gegebene Grössen auszudrücken sind.

Man hat

$$\delta = x_1 - x_2$$

und

$$x_2 : R = R : x_1; \quad x_2 = \frac{R^2}{x_1}; \quad \delta = x_1 - \frac{R^2}{x_1} = \frac{x_1^2 - R^2}{x_1}.$$

Ferner ist $C = \frac{r_1}{r_2}$. Es besteht aber das Verhältniss $\frac{r_1}{x_1} = \frac{r_2}{R}$ und daraus hat man

$$C = \frac{x_1}{R}.$$

Es ergibt sich demnach

$$\sigma_a = m_1 \frac{(x^2 - R^2)}{4 \pi R r_1^3}.$$

In diesem Ausdrucke kommen nur mehr Grössen vor die durch die gestellte Aufgabe unmittelbar gegeben sind.

2. In ganz analoger Weise ergibt sich die Dichte σ_i wenn die inducirende Masse m_2 innerhalb der Kugel liegt. Es wird dann

$$\delta = \frac{R^2 - x_2^2}{x_2} \text{ und } C = \frac{R}{x_2}$$

und schliesslich

$$\sigma_i = m_2 \frac{(R^2 - x_2^2)}{4 \pi R \cdot r_2^3}.$$

Man sieht dass in beiden Fällen die Dichte der dritten Potenz des Abstandes des inducirten Punktes von der wirksamen Masse umgekehrt proportional ist.

Die vorstehenden Formeln geben somit über die Art der Vertheilung der Elektricität auf einer inducirten Kugel Aufschluss; zur vollständigen Lösung unserer Aufgabe ist es aber noch nothwendig den absoluten Betrag der ganzen inducirten Ladung anzugeben. In dieser Beziehung müssen wir wieder die beiden Fälle unterscheiden dass die wirksame Masse sich innerhalb und ausserhalb der Kugel befinde.

1 *a*. Die wirksame Masse befinde sich ausserhalb der Kugel.

Die Gesammtladung lässt sich in diesem Falle auf verschiedene Weise finden; sie ergibt sich zunächst durch Integration des Ausdruckes für σ_a über die ganze Kugelfläche. Wir erhalten für die inducirte Ladung m_2 den Ausdruck:

$$m_2 = 2 \pi \frac{R}{x_1} \int_{x_1 - R}^{x_1 + R} \sigma_a r_1 \, dr_1 = \frac{m_1 (x_1^2 - R^2)}{2 x_1} \cdot \int_{x_1 - R}^{x_1 + R} r_1^{-2} \, dr_1 = \frac{R}{x_1} \cdot m_1.$$

Zu dem gleichen Resultate gelangen wir auch durch die früher schon erörterte Relation

$$C = \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_1}{R} \text{ woraus folgt } m_2 = \frac{R}{x_1} m_1.$$

Da wir bei Ableitung der Ausdrücke für σ auf das Vorzeichen keine Rücksicht genommen haben so gelten die vorstehenden Formeln auch nur dem absoluten Werthe nach; es muss aber offenbar die inducirte Ladung immer das entgegengesetzte Zeichen haben wie die

inducirende. Das geht auch aus der Betrachtung der Potentiale die hier ins Spiel kommen unmittelbar hervor; denn da die Kugel das Potential Null hat so gilt das jedenfalls auch für ihren Mittelpunkt, das Potential V_0 daselbst muss aber der folgenden Relation genügen:

$$V_0 = 0 = \frac{m_1}{x_1} + \frac{m_2}{R}$$

woraus man unmittelbar entnimmt

$$m_2 = -\frac{R}{x_1} m_1.$$

Es ist also die von einer in einem Punkte concentrirten elektrischen Masse auf einer zur Erde abgeleiteten Kugel inducirte Elektricität dem Radius dieser Kugel proportional; in einer concentrischen Kugel vom doppelten Radius wird also auch das Doppelte inducirt.

Wird $x_1 = R$ d. h. fällt die inducirende Masse in die Kugeloberfläche, so wird $m_2 = m_1$; wir haben dann denselben Fall wie den schon betrachteten einer unendlichen Ebene und eines Punktes in endlicher Distanz davon.

2*a*. Die wirksame Masse befindet sich innerhalb der Kugel.

Auf diesen Fall lässt sich das Faraday'sche Theorem unmittelbar anwenden und es folgt daraus dass die inducirte Ladung gleich und entgegengesetzt der inducirenden sein muss. Wir müssen ja auch auf einer Niveaufläche die die Ladung m_1 vollständig umschliesst eine Ladung $-m_1$ sich vertheilen lassen wenn wir wollen dass das Feld innerhalb ungeändert bleiben, das Potential ausserhalb aber überall Null werden soll. Letztere Bedingung muss aber erfüllt sein wenn die wirksame Masse durch eine geschlossene, abgeleitete Hülle vom übrigen Raume getrennt ist.

Wir haben bisher nur den Fall betrachtet dass die der Induction unterworfene Kugel abgeleitet war; diese Bedingung wollen wir nun fallen lassen und die Aufgabe auch für eine isolirte vorher unelektrische Kugel lösen.

Da ist zunächst klar dass die Gesammtladung die durch Induction erzeugt wird immer gleich Null sein muss, und da eine Ladung bei gegebenen Bedingungen stets nur eine einzige Gleichgewichtslage hat so können wir uns dieselbe auch auf die Weise entstanden denken dass die Kugel zuerst abgeleitet war wobei sie eine gewisse Ladung erhielt, und dass wir ihr dann, nach ihrer Isolirung, eine gleiche und entgegengesetzte Quantität zuführen wodurch ihre Gesammtladung wieder auf Null gebracht wird. Wir wollen die

Fälle dass die inducirende Masse sich innerhalb oder ausserhalb der Kugel befinde wieder von einander trennen.

1 *b*. Die wirksame Masse m_1 befinde sich ausserhalb der isolirten Kugel.

Da die gesammte inducirte Ladung gleich Null ist so erzeugt sie auch kein Potential im Mittelpunkte der Kugel; das Potential V_0 daselbst ist somit

$$V_0 = \frac{m_1}{x_1}.$$

Wäre die Kugel abgeleitet so würde auf ihr, dem früheren zufolge die Ladung m_2 inducirt:

$$m_2 = -m_1 \frac{R}{x_1}.$$

Um die Kugel daher auf die Ladung Null zu bringen müssten wir ihr, nachdem sie wieder isolirt gedacht wird, eine gleiche und entgegengesetzte Ladung mittheilen also die Menge

$$+ m_1 \frac{R}{x_1}$$

und diese würde sich offenbar gleichmässig über die ganze Kugel vertheilen, da daselbst vorher das Potential überall einen constanten Werth hatte. Zu der ursprünglichen Dichte σ_a auf der abgeleiteten Kugel käme also jetzt noch die längs der ganzen Oberfläche constante Grösse μ_a dazu:

$$\mu_a = \frac{m_1 \frac{R}{x_1}}{4 R^2 \pi} = \frac{m_1}{4 R \pi x_1}.$$

Die Gesammtdichte σ_a' der isolirten Kugel wird somit:

$$\sigma_a' = \sigma_a + \mu_a.$$

Nehmen wir m_1 als positiv an so wird σ_a negativ und μ_a positiv zu nehmen sein. Wir erhalten

$$\sigma_a' = \frac{m_1}{4 R \pi x_1} - \frac{m_1 (x_1^2 - R^2)}{4 R \pi \cdot r_1^3} = \frac{m_1}{4 R \pi} \left(\frac{1}{x_1} - \frac{(x_1^2 - R^2)}{r_1^3} \right).$$

In dieser Formel erscheint somit die gesuchte Dichte nur mehr von den durch die Aufgabe direct gegebenen Grössen abhängig.

Man bemerkt dass für kleinere Werthe von r_1 die Dichte negativ, für grosse positiv wird, entsprechend der Art wie die inducirten Elektricitäten sich auf der Kugel vertheilen. Die beiden entgegengesetzt

elektrischen Partien der Kugel werden durch einen Kreis von einander getrennt für den $\sigma'_a = 0$ ist. Die Lage desselben ergibt sich aus der Bedingung:

$$\sigma'_a = 0\,; \quad \left(\frac{1}{x_1} - \frac{x_1^2 - R^2}{r_1^3}\right) = 0.$$

Der gesuchte Kreis befindet sich somit in einer Distanz r_1 von m_1 die durch den Ausdruck

$$r_1 = \sqrt[3]{x_1\,(x_1^2 - R^2)}$$

gegeben ist. Die Ebene des Kreises steht natürlich senkrecht auf x_1 und er ist nichts anderes als die Schnittlinie der Kugeloberfläche mit der Niveaufläche vom Potentiale $\frac{m_1}{x_1}$ die bei Abwesenheit der Kugel durch den Ort ihres Mittelpunktes hindurchgehen würde. Die Kugelfläche selbst ist ein ausgebauchter Theil dieser Niveaufläche. Für alle endlichen Werthe von x_1 liegt das Centrum dieses Kreises zwischen dem Mittelpunkte und der Oberfläche der Kugel auf der Linie x_1. Wird x_1 gegen R sehr gross so wird $r_1 = x_1$ und der Kreis halbirt die Kugel; wird $x_1 = R$ d. h. rückt die inducirende Masse unendlich nahe an die Oberfläche der Kugel heran so wird $r_1 = 0$, die inducirte negative Ladung sammelt sich in einem Punkte der Fläche an.

2 *b*. Die inducirende Masse befinde sich innerhalb der isolirten Kugel.

Die Quantität der Masse sei $+ m_2$; es wird dann nach dem Faraday'schen Theorem an der Innenfläche der Kugel die Menge $- m_2$ inducirt und eine gleiche positive Menge vertheilt sich, wenn die Kugel isolirt ist, homogen über die Aussenfläche. Wir haben jetzt also die beiden Dichten σ_i und μ_i erstere innen letztere aussen.

Nach dem früheren ist

$$\sigma_i = - \frac{(R^2 - x_2^2)\, m_2}{4\,\pi\, R\, r_2^3} \text{ und } \mu_i = + \frac{m_2}{4\, R^2\, \pi}.$$

Davon ist σ_i eine wesentlich negative Grösse da immer $R > x_2$ sein muss es ist also die ganze Innenseite negativ geladen; das Entgegengesetzte gilt von der Aussenseite.

Fassen wir die Gesammtladung an beiden Seiten eines Stückes der Kugelschale ins Auge so wird dieselbe

$$\sigma'_i = \mu_i - \sigma_i = \frac{m_2}{4\,\pi\, R} \left(\frac{1}{R} - \frac{(R^2 - x_2^2)}{r_2^3}\right).$$

Dieselbe kann positiv oder negativ sein je nach der Lage der inducirenden Masse im Innern. Auch hier gibt es wieder einen Kreis

mit der Dichte $\sigma_i' = 0$ welcher beide Partien der Kugel von einander trennt. Seine Lage ergibt sich aus der Relation

$$\frac{1}{R} = \frac{R^2 - x_2^2}{r_2^3}.$$

Man erhält

$$r_2 = \sqrt[3]{R\,(R^2 - x_2^2)}.$$

XII. Capitel.

Capacität.

§ 35. Begriff der Capacität.

Verbinden wir einen Leiter mit einer Elektricitätsquelle von constantem Potential z. B. mit einem Pole einer galvanischen Batterie deren anderer Pol zur Erde abgeleitet ist so finden wir dass derselbe binnen kürzester Zeit das Potential des mit ihm verbundenen Poles angenommen hat; dementsprechend findet sich auf dem Leiter jetzt auch eine bestimmte Ladung die aus der constanten Elektricitätsquelle auf ihn übergeflossen ist. Wiederholen wir diesen Versuch mit beliebig geformten anderen Leitern so finden wir dieselben alle nach ihrer Verbindung mit der Batterie bis zum gleichen Potential, aber je nach ihrer Grösse und Form mit sehr verschiedenen Elektricitätsmengen geladen. Da diese Potentiale nur durch die auf den Leitern angehäuften Elektricitätsmengen hervorgerufen werden so schliessen wir daraus dass man verschiedenen Leitern um sie alle auf ein gewisses Potential zu bringen auch verschiedene Ladungen ertheilen muss. Da es für einen jeden Körper immer nur eine einzige Gleichgewichtsvertheilung der Elektricität gibt so wird bei einer Verdopplung der Ladung auch das Potential auf das Doppelte steigen, eine n-fache Ladung wird das n-fache Potential erzeugen. Wir verstehen nun unter der Capacität eines Körpers diejenige Elektricitätsmenge die demselben zugeführt werden muss um sein Potential um die Einheit zu steigern. Bezeichnen wir diese Grösse mit C, mit M die eventuelle Ladung eines Körpers die auf demselben ein Potential V erzeugt, so folgt aus dem Vorstehenden die Gleichung

$$C = \frac{M}{V}.$$

Es muss gleich bemerkt werden dass diese Grösse C für ein und denselben Körper keineswegs unter allen Umständen eine Con-

stante ist; es hängt nämlich das Potential eines Leiters nicht nur von seiner eigenen Ladung ab sondern auch von allen Elektricitätsmengen die sich etwa in der Nähe auf anderen Körpern vorfinden und wir werden sehen dass man aus einer passenden Verwerthung dieses Umstandes Nutzen ziehen kann um die Capacität eines Leiters ganz beliebig zu verändern.

Wollen wir demnach die Grösse C als eine Constante eines Körpers bestimmt definiren, so müssen wir sagen sie ist das Verhältniss von Ladung zu erzeugtem Potential, wenn der betreffende Körper von allen übrigen Körpern so weit entfernt ist dass zwischen denselben keine merkliche Induction mehr Platz greift.

Der Begriff der Capacität ist aus der Wärmelehre entlehnt wo wir mit dem gleichen Worte diejenige Wärmemenge bezeichnen die man einem Körper zuführen muss um seine Temperatur um die Einheit zu steigern; diese Grösse ist gleichfalls keine Constante aber ihre Veränderlichkeit hängt von anderen Umständen ab als die der entsprechenden elektrischen Grösse. Die thermische Capacität ist eine Function der Temperatur die der Körper schon besitzt sie ist dagegen ganz unabhängig von dem Vorhandensein und der Vertheilung von Wärmemengen in dessen Umgebung.

§. 36. Capacitäten ähnlicher Körper.

Die Capacitäten zweier geometrisch ähnlicher Körper verhalten sich zu einander wie die Grössen irgend zweier homologer Linien dieser Körper; es ergibt sich die Richtigkeit dieses Satzes aus der folgenden Betrachtung. — Wir nennen zwei geometrische Gebilde ähnlich wenn irgend eine Linie des einen stets ein bestimmtes Vielfaches der homologen Linie des anderen ist. Sei das Verhältniss zweier solcher Linien gleich K so nennen wir K den Aehnlichkeitsfactor. Wir denken uns nun zwei ähnliche Körper von beliebiger Form, und in denselben zwei ähnlich gelegene Punkte P und P', sowie zwei weitere auf der Oberfläche ähnlich gelegene Punkte A und A'. Es ist dann $PA = K \cdot PA'$.

Construiren wir uns in den Punkten P und P' zwei ähnlich gelegene Raumwinkel, beide von der Oeffnung w so werden dieselben aus den Oberflächen zwei homologe Flächenstücke σ und σ' ausschneiden für die nach bekannten Gesetzen die Relation gilt

$$\frac{\sigma}{\sigma'} = K^2.$$

Denken wir uns nun den beiden Körpern die gleiche Elektricitätsmenge M mitgetheilt so wird die Vertheilung auf den beiden Oberflächen offenbar nach dem gleichen Gesetze vor sich gehen und es werden die homologen Flächenstücke σ und σ' auch mit der gleichen Ladung q versehen werden. Die Potentiale V und V' die durch diese Ladungen in den Punkten P und P' erzeugt werden sind dann

$$V = \Sigma \frac{q}{r} \text{ und } V' = \Sigma \frac{q}{r'}$$

wenn wir mit r, r' die Entfernungen der Punkte P, P' von den betreffenden Oberflächenelementen bezeichnen, und wobei die Summe über die ganze Oberfläche der Körper zu erstrecken ist.

Es ist aber $r = K \cdot r'$ und somit

$$V' = \Sigma \frac{q}{r'} = \Sigma \frac{q}{\frac{r}{K}} = K \Sigma \frac{q}{r} = K \cdot V.$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der für die Capacität allgemein giltigen Formel und bezeichnen wir die Capacitäten der beiden Körper mit C und C' so erhalten wir

$$C = \frac{M}{V}, \; C' = \frac{M}{V'}, \; \frac{C}{C'} = \frac{V'}{V} = K.$$

Das Verhältniss der Capacitäten geometrisch ähnlicher Körper ist also in der That durch den Aehnlichkeitsfactor derselben gegeben; es würden z. B. die Capacitäten zweier Kugeln sich wie ihre Durchmesser, die Capacitäten zweier Würfel sich wie ihre Seitenlängen verhalten.

§ 37. Capacität eines Systems von Leitern.

Wir wollen nun die Frage untersuchen wie gross die Capacität eines zusammenhängenden Systems von Leitern ist wenn die Capacitäten der einzelnen Theile gegeben sind. Da, wie bereits erörtert wurde, die Capacität eines Körpers nur insolange als eine Constante angesehen werden kann als sich in dessen Nähe keine inducirenden Massen befinden, so können wir die Aufgabe im Allgemeinen nur für den Fall lösen, dass die einzelnen Theile des Systems sich sehr weit von einander entfernt befinden. Da dieselben aber unter einander leitend verbunden sein sollen so ist die Aufgabe überhaupt nur näherungsweise lösbar insofern nämlich, als wir uns die einzelnen

Systemtheile durch Leiter von verschwindend kleiner Capacität mit einander verbunden denken. Wir können dann den Einfluss der auf letzteren angehäuften gleichfalls verschwindend kleinen Elektricitätsmengen auf die übrigen Theile des Systems vernachlässigen. Experimentell würde man diesen Fall dadurch verwirklichen, dass man von einander weit entfernte Conductoren durch möglichst feine Metalldrähte verbindet, ein Fall der ja in der Praxis ausserordentlich oft vorkommt. Unter Vernachlässigung der auf den Verbindungsdrähten angehäuften Elektricitätsmengen — und diese Vernachlässigung ist in der Praxis sehr häufig gestattet — haben wir es dann mit einem leitenden System von Conductoren zu thun deren Capacitäten constant sind.

Nehmen wir zunächst nur zwei solcher Conductoren A und B an und denken wir uns dieselben noch von einander isolirt; wir führen denselben solche Elektricitätsmengen m_1 und m_2 zu dass sie dadurch beide auf dasselbe Potential v gebracht werden. Sind die Capacitäten von A und B respective c_1 und c_2 so gilt somit die Relation

$$v = \frac{m_1}{c_1} = \frac{m_2}{c_2}.$$

Nun denken wir uns beide Körper durch einen ausserordentlich feinen Draht mit einander in leitende Verbindung gesetzt; da die Potentiale beiderseits gleich waren so gibt die Verbindung zu keinerlei Bewegung der Ladungen Anlass und auch das Potential des so entstehenden Leitersystems wird den Werth v haben. Die Gesammtladung des Systems ist gleich $m_1 + m_2$ und bezeichnen wir die Capacität desselben mit C so muss die Gleichung gelten

$$C = \frac{m_1 + m_2}{v}$$

und ersetzen wir hier die Werthe von m_1 und m_2 durch die aus der vorangehenden Gleichung folgenden so ergibt sich

$$C = \frac{v\,c_1 + v\,c_2}{v} = c_1 + c_2.$$

Es ist also die Capacität des Systems gleich der Summe der Capacitäten beider Theile. Es ist klar dass wenn wir zu den Körpern A und B noch einen dritten, vierten u. s. f. hinzufügen, wir schliesslich auf ein System von beliebig vielen Theilen kommen für welches die Relation gilt

$$C = \Sigma\, c.$$

Wir können den vorstehenden Satz dazu benützen um das Ausgleichspotential zu bestimmen, welches eintritt wenn mehrere Körper von verschiedener Capacität und beliebigem Potential mit einander in leitende Verbindung gebracht werden.

Es seien z. B. zwei Körper mit den Capacitäten c_1 und c_2 gegeben und mit den Ladungen m_1 und m_2. So lange sie von einander isolirt sind werden ihre Potentiale v_1 und v_2 sein.

$$v_1 = \frac{m_1}{c_1} \quad v_2 = \frac{m_2}{c_2}.$$

Vereinigen wir nun beide Conductoren ohne ihre Capacitäten zu verändern zu einem System, so wird letzteres die Ladung $m_1 + m_2$ und die Capacität $c_1 + c_2$ besitzen und diese beiden Grössen bestimmen den Werth des Potentials V das nun dem System zukommt. Man hat

$$V = \frac{m_1 + m_2}{c_1 + c_2} = \frac{v_1 c_1 + v_2 c_2}{c_1 + c_2}.$$

Für eine beliebige Anzahl von Conductoren erhält man ohneweiters

$$V = \frac{\Sigma m}{\Sigma c} = \frac{\Sigma v c}{\Sigma c}.$$

Der obige Ausdruck für das Ausgleichspotential zweier Körper ist ganz analog dem Ausdrucke für die Ausgleichstemperatur zweier Massen m_1 und m_2 desselben Körpers die mit den ursprünglichen Temperaturen t_1 und t_2 mit einander gemischt werden; man erhält bekanntlich für die Ausgleichstemperatur ϑ den Werth

$$\vartheta = \frac{m_1 t_1 + m_2 t_2}{m_1 + m_2}.$$

Wir begegnen hier wieder der schon öfter erwähnten Analogie zwischen Potential und Temperatur. Es ist auch zu beachten dass Elektricitätsströmungen durch Potentialdifferenzen ganz in derselben Weise eingeleitet werden wie Wärmeströmungen durch Temperaturdifferenzen; wir werden später sehen dass dementsprechend auch die Gesetze dieser beiden Strömungsarten vollkommen identische sind.

§ 38. Capacität einer Kugel und einer Kreisplatte.

Aus der allgemeinen Gleichung $C = \frac{M}{V}$ folgt, dass wir die Capacität eines Körpers anzugeben im Stande sind sobald uns das Potential V das die Ladung M auf ihm erzeugt, bekannt ist. Letzterer Werth lässt sich aber im Allgemeinen nicht bestimmen, man ist daher bei Be-

rechnung von C auf geometrisch einfach geformte Körper beschränkt. Für einige solche, die Kugel, die Kreisplatte und den geraden Kreiscylinder, wollen wir diese Berechnung vornehmen da diese Körperformen sehr häufig bei elektrischen Apparaten und Messungen Anwendung finden.

Wird einer Kugel vom Radius R die Ladung M mitgetheilt so erhält sie dadurch ein Potential V von der Grösse

$$V = \frac{M}{R}.$$

Verbinden wir diese Gleichung mit der für die Capacität giltigen

$$C = \frac{M}{V}$$

so erhalten wir unmittelbar die Capacität der Kugel gleich

$$C = R.$$

Dieselbe ist direct durch den Radius gemessen; dieser Umstand ist besonders mit Hinblick auf das später zu entwickelnde absolute Maasssystem der elektrischen Einheiten von Wichtigkeit, denn er gibt uns ein Mittel an die Hand Capacitäten einfach durch Längeneinheiten zu messen.

Die Capacitäten zweier Kugeln stehen somit im Verhältniss ihrer Radien was übrigens schon aus dem in § 36 entwickelten Satze über die Capacitäten geometrisch ähnlicher Körper folgt.

Wenn wir die Capacität einer Kreisplatte bestimmen wollen so müssen wir wieder das Potential V kennen das eine gewisse Ladung M auf der Platte erzeugt. Da auf der ganzen Platte das Potential constant ist so genügt es dessen Werth für das Centrum zu finden. Es sei der Radius der Platte gleich R: denken wir uns auf derselben zwei concentrische Kreise mit den Radien r und $r + dr$ beschrieben so liegt zwischen diesen eine Fläche df

$$df = 2\, r\, \pi\, dr.$$

Ist die Dichte der Ladung in der Distanz r vom Centrum gleich μ so liegt auf dieser Fläche eine Elektricitätsmenge dM

$$dM = 2\, r\, \pi\, \mu\, dr$$

und diese erzeugt im Centrum ein Potential dV

$$dV = 2\, \pi\, \mu\, dr.$$

Nach den Ausführungen des § 12 hat aber μ einen bekannten Werth; es ist

$$\mu = \frac{M}{4\, \pi\, R \sqrt{R^2 - r^2}} \text{ und somit } dV = \frac{M}{2\, R} \cdot \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}}.$$

Wir erhalten aus dieser Gleichung den ganzen Werth V durch Integration längs des Radius; es wird

$$V = \frac{M}{2R}\int_0^R \frac{dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = \frac{M}{2R}\left[\text{arc. sin}\ \frac{r}{R}\right]_0^R = \frac{M\pi}{4R}.$$

Da die Platte aber beiderseits in gleicher Weise mit Elektricität geladen und dabei als unendlich dünn vorausgesetzt ist so wird dadurch der Werth von V noch verdoppelt und wir haben schliesslich

$$V = \frac{M\pi}{2R}.$$

Aus der allgemeinen Gleichung $C = \frac{M}{V}$ folgt nun unmittelbar

$$C = \frac{2}{\pi} \cdot R = 0{\cdot}637 \cdot R.$$

Es ist also die Capacität einer Kreisplatte etwas mehr als die Hälfte von der Capacität einer Kugel mit gleichem Radius.

Die Capacität eines geraden Kreiscylinders können wir nicht so genau angeben wie dies bei den vorhergehenden Formen der Fall war, und zwar aus dem Grunde weil wir das Vertheilungsgesetz der Elektricität auf einem solchen nicht kennen und daher auch das Potential das eine bestimmte Ladung auf ihm erzeugt nicht zu berechnen im Stande sind. Wir werden diesbezüglich vereinfachende Voraussetzungen machen müssen wodurch das Resultat nur auf gewisse, in der Praxis allerdings zumeist vorkommende Fälle anwendbar wird.



Fig. 61.

Wir wollen voraussetzen dass die Länge L des Cylinders gegen seinen Radius R so gross sei dass wir die Dichte der Ladung an allen Punkten der Oberfläche als constant ansehen können; der Einfluss der thatsächlich grösseren Dichte am Rande bleibt somit unberücksichtigt und kann es auch bleiben, wenn die Ladung der mittleren Partien gross ist gegen die Ladung am Rande. In der Praxis wird dem hier ins Auge gefassten Falle die Form eines Drahtes, Kabels etc. entsprechen.

Es sei Fig. 61 AB der cylindrische Leiter, $oa = R$ sein Radius, die überall constante Dichte sei μ.

Um die Capacität zu bestimmen müssen wir zunächst wissen welches Potential der Leiter durch Aufnahme einer gewissen Elektricitätsmenge M erhält. Dieses finden wir am leichtesten für den

Mittelpunkt o des Cylinders wobei es übrigens gleichgiltig ist ob derselbe massiv oder hohl ist, da auch in letzterem Falle das Potential im ganzen Innern als constant und mit dem der Oberfläche identisch anzusehen ist.

Wir legen in der Distanz $ab = l$ vom Mittelpunkte zwei parallele auf die Axe senkrechte Schnitte durch den Cylinder, wodurch aus der Oberfläche ein rechteckiger Streifen von der Höhe bc ausgeschnitten wird. Diese Höhe wählen wir unendlich klein und bezeichnen sie durch dl. Die Ladung des Streifens ist gleich $2R\pi\mu\,dl$ und das Potential welches dieselbe im Mittelpunkte o erzeugt, wird, wenn wir die Distanz des Streifens von demselben mit ρ bezeichnen:

$$dv = \frac{2R\pi\mu\,dl}{\rho}.$$

Es besteht aber die Relation

$$\rho^2 = l^2 + R^2.$$

Durch Substitution des Werthes von ρ in obige Gleichung erhält man

$$dv = 2R\pi\mu \cdot \frac{dl}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Das ganze Potential welches die obere Hälfte des Cylinders im Mittelpunkte erzeugt ist demnach

$$v = 2R\pi\mu \int_o^{\frac{L}{2}} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Da die untere Hälfte des Cylinders offenbar ein gleiches Potential in o hervorruft wie die obere so wird, das Ganze mit V bezeichnet, schliesslich

$$V = 4R\pi\mu \int_o^{\frac{L}{2}} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + R^2}}.$$

Der Werth dieses Integrals ist aber:

$$\int_o^{\frac{L}{2}} \frac{dl}{\sqrt{l^2 + R^2}} = \text{log. nat.}\left(l + \sqrt{l^2 + R^2}\right)_o^{\frac{L}{2}}.$$

Setzen wir für die Grenzen o und $\frac{L}{2}$ ein und berücksichtigen dass unserer Annahme zufolge R gegen $\frac{L}{2}$ verschwindend klein sei, so ergibt sich:

$$V = 4\,R\,\pi\,\mu \cdot \text{log. nat.}\,\frac{L}{R} = \frac{2\,M}{L}\,\text{log. nat.}\,\frac{L}{R}.$$

Der letztere Ausdruck ergibt sich wenn wir die Dichte μ durch das Verhältniss der Gesammtladung M zur Oberfläche $2\,R\,\pi\,L$ ausdrücken.

Um schliesslich die Capacität C eines solchen sehr langen Cylinders zu finden haben wir nach der allgemeinen Gleichung $M = V \cdot C$ vorzugehen und erhalten:

$$C = \frac{M}{V} = \frac{L}{2\,\text{log. nat.}\,\frac{L}{R}}.$$

§ 39. Condensatoren.

Die Capacität eines Körpers ist, wie bereits erwähnt wurde, keine constante Grösse; sie ändert sich je nachdem in der Nähe des Körpers sich andere leitende Massen befinden zwischen denen Induction auftritt. Wird z. B. ein Leiter A bei Abwesenheit anderer Körper in seiner Nähe durch die Elektricitätsmenge M auf das Potential V gebracht, so wird dieselbe Ladung auf A nur ein kleineres Potential erzeugen wenn derselbe gleichzeitig der Induction benachbarter Massen unterworfen ist; denn die auf letzteren inducirten Ladungen von entgegengesetztem Zeichen haben das Bestreben das ursprüngliche Potential von A herabzudrücken. Ist demnach z. B. A mit einer Elektricitätsquelle von constantem Potential verbunden so wird bei Anwesenheit inducirender Massen eine grössere Ladung auf A übergehen als wenn letzteres allein vorhanden wäre, mit anderen Worten die Capacität von A ist vergrössert worden. Dieser Umstand tritt natürlich immer ein, sobald irgendwelche inducirende Massen vorhanden sind, wir können aber durch eine passende Anordnung der letzteren es dahin bringen dass die Capacität von A möglichst gross, und unter Umständen auch berechenbar wird. Eine solche Anordnung nennen wir einen Condensator; sie hat wie man sieht den Zweck auf einem Leiter bei gegebenem Potential beträchtlich mehr Elektricität anzusammeln als unter gewöhnlichen Umständen möglich wäre.

Die drei Körperformen deren Capacitäten im vorhergehenden Paragraphe besprochen wurden, die Kugel, die Kreisplatte und der gerade Kreiscylinder sind es auch die zumeist in der Praxis den Condensatoren zu Grunde gelegt werden; wir wollen im Folgenden untersuchen welche Capacitätsänderungen bei so geformten Körpern durch passend gewählte Inductoren erzeugt werden können.

Der Kugelcondensator.

Wir betrachten zunächst eine Kugel vom Radius R_1. Ist dieselbe sehr weit von allen Inductoren entfernt so ist ihre Capacität $C_1 = R_1$ und durch eine Ladung M_1 wird auf derselben ein Potential V_1 erzeugt, das der Gleichung genügt

$$V_1 = \frac{M_1}{C_1} = \frac{M_1}{R_1}.$$

Wir bringen nun in der Nähe dieser Kugel einen Inductor an und zwar in Form einer die erste concentrisch umgebenden zweiten Kugel vom Radius R_2 die mit der Erde in leitender Verbindung steht. Es ist diese Versuchsanordnung in der Praxis nicht genau auszuführen, weil die innere Kugel durch einen Leitungsdraht mit der Elektricitätsquelle in Verbindung stehen muss; es genügt aber für diesen in der äusseren Kugel eine kleine Oeffnung zu lassen, wodurch allerdings die gleichmässige Vertheilung der Ladung auf letzterer gestört wird jedoch in verschwindendem Maasse wenn die Dimensionen der Kugel gegen die der Oeffnung als sehr gross angesehen werden können. Wir wollen also im Folgenden den idealen Fall annehmen dass die äussere Kugel die innere vollständig umschliesse.

Wie gross wird nun die Capacität C_2 der inneren Kugel? Wenn wir ihr die Ladung $+ M_1$ mittheilen so wird nach dem Faraday-schen Theorem auf dem Inductor (der äusseren Kugel) die gleiche negative Ladung inducirt also $- M_1$ während das Potential derselben gleich Null bleibt.

Das Potential V_2 der inneren Kugel wird aber jetzt

$$V_2 = \frac{M_1}{R_1} - \frac{M_1}{R_2} = M_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = M_1 \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = M_1 \frac{\delta}{R_1 R_2}$$

wenn wir die Differenz der beiden Radien mit δ bezeichnen. Die Capacität C_2 ist nun

$$C_2 = \frac{M_1}{V_2} = \frac{R_1 R_2}{\delta}.$$

Die ursprüngliche Capacität der Kugel $C_1 = R_1$ ist also durch die Anwesenheit des Inductors auf das $\frac{R_2}{\delta}$fache gebracht worden.

Das Verhältniss $\frac{C_2}{C_1} = F$ nennt man auch die condensirende Kraft des betreffenden Condensators; für die hier betrachtete Anordnung zweier concentrischer Kugeln, deren innere geladen wird während die äussere zur Erde abgeleitet ist hätte man somit

$$F = \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_1 R_2}{\delta} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{R_2}{\delta}.$$

Die Ladung M welche die innere Kugel bei einem gewissen Potential V aufzunehmen vermag, und um diese Grösse handelt es sich bei Anwendung von Condensatoren zumeist, ergibt sich aus der Gleichung

$$V = M \frac{\delta}{R_1 R_2}; \text{ es ist } M = V \frac{R_1 R_2}{\delta}.$$

Auch diese Grösse wird, wie die Capacität, auf das $\frac{R_2}{\delta}$fache gebracht im Vergleich mit der analogen Grösse bei Abwesenheit des Inductors. Drückt man in vorstehender Gleichung den Radius R_1 durch die Oberfläche der Kugel S_1 aus so kann man dieselbe auch in der Form schreiben:

$$M = \frac{V S_1}{4 \pi \delta} \left(1 + \frac{\delta}{R_1}\right).$$

Wie aus den Formeln unmittelbar hervorgeht empfiehlt es sich demnach zur Erzielung einer möglichst kräftigen Wirkung des Kugelcondensators, die Radien der Kugeln gross und ihre Differenz δ möglichst klein zu machen.

Man kann den Kugelcondensator auch in der Weise benützen dass man die äussere Kugel mit der Elektricitätsquelle verbindet und die innere als Inductor betrachtet und zur Erde ableitet. Wenn wir die Dicke der äusseren Kugelschale gegen ihren Radius vernachlässigen können so wird durch eine der äusseren Kugel mitgetheilte Ladung M auf dem Inductor eine Ladung M' inducirt die, da letzterer zur Erde geleitet ist, der Bedingung genügen muss

$$\frac{M}{R_2} - \frac{M'}{R_1} = 0 \text{ oder } M' = M \frac{R_1}{R_2}.$$

Das Potential V_2 welches die äussere Kugel unter dem Einflusse von M und M' annimmt wird

$$V_2 = \frac{M}{R_2} - \frac{M'}{R_2} = \frac{M}{R_2} - \frac{M}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_2} = M \frac{R_2 - R_1}{R_2^2} = M \frac{\delta}{R_2^2}.$$

Die Capacität C_2 der äusseren Kugel wird jetzt

$$C_2 = \frac{M}{V_2} = \frac{R_2^2}{\delta}.$$

Die ursprüngliche Capacität derselben C_1 bei Abwesenheit des Inductors, war $C_1 = R_2$ es ist somit die condensirende Kraft jetzt wieder:

$$F = \frac{C_2}{C_1} = \frac{R_2}{\delta}.$$

Die Ladung M die jetzt die äussere Kugel bei einem Potential V aufzunehmen im Stande ist, wird

$$M = C_2 V = V \cdot \frac{R_2^2}{\delta}$$

also im Verhältniss $\frac{R_2}{R_1}$ grösser als im früher betrachteten Falle. Ersetzen wir hier wieder den Radius R_2 durch die Oberfläche S_2 so wird

$$M = \frac{V S_2}{4 \pi \delta}.$$

Der ebene Condensator.

Wir betrachten nun den Fall dass der mit der Elektricitätsquelle verbundene Leiter die Gestalt einer sehr dünnen Kreisplatte vom Radius R habe; die Capacität dieser Platte ist nach dem Vorausgegangenen, wenn wir sie mit C_1 bezeichnen, bei Abwesenheit aller Inductoren

$$C_1 = \frac{2R}{\pi}.$$

Stellen wir nun dieser Platte eine ganz ebensolche und zur Erde abgeleitete in der Distanz δ parallel gegenüber so wird dadurch die Capacität der ersten vermehrt werden auf C_2. Um den Werth von C_2 zu bestimmen, müssen wir die Vertheilung der Elektricität auf der Platte kennen wenn der Inductor ihr gegenüber steht, und das ist strenge genommen nur unter gewissen vereinfachenden Voraussetzungen der Fall, die bei der experimentellen Ausführung eines

derartigen Condensators zwar nicht vollkommen aber mit beliebiger Annäherung erfüllt werden können.

Während beim Kugelcondensator alle Kraftlinien die von der inneren Kugelfläche auslaufen auf der gegenüberstehenden endigen, es sich also hier, wenn die äussere Kugel zur Erde abgeleitet ist, überhaupt nur um zwei Ladungen handelt, hat man es beim ebenen Condensator mit vier Ladungen zu thun, indem nicht nur zwischen den einander zugekehrten Flächen Kraftlinien übergehen, sondern auch von der einen äusseren zur anderen. Ist die Entfernung der beiden Platten gegen ihre Dimensionen nur gering so wird allerdings der weitaus grösste Theil der Kraftlinien zwischen den einander zugekehrten Flächen übergehen d. h. von der Gesammtladung einer Platte wird der Hauptantheil sich an der Innenfläche vorfinden und nur eine verhältnissmässig geringe Menge an der Aussenseite. Machen wir demnach die Voraussetzung dass δ gegen R verschwindend klein sei — was in der Praxis mit beliebiger Annäherung ausgeführt werden kann — so können wir von den Ladungen der Aussenseiten vollkommen absehen. Ist δ sehr klein so folgt daraus auch dass die Niveauflächen im Zwischenraume zwischen beiden Platten zu letzteren parallele Ebenen sind d. h. dass das Potentialgefälle in Richtung der Plattennormale ein lineares sei. Bezeichnen wir diese Richtung mit n so wird somit für den Raum zwischen den Platten

$$\frac{dV}{dn} = \frac{V}{\delta}$$

wenn das Potential der Condensatorplatte gleich V und die Inductorplatte mit der Erde verbunden ist.

Diese Beziehung wird jedoch nur insolange gelten als die Niveauflächen Ebenen sind; wie aus den Ausführungen des § 15 hervorgeht gilt dies aber für die dem Plattenrande nahen Partien des Zwischenraumes nicht mehr, dort krümmen sich die Niveauflächen mehr und mehr um die Ränder der Platten und die Kraftlinien hören auf parallele Gerade zu sein. Wenn wir aber an unserer Voraussetzung festhalten dass δ gegen R verschwindend klein sei dann können wir auch die Ausdehnung des elektrischen Feldes zwischen beiden Platten wo die Homogenität gestört ist gegen den restirenden homogenen Theil vernachlässigen.

Da die Flächendichte μ an der Innenseite der Condensatorplatte durch die Relation

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \cdot \frac{dV}{dn} = \frac{V}{4\pi\delta}$$

ihrem absoluten Werthe nach bestimmt ist und wir bei Vernachlässigung von δ gegen R dieselbe längs der ganzen Fläche S als constant ansehen können so erhalten wir für die Ladung M welche die Condensatorplatte bei einem Potential V aufzunehmen im Stande ist, den Werth

$$M = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta}.$$

Die Capacität C_2 bei Einwirkung der Inductorplatte, wird:

$$C_2 = \frac{S}{4 \pi \delta} = \frac{R^2}{4 \delta}.$$

Halten wir dagegen den ursprünglichen Werth $C_1 = \frac{2R}{\pi}$ so ergibt sich für die condensirende Kraft F

$$F = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\pi R}{8 \delta}.$$

Diese Formeln gelten unter der Voraussetzung dass δ gegen R als verschwindend anzusehen sei; will man diese Voraussetzung fallen lassen so muss man auch die an den Aussenflächen der Platten angesammelten Ladungen berücksichtigen. Man erhält so Formeln die sich für kleine δ nur um Grössen zweiter Ordnung von den hier gegebenen unterscheiden. Da es in manchen Fällen wünschenswerth sein mag die Grösse des Fehlers zu kennen der durch Anwendung der vereinfachten Formeln entsteht so sei hier noch die vollständigere, zuerst von Clausius entwickelte Formel für die Ladung M der Condensatorplatte bei zur Erde geleiteter Inductorplatte mitgetheilt. Es ist

$$M = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta} \left[1 + \frac{\delta}{\pi R} \left(\log. \frac{17{\cdot}68\, R}{\delta} - 2 \right) \right].$$

Verschwindet δ gegen R so übergeht die vorstehende in die früher gegebene einfachere Formel.

Unter Berücksichtigung der Plattendicke a hat schliesslich Kirchhoff eine genaue Formel für die Capacität C einer Condensatorplatte abgeleitet; er findet:

$$C = \frac{R^2}{4 \delta} + \frac{R}{4 \pi} \left(\log. \frac{16 \pi (a + \delta) R}{e \cdot \delta^2} + \frac{a}{\delta} \log. \frac{a + \delta}{a} \right)$$

wobei e die Basis der natürlichen Logarithmen bedeutet.

Man kann eine derartige Anordnung wie sie ein Condensator bietet nicht nur dazu benützen um auf einem Körper bei gegebenem

Potential mehr Elektricität anzuhäufen als unter gewöhnlichen Umständen möglich wäre, man kann sich derselben Anordnung auch bedienen um Elektricität von einem niedrigen auf ein höheres Potential zu bringen. Haben wir eine Elektricitätsquelle vom Potentiale V, z. B. eine galvanische Batterie, zur Verfügung so können wir mit derselben auf gewöhnliche Weise keinen Körper auf ein höheres Potential als V laden. Verbinden wir die Batterie aber mit der Condensatorplatte während die Inductorplatte derselben genähert ist, so übergeht auf erstere eine Ladung $M = \frac{V \cdot S}{4\pi\delta}$. Unterbrechen wir nun die Verbindung mit der Batterie und entfernen die Inductorplatte so sinkt die Capacität der Condensatorplatte, und da sie die Ladung M beibehält so muss ihr Potential steigen. Es ist leicht einzusehen dass letzteres in dem Maasse erfolgen muss als die Capacität sinkt d. h. dass das neue Potential V' gleich sein muss:

$$V' = V \cdot F = V \frac{\pi R}{8\delta}.$$

Man kann solcherweise, dem Werthe $\frac{R}{\delta}$ entsprechend, auf der Platte mit mässigen Elektricitätsquellen sehr hohe Potentiale erzielen.

Will man einen beliebigen Leiter durch Berührung mit der Condensatorplatte auf dieses erhöhte Potential bringen so genügt dazu eine einmalige Berührung natürlich nicht, da jetzt der Leiter nur das Ausgleichspotential zwischen ihm und der Platte annimmt; dieses Ausgleichspotential hängt von dem Verhältniss der beiden Capacitäten ab und diesem entsprechend muss die Ladung des Condensators und Entladung an den Leiter genügend oft wiederholt werden.

Der Cylindercondensator.

Auch die dritte der im vorhergehenden Paragraphen in Bezug auf ihre Capacität besprochenen Formen, der gerade Kreiscylinder, wird zu Condensatorzwecken verwendet. Es sei ein derartiger Cylinder von der Länge L und dem Radius R_1 gegeben; ist L gegen R_1 sehr gross so dass die Dichte längs des Cylindermantels als constant angesehen werden kann so ist sein Potential V_1 und seine Capacität C_1 durch die folgenden Gleichungen gegeben:

$$V_1 = \frac{2M}{L} \log.\,\text{nat.}\, \frac{L}{R_1} \qquad C_1 = \frac{L}{2 \log.\,\text{nat.}\, \frac{L}{R_1}}$$

wobei M die ganze Ladung des Cylinders bedeutet.

Umgibt man nun diesen durch einen zweiten conaxialen Cylinder von gleicher Länge und vom Radius R_2 und leitet letzteren indem man ihn als Inductor betrachtet zur Erde, so hat man einen sogenannten Cylindercondensator. In welcher Weise die Capacität des inneren Cylinders durch die Anwesenheit des äusseren verändert wird ergibt sich aus Folgendem.

Wenn L gegen R_1 und R_2 sehr gross ist so gehen alle Kraftlinien, bis auf einen zu vernachlässigenden Rest in der Nähe des Randes, als Gerade vom inneren Cylinder zum äusseren d. h. es finden sich auf den einander zugekehrten Cylinderflächen gleiche und entgegengesetzte Ladungen $+M$ und $-M$. Das Potential des inneren Cylinders wird jetzt nach den Ausführungen des vorhergegangenen Paragraphen

$$V_2 = \frac{2M}{L} \text{ log. nat. } \frac{L}{R_1} - \frac{2M}{L} \text{ log. nat. } \frac{L}{R_2} =$$

$$= \frac{2M}{L}\left(\text{log. nat. } \frac{L}{R} - \text{log. nat. } \frac{L}{R_2}\right) = \frac{2M}{L} \text{ log. nat. } \frac{R_2}{R_1}.$$

Die Capacität C_2 bei Anwesenheit des äussern Cylinders wird jetzt

$$C_2 = \frac{M}{V_2} = \frac{L}{2 \text{ log. nat. } \frac{R_2}{R_1}}$$

und die condensirende Kraft F des Cylindercondensators wird

$$F = \frac{C_2}{C_1} = \frac{\text{log. nat. } \frac{L}{R_1}}{\text{log. nat. } \frac{R_2}{R_1}}.$$

Die Elektricitätsmenge M welche der Condensatorcylinder bei gegebenem Potential V aufzunehmen vermag, ergibt sich aus den vorstehenden Formeln: es ist

$$M = \frac{V \cdot L}{2 \text{ log. nat. } \frac{R_2}{R_1}}$$

und führen wir in dieser Gleichung noch an Stelle von L die Oberfläche des Cylinders, $S = 2 R_1 \pi L$, ein so ergibt sich

$$M = \frac{V \cdot S}{4 \pi R_1 \text{ log. nat. } \frac{R_2}{R_1}}.$$

Wir haben die Voraussetzung gemacht dass auf den Cylinderflächen die Dichte der Ladung eine constante sei; diese Voraus-

etzung involvirt bei einem einzelnen Cylinder für sich allein die reitere Annahme dass seine Länge gegen seinen Radius sehr gross ei; die obige Formel für die condensirende Kraft, in welcher die Capacität eines einzelnen Cylinders enthalten ist gilt daher nur für ehr lange Cylinder wie sie in der Praxis etwa in Form von untereeischen Kabeln vorkommen. Bei diesen vertritt der Leitungsdraht en inneren, das Wasser den äusseren zur Erde abgeleiteten Cylinder nd die Guttapercha-Umhüllung die isolirende Zwischenschichte.

Die Formel für die Ladung M des Cylindercondensators basirt leichfalls auf der Voraussetzung einer constanten Dichte; diese kann ber bei Anwendung zweier coaxialer Cylinder auch ohne eine sehr rosse Länge derselben dadurch erreicht werden dass man die beiden Cylinderflächen möglichst nahe einander gegenüberstellt d. h. dass nan die Differenz $R_2 - R_1$ möglichst klein macht. Wie aus den Formeln hervorgeht wird dadurch auch die Capacität des Apparates nöglichst gross.

Es ist leicht einzusehen dass die Capacität eines ganz beliebig geformten Condensators und damit auch die Ladung bei gegebenem Potential sich immer angeben lässt wenn derselbe so construirt ist lass die Dichte an allen Punkten der Oberfläche eine constante und las Potentialgefälle im ganzen Zwischenraum ein lineares ist, denn für diesen Fall gelten die Relationen:

$$M = \mu \cdot S; \ \frac{dV}{dn} = \frac{V}{\delta}; \ \mu = \frac{1}{4\pi}\frac{dV}{dn} = \frac{V}{4\pi\delta}; \ \text{daher } M = \frac{V \cdot S}{4\pi\delta}$$

was nichts anderes ist als die Formel für den ebenen Condensator.

Eine überall constante Dichte setzt aber auch die gleichen Krümmungsverhältnisse für alle Punkte der Oberfläche voraus und ein lineares Potentialgefälle erfordert ein sehr kleines δ; die beiden Bedingungen sind beim ebenen Condensator erfüllt daher die für ihn geltende Gleichung auch in der vorstehenden Form erscheint.

Die erste der beiden Bedingungen ist auch beim Kugel- und Cylindercondensator erfüllt, nicht so die zweite; lassen wir aber auch bei diesen Formen δ sehr klein gegen die Dimensionen der Belegungen werden so müssen auch die für diese beiden Formen geltenden Gleichungen für M in die vorstehende übergehen.

Wir haben z. B. für den Kugelcondensator gefunden:

$$M = V\frac{R_1 R_2}{\delta} = \frac{VS}{4\pi\delta}\left(1 + \frac{\delta}{R_1}\right).$$

Wird δ gegen R_1 sehr klein, so können wir $\frac{\delta}{R}$ gegen 1 vernachlässigen, wodurch wir unmittelbar die allgemeine Formel erhalten.

Für den Cylindercondensator haben wir gefunden

$$M = \frac{T\,\varepsilon}{4\pi R_1 \log nat \frac{R_2}{R_1}}$$

Entwickeln wir nun den Logarithmus im Nenner nach der allgemeinen Formel

$$\log nat\, x = 2\left[\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \ldots\right]$$

so erhalten wir

$$\log nat \frac{R_2}{R_1} = 2\left[\frac{\frac{R_2-R_1}{R_1}}{\frac{R_2-R_1}{R_1}+2} + \ldots\right] = 2\left[\frac{\delta}{R_2+R_1} + \ldots\right] = \frac{\delta}{R}.$$

Wenn nun δ sehr klein gegen R ist, so können wir die höheren Potenzen dieses Quotienten vernachlässigen und ebenso können wir $R_1 + R_2 = 2R$ setzen. Unser Ausdruck für M wird somit

$$M = \frac{T\,\varepsilon}{4\pi R \frac{\delta}{R}} = \frac{T\,\varepsilon}{4\pi\delta}$$

was wieder der allgemeine Ausdruck ist.

Da demnach die Form des Condensators gleichgiltig ist wenn nur δ sehr klein und constant gemacht wird — was sich schon zur Erzielung einer grossen Capacität empfiehlt — so wird man in der Praxis jeweilig zu derjenigen Form greifen die anderweitig die passendste ist. Am häufigsten kommt wohl die bekannte Leydnerflasche zur Verwendung, sowie der Blättercondensator. Letzterer besteht aus einer beliebig grossen Zahl Staniolblätter die, durch isolirendes Paraffin- oder Wachspapier oder auch durch dünnen Ebonit getrennt, so übereinander geschichtet werden dass man alle geraden unter sich und ebenso alle ungeraden in leitende Verbindung setzen kann. Man erhält so zwei ihrer Fläche nach sehr grosse Belegungen in sehr geringer Distanz von einander und dementsprechend ist auch die Capacität eines derartigen Systems eine bedeutende bei verhältnissmässig geringer räumlicher Ausdehnung.

Bei Leydnerflaschen, wenn die Belegungen nicht nur den cylindrischen Mantel sondern auch den Boden des Gefässes umfassen, sind die vorstehenden Formeln nicht strenge anwendbar da die Krümmungsverhältnisse nicht überall constante sind. Wenn aber, wie gewöhnlich,

die stärker gekrümmten Theile am Rande des Bodens nur einen kleinen Theil der Gesammtoberfläche betragen so wird der Fehler auch ein geringer; soll auch dieser vermieden werden so müssen die Formeln des nächsten Paragraphen angewendet werden.

§ 40. Allgemeine Gleichung für Condensatoren.

Wir wollen nun noch eine allgemeinere Gleichung für die Dichte an irgend einem Punkte einer Condensatorbelegung ableiten ohne die im vorhergehenden Paragraph gemachte Voraussetzung bestimmter Formen mit constanter Krümmung und überall constantem Abstande δ der beiden Belegungen; wir wollen nur die Annahme machen dass die Kraftlinien, die den isolirenden Zwischenraum durchsetzen, bis auf eine zu vernachlässigende Grösse an allen Punkten mit den Flächennormalen zusammenfallen, eine Annahme die bei beliebigen Krümmungen der Flächen um so genauer erfüllt sein wird je näher dieselben aneinander liegen, die aber auch bei grossen Distanzen noch erfüllt bleibt wenn die Flächen einander parallel verlaufen. Es kann vorkommen dass verschiedene Partien eines Condensators bei sich gleichbleibenden Krümmungsverhältnissen, verschiedene Distanzen von einander haben, so z. B. in dem Falle eines ebenen Condensators, wenn derselbe aus drei einander parallelen Platten besteht, wovon die äusseren zur Erde abgeleitet sind. Die Dicken der beiden isolirenden Schichten können da verschieden sein und es ist nothwendig, um die Ladung bei gegebenem Potential zu bestimmen, die Dichten auf beiden Seiten der mittleren Platte zu kennen. Auch können die Krümmungsverhältnisse eines Condensators in seinen verschiedenen Theilen verschieden sein, wie dies etwa bei der gewöhnlichen Leydnerflasche in der Nähe des Bodens der Fall ist, so dass die Dichte der Ladung auch bei gleichbleibender Dicke der Zwischenschicht nicht überall constant ist; man muss dann um die Gesammtladung zu finden die Dichten für die einzelnen Partien innerhalb welcher die Krümmung constant bleibt, bestimmen. Im Folgenden wird gezeigt werden in welcher Abhängigkeit diese Dichten von den Krümmungen der Belegungen stehen.

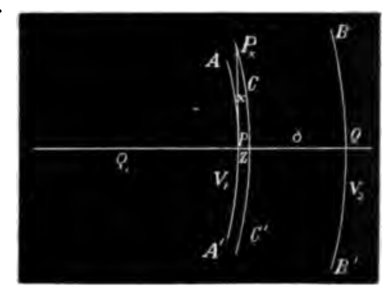


Fig. 62.

Es seien $A A'$ und $B B'$ in Fig. 62 zwei Stücke der parallelen Belegungen deren Distanz mit δ bezeichnet werden möge; das Potential

habe auf denselben die Werthe V_1 respective V_2. Die Normale welche im Punkte P der ersten Belegung errichtet wird, ist unserer Voraussetzung nach eine Kraftlinie und trifft die zweite Belegung im Punkte Q. Das Potentialgefälle auf der Strecke $PQ = \delta$ wird im Allgemeinen kein lineares sein, doch können wir den Werth φ des Potentials selbst für jeden Punkt in der Distanz ε von P als Function des Potentials V_1 an letzterem Punkte, sowie der Differenzialquotienten desselben in Richtung der Normalen, und als Function von ε ausdrücken. Indem wir nach der Reihe Taylor's entwickeln und die Richtung PQ mit z bezeichnen erhalten wir:

$$\varphi = V_1 + \frac{d V_1}{d z} \cdot \varepsilon + \frac{d^2 V_1}{d z^2} \cdot \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{d^3 V_1}{d z^3} \cdot \frac{\varepsilon^3}{6} + \dots$$

Diese Gleichung gilt für alle Punkte der Strecke PQ; indem wir den Punkt Q ins Auge fassen für welchen $\varphi = V_2$ und $\varepsilon = \delta$ ist erhalten wir

$$V_2 = V_1 + \frac{d V_1}{d z} \delta + \frac{d^2 V_1}{d z^2} \cdot \frac{\delta^2}{2} + \dots$$

Die Differenzial-Coëfficienten $\frac{d V_1}{d z}$ und $\frac{d^2 V_1}{d z^2}$ — die höherer Ordnung wollen wir im Nachfolgenden vernachlässigen — beziehen sich auf die unmittelbare Nähe des Punktes P; wählen wir letzteren zum Anfangspunkte eines rechtwinkeligen Coordinatensystems dessen z-Axe mit PQ zusammenfällt während die x- und y-Axen die Fläche AA' im Punkte P tangiren, so gilt für den ganzen Raum zwischen den Belegungen die Gleichung

$$\frac{d^2 \varphi}{d x^2} + \frac{d^2 \varphi}{d y^2} + \frac{d^2 \varphi}{d z^2} = 0$$

da sich nirgends in diesem Zwischenraum elektrische Ladungen vorfinden. Für die unmittelbare Umgebung von P wird $\varphi = V_1$ und man kann schreiben

$$\frac{d^2 V_1}{d x^2} + \frac{d^2 V_1}{d y^2} + \frac{d^2 V_1}{d z^2} = 0.$$

Wie wir gleich sehen werden ist man im Stande die zweiten Derivirten nach x und y aus dem Krümmungsverhältnisse im Punkte P zu bestimmen so dass mit Hilfe derselben auch die zweite Derivirte nach z bestimmbar wird; in der obigen Gleichung für V_2 bleibt dann nur mehr die erste Derivirte nach z und diese ist uns durch die Coulomb'sche Gleichung als Function der Flächendichte der Ladung im Punkte P gegeben. Wenn wir diese Substitutionen werden vor-

genommen haben so wird die Gleichung für V_2 nur mehr die beiden Potentiale der Belegungen, ihre Distanz und Krümmungsradien, sowie die gesuchte Dichte μ enthalten. Wir erhalten somit letztere als Function bekannter Grössen.

Wir betrachten eine der Oberfläche AA' unendlich benachbarte Niveaufläche CC'; dieselbe wird ein Potential V_x besitzen das durch die Gleichung

$$V_x = V_1 + \frac{dV_1}{dz} z$$

bestimmt ist, wenn durch z ihre Distanz von AA' bezeichnet wird innerhalb welcher das Potentialgefälle als linear angenommen werden kann. Die x- und y-Axen werden die Fläche CC' in Punkten P_x und P_y schneiden deren Distanzen von P wir kurz durch x und y bezeichnen wollen. Die xz-Ebene wird die Oberfläche AA' in der in Fig. 62 gezeichneten Linie AA' schneiden deren Krümmungsradius im Punkte P wir ρ_1 nennen; der darauf senkrechte Schnitt der y-z-Ebene mit der Belegung habe den Krümmungsradius ρ_2. Da die Schnittcurven in unendlicher Nähe des Punktes P von den Krümmungskreisen nur um zu vernachlässigende Grössen höherer Ordnung abweichen so ergibt sich unmittelbar die Beziehung:

$$z : x = x : 2\rho_1 \qquad z = \frac{x^2}{2\rho_1} = \frac{y^2}{2\rho_2}.$$
$$z : y = y : 2\rho_2$$

Indem wir diesen Ausdruck für z in die vorstehende Gleichung einsetzen erhalten wir

$$V_x = V_1 + \frac{x^2}{2\rho_1}\frac{dV_1}{dz} = V_1 + \frac{y^2}{2\rho_2}\cdot\frac{dV_1}{dz}.$$

Wenn wir nun nach x und y differentiiren so ergibt sich

$$\frac{dV_x}{dx} = \frac{dV_1}{dx} + \frac{x}{\rho_1}\cdot\frac{dV_1}{dz} + \frac{x^2}{2\rho_1}\cdot\frac{d^2V_1}{dx\,dz}$$

$$\frac{dV_x}{dy} = \frac{dV_1}{dy} + \frac{y}{\rho_2}\cdot\frac{dV_1}{dz} + \frac{y^2}{2\rho_2}\cdot\frac{d^2V_1}{dy\,dz}.$$

Der Werth von $\frac{dV_1}{dz}$ ist von x und y unabhängig da in unendlicher Nähe am Punkte P die Dichte der Ladung als constant anzusehen ist, diese Dichte aber immer dem Werthe $\frac{dV_1}{dz}$ proportional sein muss.

Ferner ist zu beachten dass für die Nähe des Punktes P die Werthe

$$\frac{d V_1}{d x} = \frac{d V_1}{d y} = 0$$

sein müssen, da die Richtungen x und y eine Niveaufläche tangiren. Durch nochmalige Differentiation der Gleichungen erhalten wir somit

$$\frac{d^2 V_x}{d x^2} = \frac{d V_1}{d z} \cdot \frac{1}{\rho_1} + \frac{x}{\rho_1} \frac{d^2 V_1}{dx\, dz} + \frac{x}{\rho_1} \frac{d^2 V_1}{dx\, dz} + \frac{x^2}{2 \rho_1} \frac{d^3 V_1}{dx^2 dz}$$

$$\frac{d^2 V_x}{d y^2} = \frac{d V_1}{d z} \cdot \frac{1}{\rho_2} + \frac{y}{\rho_2} \frac{d^2 V_1}{dy\, dz} + \frac{y}{\rho_2} \frac{d^2 V_1}{dy\, dz} + \frac{y^2}{2 \rho_2} \frac{d^3 V_1}{dy^2 dz}.$$

Da wir aber die Werthe der zweiten Derivirten nicht für die Punkte P_x und P_y suchen sondern für den Punkt P so müssen wir in den vorstehenden Gleichungen die Grössen x und y gleich Null werden lassen, wodurch wir erhalten:

$$\frac{d^2 V_1}{d x^2} = \frac{1}{\rho_1} \frac{d V_1}{d z}$$

$$\frac{d^2 V_1}{d y^2} = \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{d V_1}{d z}.$$

Die Gleichung

$$\frac{d^2 V_1}{d x^2} + \frac{d^2 V_1}{d y^2} + \frac{d^2 V_1}{d z^2} = 0$$

nimmt somit die Gestalt an

$$\frac{1}{\rho_1} \frac{d V_1}{d z} + \frac{1}{\rho_2} \cdot \frac{d V_1}{d z} + \frac{d^2 V_1}{d z^2} = 0$$

woraus sich ergibt

$$\frac{d^2 V_1}{d z^2} = - \frac{d V_1}{d z} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right).$$

Unsere ursprüngliche Gleichung

$$V_2 = V_1 + \frac{d V_1}{d z} \delta - \frac{d^2 V_1}{d z^2} \frac{\delta^2}{2}$$

übergeht in

$$V_2 = V_1 + \frac{d V_1}{d z} \cdot \delta + \frac{\delta^2}{2} \cdot \frac{d V_1}{d z} \cdot \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) =$$

$$= V_1 + \frac{d V_1}{d z} \delta \left[1 - \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right].$$

In diesem Ausdrucke können wir noch den Werth des normalen Potentialgefälles gemäss der Coulomb'schen Gleichung durch die

elektrische Flächendichte μ_1 im Punkte P ersetzen denn es besteht bekanntlich die Relation:

$$\frac{d V_1}{d z} = -4 \pi \mu_1.$$

Es wird demnach schliesslich

$$V_2 = V_1 - 4 \pi \mu_1 \delta \left[1 - \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right]$$

$$V_1 - V_2 = 4 \pi \mu_1 \delta \left[1 - \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right]$$

$$\mu_1 = \frac{V_1 - V_2}{4 \pi \delta} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)} = \frac{V_1 - V_2}{4 \pi \delta}\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}\right)\right].$$

Die letzte Umformung der Gleichung können wir vornehmen ohne einen merklichen Fehler zu begehen, da wir dabei nur Glieder von der Ordnung $\left(\frac{\delta}{\rho}\right)^2$ gegen die Einheit vernachlässigen.

Es ist klar dass wir ganz dieselbe Betrachtung auch anstellen können wenn wir von dem Punkte Q der zweiten Belegung ausgehen und gegen P hin fortschreiten; wir werden dann für die Dichte μ_2 in Q eine Formel erhalten müssen die mit der vorstehenden für μ_1 ganz identisch ist nur dass die Constanten des Punktes P durch diejenigen von Q ersetzt sind. Bezeichnen wir demnach die Krümmungsradien der beiden auf einander senkrechten Schnitte in Q mit r_1 und r_2 so können wir unmittelbar schreiben:

$$\mu_2 = \frac{V_2 - V_1}{4 \pi \delta}\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right] =$$

$$= -\frac{V_1 - V_2}{4 \pi \delta}\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right)\right].$$

Wie man sieht sind die Dichten μ_1 und μ_2 an zwei einander gegenüberliegenden Stellen des Condensators von entgegengesetztem Vorzeichen und im Allgemeinen an Grösse nicht gleich; der Unterschied wird aber umsomehr verschwinden je gleicher die Krümmungsverhältnisse an beiden Stellen sind.

Eine Kraftröhre die von der einen Belegung zur anderen übergeht wird aus denselben die correspondirenden Flächenstücke σ_1 und σ_2 ausschneiden; nach einem bekannten Satze muss die Relation bestehen:

$$\sigma_1 \mu_1 + \sigma_2 \mu_2 = 0.$$

Daraus ergibt sich dass das Grössenverhältniss zweier correspondirender Flächenstücke ebenfalls durch die Krümmungsradien bestimmt wird: die Kraftröhre wird nur dann cylindrisch sein wenn

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

ist, da in diesem Falle $\mu_1 = \mu_2$ und $\sigma_1 = \sigma_2$ wird, andernfalls wird dieselbe konisch verlaufen.

Die Gesammtladung einer der Belegungen wird allgemein ausgedrückt durch

$$M = \int \mu \, d\sigma.$$

Der Werth μ ist dabei von Punkt zu Punkt variabel je nach den Krümmungsverhältnissen der Fläche und der Distanz δ; setzen wir aber sowohl δ als $\rho_1 \rho_2 r_1 r_2$ constant und bezeichnen wir die Fläche mit S, so wird

$$M = \mu \cdot S$$

Diese Voraussetzungen haben wir auch bei den vorausgegangenen Ableitungen für M beim Kugelcondensator, beim ebenen und Cylindercondensator gemacht, und es müssen sich daher die betreffenden Formeln durch Substitution der Werthe für die Krümmungsradien auch aus der allgemeinen Gleichung

$$M = \frac{(V_1 - V_2) S}{4 \pi \delta} \left[1 + \frac{\delta}{2} \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \right]$$

ergeben.

Wir haben z. B. für den Kugelcondensator, wenn die innere Kugel das Potential V, den Radius R und die Fläche S, die äussere Kugel das Potential Null und den Radius $R + \delta$ hat, als Ausdruck der Ladung M der inneren Kugel erhalten:

$$M = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta} \left(1 + \frac{\delta}{R} \right).$$

Nehmen wir in der allgemeinen Gleichung die entsprechenden Substitutionen vor d. h. setzen wir $V_2 = 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = R$ so ergibt sich unmittelbar die vorstehende Gleichung.

Dasselbe gilt für den ebenen Condensator für welchen wir fanden:

$$M = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta}.$$

Auch dieser Ausdruck ergibt sich wenn wir in der allgemeinen Gleichung $V_2 = 0$ und $\rho_1 = \rho_2 = \infty$ setzen.

Für den Cylindercondensator endlich haben wir erhalten

$$M = \frac{V \cdot S}{4\pi R_1 \log. \text{nat.} \frac{R_2}{R_1}} = \frac{V \cdot S}{4\pi\delta}.$$

Für eine cylindrische Fläche sind die beiden Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 zweier auf einander senkrechter Schnitte, wenn wir den einen durch die Cylinderaxe legen

$$\rho_1 = R_1 \qquad \rho_2 = \infty.$$

Ausserdem haben wir noch $V_2 = 0$ zu setzen und erhalten

$$M = \frac{V \cdot S}{4\pi\delta} \cdot \left[1 + \frac{\delta}{2R_1}\right].$$

Diese Formel stimmt mit der obigen bis auf die Abweichung des Klammerausdruckes von der Einheit, und wird mit derselben identisch wenn wir den Bruch $\frac{\delta}{R_1}$ gegen die Einheit vernachlässigen. In der That haben wir auch bei der früheren Ableitung diese Vernachlässigung gemacht indem wir die Dichte auf der ganzen Cylinderfläche constant setzten was nur der Fall sein kann wenn δ gegen R_1 sehr klein ist. Die letzte aus der allgemeinen Gleichung sich ergebende Formel ist von dieser Voraussetzung frei.

Bei all den betrachteten Fällen ist jedoch noch darauf aufmerksam zu machen dass auf die thatsächlich eintretende Aenderung der Dichte in der Nähe des Randes der Belegungen in den Formeln nicht Rücksicht genommen ist; dieselben werden daher umsomehr der Wirklichkeit entsprechen je geringer die Ausdehnung der Randpartien eines Condensators gegenüber der Gesammtoberfläche ist. In dieser Beziehung erscheint der ebene Condensator als die ungünstigste Anordnung, andererseits ist in diesem Falle aber, wie schon erwähnt wurde, der Fehler einer Berechnung zugänglich.

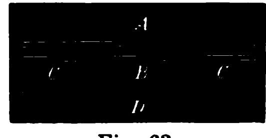


Fig. 63.

Gänzlich zu vermeiden sind die Ränder der Belegungen wegen der Zuleitungsdrähte selbstverständlich niemals; es lässt sich aber, wie Sir W. Thomson zuerst gezeigt hat, wenigstens beim ebenen Condensator durch Anwendung eines sogenannten Schutzringes der schädliche Einfluss des Randes auch experimentell so gut wie vollständig vermeiden. Man stellt zu diesem Zwecke der einen Condensatorplatte A (Fig. 63) eine zweite B gegenüber, deren Durchmesser ein wesentlich kleinerer ist; diese Platte B ist von einem in der-

selben Ebene gelegenen Ringe C umschlossen, der mit B in leitender Verbindung steht. Man hat so eigentlich nichts weiter gethan als die centrale Partie der einen Platte für sich beweglich gemacht. Das ist aber gerade jene Partie auf welcher die influenzirte Ladung am gleichförmigsten vertheilt ist. Setzen wir z. B. A mit der Erde verbunden und das System B C auf das Potential V geladen und unterbrechen nun die Verbindung von B mit C und der Elektricitätsquelle, so können wir die auf B befindliche Ladung mit einem sehr grossen Grad der Genauigkeit durch unsere Formel $M = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta}$ ausdrücken in welcher eine gleichförmige Dichte vorausgesetzt ist. Wenn man das System B, C in den oberen Theil eines durch die punktirte Linie D angedeuteten metallischen Gehäuses verwendet, so ist man sogar von der an der Aussenseite von B inducirten Ladung, die in unserer Formel gleichfalls nicht berücksichtigt ist frei, indem diese jetzt auf D erscheint: nach der Unterbrechung der Verbindung B—C findet sich auf B thatsächlich nur die an der Innenseite fast vollkommen gleichmässig vertheilte Ladung, entsprechend dem M in obiger Formel. Das Gehäuse D muss an einer Stelle selbstverständlich durchbrochen sein um eine isolirte Zuleitung zu B zu gestatten: doch dürfte die Anwendung dieses Gehäuses in der Praxis, wenn es sich nicht um die äussersten Grenzen der Genauigkeit handelt, als überflüssig erscheinen wegen der verschwindenden Kleinheit der an der Aussenseite von B inducirten Ladung.

Auch bei Anwendung dieses Schutzringes ist die Platte B noch mit einem Rande behaftet, allein demselben steht in sehr kleiner Entfernung der Ring C von gleichem Potential gegenüber in Folge dessen eine Anhäufung der Ladung am Rande von B entfällt. Dies wird um so strenger erfüllt sein je kleiner der Zwischenraum zwischen B und C ist. Bezeichnen wir den Radius von B mit R_1 den inneren Radius von C mit R_2 so besteht, wie Maxwell gezeigt hat, die Relation

$$M = V \cdot \frac{R_1^2 + R_2^2}{8 \delta}$$

wenn V die Potentialdifferenz und δ die Distanz der beiden Platten bedeutet. Es gilt diese Gleichung aber nur solange $R_2 - R_1$ klein ist gegen δ, wird diese Differenz unendlich klein so hat man $R_2 = R_1$ und

$$M = V \cdot \frac{R_1^2}{4 \delta} = \frac{V \cdot S}{4 \pi \delta}$$

was die gewöhnliche Formel ist. Aber selbst wenn die Bedingung dass $R_2 - R_1$ gegen δ klein sei, im Experimente nicht strenge erfüllt ist wird die mit Anwendung des Schutzringes erhaltene Ladung von B immer noch wesentlich besser mit der Formel übereinstimmen als bei Verwendung eines gewöhnlichen Condensators. Es wird daher von diesem Principe des Schutzringes bei vielen Apparaten die zur Messung elektrischer Ladungen dienen, Gebrauch gemacht.

XIII. Capitel.

Elektrostatische Messungen.

§ 41. Messung der Capacitäten.

Eine Aufgabe die bei elektrischen Untersuchungen sehr häufig gelöst werden muss, ist die Messung der Capacität eines bestimmten Leiters; da diese von der Induction der Umgebung abhängig ist so ist, wenn man kurzweg von der Capacität als einer zu bestimmenden Grösse spricht, dabei stillschweigend vorausgesetzt dass der zu untersuchende Körper sich so weit von allen anderen Leitern mit beträchtlicher Ausdehnung — z. B. den Wänden des Zimmers — befindet dass deren Einfluss vernachlässigt werden kann. Unter dieser Voraussetzung können wir dann die Capacität wie jede andere physikalische Constante ermitteln.

Eine jede Grösse, wenn sie gemessen werden soll, muss als ein Vielfaches einer, übrigens beliebig zu wählenden Einheit angegeben werden; so werden auch wir uns zunächst eine Einheit der Capacität wählen müssen, und als solche bietet sich fast von selbst die Capacität einer Kugel von bestimmter Grösse dar. Da, wie wir schon wissen, die Capacitäten der Kugeln direct durch deren Radien ausgedrückt werden, so wird unsere Einheit die Capacität einer Kugel sein deren Radius gleich der Längeneinheit ist. Indem wir uns Kugeln herstellen deren Radien beliebige Vielfache der Längeneinheit sind erhalten wir eine Reihe von Conductoren die, einem Gewichtssatze nicht unähnlich, einen Satz von Capacitäten repräsentiren.

Mit Hilfe irgend eines empfindlichen Elektroskops, z. B. eines Goldblattelektroskops, das die Existenz kleiner Elektricitätsmengen anzuzeigen im Stande ist, und eines derartigen Satzes von Capacitäten lässt sich die unbekannte Capacität eines Leiters — wenn dieselbe nicht ausserhalb der Grenzen des verwendeten Satzes fällt — auf folgende Weise bestimmen. Wir verbinden den zu untersuchenden

Körper in isolirtem Zustande mit dem positiven Pol einer galvanischen Kette deren negativer Pol zur Erde abgeleitet ist; dadurch bringen wir ihn auf das Potential $+V$ der Kette. Dann unterbrechen wir diese Verbindung, leiten den positiven Pol der Kette zur Erde und verbinden deren negativen mit jener Vergleichskugel die uns in Bezug auf Capacität dem zu untersuchenden Körper am nächsten zu stehen scheint. Wir bringen so die Kugel auf das Potential $-V$. Sind die Capacitäten des Körpers und der Kugel C_2 und C_1, ihre Ladungen M_2 und $-M_1$ so hat man

$$M_2 = V \cdot C_2 \qquad -M_1 = -VC_1.$$

Verbinden wir nun die Kugel, nach Entfernung der Kette, mit dem zu untersuchenden Körper, so wird das ganze System eine Ladung $M_2 - M_1$ besitzen von deren Vorzeichen wir uns durch Anlegung eines Elektroskops überzeugen. Ist die Summe positiv so ist $C_2 > C_1$ und wir hätten eine grössere Vergleichskugel zu nehmen, im entgegengesetzten Falle eine kleinere. Probiren wir nun so lange bis die Ladung $M_2 - M_1 = 0$ wird so ist die Capacität der betreffenden Kugel auch zugleich die des untersuchten Körpers.

Wie man sieht ist diese Null-Methode etwas umständlich, sie lässt aber nichtsdestoweniger einen bedeutenden Grad von Genauigkeit zu, und ihr Vorzug besteht darin dass man dabei keinerlei Messapparate für Elektricitätsmengen oder Potentiale bedarf.

Es wurden auch nach dieser Methode die ersten exacten Capacitätsmessungen ausgeführt, und zwar zu einer Zeit wo die elektrischen Messapparate noch auf einer sehr niedrigen Stufe der Entwicklung standen, nämlich in der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts: der englische Gelehrte Cavendish bediente sich ihrer um Vergleichungen der Capacitäten verschieden geformter Körper sowie verschiedener Condensatoren vorzunehmen, wobei er allerdings die hier vorausgesetzte Reihe von Kugeln durch den handlicheren Modus einer Reihe von Plattencondensatoren ersetzte, deren jeder mit einer Kugel von bekannter Capacität verglichen war. Auch stellte er sich einen Condensator her dessen Capacität durch Vergrösserung und Verkleinerung der Platten willkürlich variirt werden konnte (man könnte statt dessen auch die Distanz der Platten verändern) wodurch viele Zwischenglieder in der Reihe der Vergleichscondensatoren entbehrlich wurden.

Sir W. Thomson hat zuerst daran erinnert mit welch erstaunlicher Genauigkeit Cavendish nach dieser Methode Capacitäten verglich; so fand er z. B. dass die Capacitäten einer kreisförmigen

Scheibe und einer Kugel von gleichem Radius sich verhalten wie 1 : 1·57. Wir haben in § 38 dieses Verhältniss theoretisch bestimmt und dafür den Werth $\frac{\pi}{2}$ gefunden was vom obigen nur ganz unmerklich abweicht.

Obgleich wie das vorstehende Beispiel zeigt die Methode von Cavendish sehr genaue Resultate zu liefern vermag, so ist sie doch heutigen Tages, wo uns in den Galvanometern und Elektrometern sehr genaue und empfindliche Messapparate zur Verfügung stehen, schon wegen ihrer Umständlichkeit nicht mehr am Platze.

Hat man Körper von beträchtlicher Capacität z. B. Condensatoren mit einander zu vergleichen so kann man sich mit Vortheil der Galvanometer bedienen; wie bekannt wird die Magnetnadel eines derartigen Instrumentes aus ihrer Ruhelage abgelenkt sobald durch die in ihrer Nähe befindliche Drahtrolle ein elektrischer Strom fliesst. Mit einem solchen, von sehr kurzer Dauer, ist aber die Elektricitätsbewegung identisch die eintritt sobald wir einen geladenen Körper durch die Drahtrolle zur Erde entladen. Wie wir später sehen werden ist die Grösse des Ausschlages den die Galvanometernadel anzeigt direct abhängig von der Elektricitätsmenge welche zur Erde geflossen ist und zwar nur von dieser Grösse, so lange die Dauer des Abflusses sehr klein ist gegen die Schwingungsdauer der Nadel, welche Bedingung bei metallischer Ableitung des Conductors zur Erde natürlich immer erfüllt ist. Lassen wir hintereinander zwei Elektricitätsmengen M_1 und M_2 durch das Galvanometer zur Erde fliessen so wird die Nadel zwei Ausschläge α_1 und α_2 machen die der Bedingung genügen:

$$M_1 : M_2 = \sin \frac{1}{2} \alpha_1 : \sin \frac{1}{2} \alpha_2 .$$

Diese Ausschläge sind nur von sehr kurzer Dauer; unter α ist daher die grösste Elongation während des ersten Ausschlages verstanden.

Hat man nun zwei Conductoren von den Capacitäten C_1 und C_2 mit einander zu vergleichen, so ladet man sie beide bis zu dem gemeinsamen Potential V wodurch sie die Ladungen

$$M_1 = V C_1 \text{ und } M_2 = V C_2$$

annehmen; bestimmt man das Verhältniss dieser Ladungen auf die obige Weise mit dem Galvanometer so ist dadurch auch unmittelbar das gesuchte Verhältniss der beiden Capacitäten gegeben.

Man hat

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{M_1}{M_2} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha_1}{\sin \frac{1}{2} \alpha_2}.$$

Es liegt in der Natur der Sache dass man auf diese Weise, wenn das Galvanometer nicht eine ganz besondere Empfindlichkeit hat, nur Capacitäten von beträchtlicher Grösse z. B. von Condensatoren, nicht aber etwa von isolirten Kugeln und dgl. bestimmen kann, da die Elektricitätsmengen die durch das Galvanometer abfliessen, ziemlich bedeutende sein müssen wenn sie die Nadel merklich ablenken sollen; man kann daher auf diese Weise auch nicht einen unbekannten Körper mit einer Kugel von bekanntem Radius vergleichen, sondern muss als Maasseinheit einen Condensator von bekannter Capacität nehmen. Derartige Normal-Condensatoren von bestimmtem Werthe kommen gegenwärtig in Form von Blätter-Condensatoren im Handel vor. Ihre Capacität ist anderweitig bestimmt und auf eine Einheit (Farad) reducirt deren Werth und Bedeutung wir noch genauer werden kennen lernen.

Wenn es sich darum handelt Capacitäten von sehr kleinem Werthe mit einander zu vergleichen z. B. von einzelnen Kugeln, Platten und dgl. so müssen wir auf die galvanometrische Methode verzichten; aber statt in den auf die beiden Körper bezüglichen allgemeinen Gleichungen

$$M_1 = V_1 C_1 \qquad M_2 = V_2 C_2$$

$V_1 = V_2$ zu machen und das Verhältniss $M_1 : M_2$ und damit auch $C_1 : C_2$ zu bestimmen können wir auch $M_1 = M_2$ machen; sind wir dann im Stande das Verhältniss $V_1 : V_2$ zu ermitteln so werden wir unsere Aufgabe gleicherweise gelöst haben.

Nun geben uns die Elektrometer, deren Princip im nächsten Paragraph erörtert werden wird, ein ebenso bequemes als exactes Mittel an die Hand um Potentiale zu messen oder, genauer gesprochen, um jene Potentialdifferenzen zu messen die zwischen verschiedenen Körpern und der Erde bestehen; da wir das Potential der Erde gleich Null setzen so sind diese Differenzen zugleich die Potentiale der betreffenden Körper.

Haben wir zwei Körper deren Capacitäten C_1 und C_2 elektrometrisch mit einander verglichen werden sollen, so bringen wir zunächst den ersten durch Ertheilung einer Ladung M, die wir nicht näher zu kennen brauchen, auf ein Potential dessen Werth V_1 wir

dadurch bestimmen, dass wir den geladenen Körper mit dem Elektrometer in leitende Verbindung setzen. Es besteht nun die Relation

$$M = C_1 V_1.$$

Nachdem wir den Werth V_1 bestimmt haben trennen wir den Körper wieder vom Elektrometer und verbinden ihn mittelst eines langen und dünnen Drahtes mit dem zweiten Körper. Die beiden bilden nun zusammen einen Conductor dessen Capacität nach einem früheren Satze gleich der Summe $C_1 + C_2$ der Einzelcapacitäten ist, vorausgesetzt dass diese letzteren durch die Verbindung keine Aenderung erlitten haben. Damit diese Bedingung erfüllt sei muss eben der Verbindungsdraht lang gegen die Dimensionen der Körper sein, um eine wechselseitige Induction auszuschliessen; desgleichen muss dieser Draht dünn sein um selbst keine merkliche Capacität zu besitzen, da eine solche im weiteren vernachlässigt wird. Durch diese Verbindung nimmt das System ein Ausgleichspotential φ an, das, da die Ladung M ungeändert geblieben, der Gleichung genügen muss

$$M = \varphi (C_1 + C_2).$$

Man hat somit $\quad C_1 V_1 = \varphi (C_1 + C_2)$

und weiter

$$\frac{C_1}{C_2} = \frac{\varphi}{V_1 - \varphi}.$$

Da wir die Grösse φ wieder durch das Elektrometer bestimmen können, so genügen diese zwei Messungen zur Ermittlung des gesuchten Verhältnisses.

Der Werth der elektrometrischen Methode ist hauptsächlich in dem Umstande begründet dass die Elektrometer, je nach ihrer Construction sehr kleine sowie sehr grosse Potentiale zu messen gestatten; das Intervall das sie umfassen reicht von circa 0·001 Daniell bis zu vielen tausend Daniells. Hat man ein empfindliches Instrument z. B. ein Quadranten-Elektrometer zur Verfügung so genügt zur Ladung der zu untersuchenden Körper schon eine sehr schwache Elektricitätsquelle z. B. ein einzelnes galvanisches Element und dadurch wird es auch möglich Elektricitätsverluste durch mangelhafte Isolation der Leiter während des Versuches vollständig zu vermeiden.

Die vorstehende Methode der Capacitätsmessung wäre ganz correct wenn das Elektrometer, indem wir es mit dem geladenen Körper verbinden, wirklich das Potential anzeigen würde das dieser vor der Verbindung hatte. Das ist aber niemals strenge der Fall denn das Elektrometer besitzt selbst eine gewisse Capacität und bedarf zur Erhöhung seines Potentials von dem ursprünglichen Werthe Null zu dem schliesslichen, einer bestimmten Ladung die es natürlich

nur von dem Versuchskörper mitgetheilt bekommt. Dadurch sinkt aber das Potential des letzteren und die Angabe des Elektrometers ist nichts anderes als das Ausgleichspotential zwischen ihm und dem geladenen Körper. Wie viel dasselbe von dem ursprünglichen Potential des letzteren differirt hängt ganz von dem Verhältniss der beiden Capacitäten ab; doch könnte diese Differenz nur dann gleich Null gesetzt werden wenn die Capacität des Elektrometers gegen die des Körpers zu vernachlässigen ist, was jedoch nur in den seltensten Fällen der Fall sein dürfte.

Es variirt je nach der Construction der Elektrometer deren Capacität sehr beträchtlich; um nun von dieser Grösse ganz unabhängig zu sein kann man sich beim Vergleich der Capacitäten zweier Körper der folgenden sehr einfachen und ganz correcten Methode bedienen.

Die beiden Körper A und B haben die zu vergleichenden Capacitäten C_1 und C_2; die Capacität des zur Potentialmessung verwendeten Elektrometers sei C. Man ladet zuerst A mit Hilfe eines galvanischen Elementes auf das bekannte Potential V (dasselbe kann direct durch Anlegen des Elektrometers an den einen Pol, während der andere zur Erde abgeleitet ist, ermittelt werden; dabei spielt die Capacität des Elektrometers keine Rolle da durch den chemischen Process im Element jedenfalls so lange Elektricität nach entwickelt wird bis der mit dem isolirten Pol verbundene Leiter — das Elektrometer — das dem Elemente zukommende Potential hat). Dann unterbricht man die Verbindung zwischen A und dem Element und stellt die zwischen A und dem Elektrometer her; dieses zeigt nun ein Ausgleichspotential φ_1 an. Bezeichnen wir die Ladung die A von dem Elemente aufgenommen hat mit M_1 so gelten folgende Gleichungen:

$$M_1 = V \cdot C_1 = \varphi_1 (C + C_1) \text{ und } \frac{C}{C_1} = \frac{V - \varphi_1}{\varphi_1}.$$

Wiederholen wir dieselbe Messung mit dem Körper B, so wird dieser bei Ladung auf das gleiche Potential V die Elektricitätsmenge M_2 aufnehmen, und nach Verbindung mit dem Elektrometer wird dieses ein Ausgleichspotential φ_2 anzeigen. Jetzt gelten die Gleichungen:

$$M_2 = V C_2 = \varphi_2 (C + C_2) \text{ und } \frac{C}{C_2} = \frac{V - \varphi_2}{\varphi_2}$$

woraus sich unmittelbar das gesuchte Verhältniss ergibt:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{V - \varphi_1}{V - \varphi_2} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_1}.$$

Wie man sieht basirt diese Methode darauf die beiden Körper *A* und *B* in Bezug auf ihre Capacität hintereinander mit einem dritten Körper, dem Elektrometer, zu vergleichen; aus den Messungen ergibt sich somit auch die Capacität des letzteren.

Man kann auf diese Weise sehr gut die Variationen sichtbar machen denen die Capacität eines Körpers je nach der grösseren oder geringeren Entfernung eines Inductors unterworfen ist.

Hat man z. B. einen ebenen Condensator zur Verfügung dessen Platten in verschiedenen Distanzen von einander gebracht werden können, und leitet man die eine dauernd zur Erde so kann man durch Vergleichung der constanten Capacität des Elektrometers mit der variablen der zweiten Platte, bei verschiedener Stellung derselben, sehr deutlich den Einfluss der Plattendistanz auf die Capacität der einzelnen Platte studiren.

§ 42. Elektrometer, Potentialmessung.

Schon die Aufgaben des vorangegangenen Paragraphen würden genügen die Nothwendigkeit eines Apparates klar zu machen mit dessen Hilfe man Potentialdifferenzen zu messen vermag; aber noch viel eindringlicher zeigt sich dieselbe demjenigen der die Erscheinungen des Galvanismus studirt, und dabei fortwährend auf Probleme stösst deren Lösung die Kenntniss der Potentiale an den verschiedenen Punkten des dem Studium unterworfenen Leitersystems voraussetzt.

Die Anzahl der verschiedenen Instrumente die diesem Zwecke entsprechen sollen ist demgemäss auch eine bedeutende, doch reduciren sich die praktisch brauchbaren auf einige wenige Typen deren Theorie im Folgenden kurz auseinandergesetzt werden soll.

Wenn zwischen einem Körper und seiner Umgebung eine Potentialdifferenz herrscht so besitzt derselbe, wie aus der Coulomb'schen Gleichung hervorgeht, auch eine elektrische Ladung; es ist das Potentialgefälle in Richtung der Oberflächennormale seinem absoluten Werthe nach gleich der 4π-fachen Dichte der Ladung an jedem Punkte der Oberfläche. Diese Ladung ist positiv oder negativ je nachdem die Kraftlinien von dem Körper ausgehen oder auf ihm endigen. Dem Potentialgefälle proportional ist aber die Kraft mit welcher die Einheit der Ladung nach Aussen getrieben wird, und ist der Körper isolirt so dass die Ladung ihn nicht verlassen kann so überträgt sich diese Kraft auf den Körper selbst; es greift also an demselben

an jedem Punkte seiner Oberfläche eine dem dort herrschenden Potentialgefälle proportionale Kraft an. Eine solche mechanische Kraft lässt sich aber wahrnehmbar machen und ihrer Intensität nach beurtheilen wenn der betreffende Körper wirklich beweglich ist; die Kunst der Construction eines Elektrometers wird nun darin bestehen den Apparat so anzuordnen dass aus der erzeugten mechanischen Kraft ein directer Schluss auf die vorhandenen Potentialdifferenzen möglich ist.

Dieser Zweck ist zwar bei den älteren Apparaten nicht erreicht, wenigstens nicht direct; da dieselben aber doch in vielen Fällen, namentlich wo es sich um sehr hohe Potentiale handelt, gute Dienste leisten so soll ihr Princip im Folgenden kurz besprochen werden.



Fig. 64.

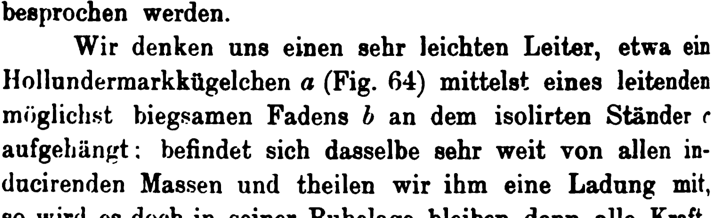
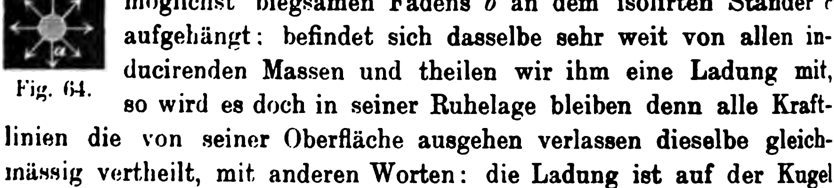


Wir denken uns einen sehr leichten Leiter, etwa ein Hollundermarkkügelchen *a* (Fig. 64) mittelst eines leitenden möglichst biegsamen Fadens *b* an dem isolirten Ständer *c* aufgehängt; befindet sich dasselbe sehr weit von allen inducirenden Massen und theilen wir ihm eine Ladung mit, so wird es doch in seiner Ruhelage bleiben denn alle Kraftlinien die von seiner Oberfläche ausgehen verlassen dieselbe gleichmässig vertheilt, mit anderen Worten: die Ladung ist auf der Kugel gleichmässig vertheilt und die Resultirende aller Zugkräfte gleich Null. Dabei ist hier, wie auch bei den folgenden Beispielen die Ladung vernachlässigt welche sich auf dem Faden befindet und, der geringen Capacität desselben entsprechend, auch thatsächlich vernachlässigt werden kann.



Fig. 65.


Eine derartig frei hängende Kugel würde uns also auch bei den höchsten Potentialen die ihr mitgetheilt wurden nichts anzeigen.

Bringen wir aber in die Nähe derselben einen Leiter der immer mit der Kugel auf gleichem Potential erhalten wird, was wir am einfachsten dadurch erreichen dass wir den Ständer *c* wie in Fig. 65 umgestalten, so ändert sich die Erscheinung vollständig. Laden wir jetzt die Kugel wieder so gehen keine Kraftlinien mehr von derselben in der Richtung gegen den Ständer, sondern alle biegen in einer Weise nach der entgegengesetzten Seite um wie es durch die Pfeile der Figur ungefähr angedeutet wird.

Die Kraftlinien welche vom Ständer selbst ausgehen, können natürlich keine Bewegung hervorbringen da derselbe fixirt ist, aber die von der Kugel ausgehenden haben jetzt nicht mehr die Resul-

tirende Null sondern werden dieselbe vom Ständer *c* wegbewegen und zwar so lange, bis die zunehmende Wirkung der Schwere der elektrischen Kraft das Gleichgewicht hält. Bei einem gewissen Ausschlagswinkel α muss demnach die Kugel eine neue Gleichgewichtslage a' haben. Dieser Winkel α kann demnach als Maass der Elektrisirung des Apparates gelten; doch besteht zwischen ihm und dem Potential, wie man leicht einsieht, keine genau bestimmbare Relation, will man den Apparat daher nicht nur zu qualitativen sondern auch zu quantitativen Bestimmungen verwenden so müssten die Potentialwerthe der einzelnen Ausschlagswinkel auf irgend eine Weise empirisch bestimmt werden, was z. B. durch Laden mit successive immer mehr und mehr Elementen einer Batterie geschehen könnte, wobei die gleichzeitig eintretenden Ausschlagswinkel an einem kleinen Theilquadranten abgelesen werden müssten.

Doch ist der Apparat, seiner Construction entsprechend, sehr unempfindlich und reagirt im Allgemeinen erst deutlich auf Ladungen von der Grössenordnung von 1000 Daniell; diese Eigenschaft macht ihn aber andererseits auch wieder sehr brauchbar in Fällen wo es sich, wie beim Experimentiren mit Elektrisirmaschinen, um sehr hohe Potentiale und nur ungefähre Schätzungen derselben handelt. Das Princip dieses Apparates wurde schon im vorigen Jahrhundert von H e n l e y bei Construction des bekannten Quadrantelektroskops verwendet.

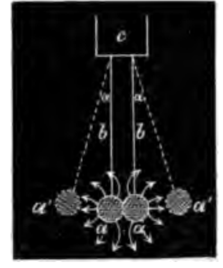


Fig. 66.

Man kann diesen Apparat noch dadurch bedeutend empfindlicher machen dass man den verticalen Theil des Ständers *c* durch ein zweites, dem ersten ganz analoges Pendelchen, ersetzt, wie in Fig. 66. Wird nun dem letzteren durch die gemeinsame Aufhängung *c* eine Ladung mitgetheilt so verlaufen die Kraftlinien ungefähr den Pfeilen der Zeichnung entsprechend, und die Folge davon ist eine neue Gleichgewichtslage a' a' der Kugeln, und ein Divergenzwinkel 2 α. In dieser Form wurde der Apparat zuerst von N o l l e t, gleichfalls schon im vorigen Jahrhundert, verwendet. Ersetzt man der grösseren Empfindlichkeit halber, die Pendelchen durch schmale Gold- oder Aluminiumblättchen und umgibt dieselben zum Schutze vor Luftströmungen mit einem geschlossenen Gehäuse, so hat man das überall übliche Goldblattelektroskop. Auch bei diesem besteht kein directer Zusammenhang zwischen Potential und Divergenz der Blättchen; es kann aber die Empfindlichkeit leicht so weit erhöht werden dass die

Grenzen der Ausschläge Werthen von 50—200 Daniell entsprechen und es genügt daher eine galvanische Batterie von dieser Stärke um die Instrumente durch einmaliges Calibriren in wirkliche Messinstrumente, in Elektrometer zu verwandeln. Es ist selbstverständlich dass dafür gesorgt sein muss, dass man die Divergenz der Blättchen an einer passend angebrachten, übrigens willkürlichen Scala ablesen kann.

Dabei ist noch auf einen Punkt von grosser Wichtigkeit aufmerksam zu machen. Die Kraft mit welcher das Pendelchen oder Metallblättchen nach einer Richtung gezogen wird hängt von der Grösse des Potentialgefälles in dieser Richtung ab, und letztere ist wesentlich bedingt durch die Distanz in welcher sich die nächsten Leiter vom Pendelchen befinden. Ist V das Potential des letzteren und sind die umliegenden Leiter zur Erde abgeleitet, also auf dem Potentiale Null, so vertheilt sich die Grösse V auf die ganze Distanz zwischen dem Elektroskop und den nächsten Partien der Erde (Wände, Tisch etc.). Wird diese Distanz kleiner so resultirt, wie unmittelbar klar ist, ein stärkeres Potentialgefälle und damit auch eine vergrösserte Divergenz im Elektroskop, wovon man sich z. B. überzeugen kann wenn man von seitwärts beide Hände demselben nähert. Um daher aus der Divergenz auf das Potential unter allen äusseren Umständen schliessen zu können ist es unbedingt nothwendig die Distanz zwischen den Pendelchen und den nächsten Partien der Erde constant zu erhalten, und dies erreicht man am einfachsten dadurch dass man die Hülle des Elektroskops aus Metall anfertigt und zur Erde ableitet. Zwei Glasfenster in derselben ermöglichen die Beobachtung der Divergenz und eine gute Isolirung der Zuleitung *c* muss dafür sorgen dass zwischen den Pendelchen und der Hülle kein Elektricitätsübergang stattfinden kann.

Es ist zwar bei dieser Anordnung die Distanz zwischen Hülle und Pendelchen für jeden Divergenzwinkel eine andere, das hat aber keine Bedeutung da der Apparat empirisch graduirt wird; das worauf es ankömmt ist die Constanz dieser Entfernung bei einer bestimmten Divergenz unter allen äusseren Verhältnissen, und diese ist auf die angegebene Weise erreicht.

Ein weiterer Vortheil dieser Anordnung ist die grössere Empfindlichkeit da das Potentialgefälle bei gleicher Grösse des Potentials ein stärkeres ist als ohne metallische Hülle; auch werden die sehr störenden und schwer zu beseitigenden zufälligen Elektrisirungen vermieden welchen die Hülle ausgesetzt ist wenn sie aus einer isolirenden Substanz z. B. Glas besteht.

Man hat dem Apparat auch eine noch etwas andere Construction gegeben wobei nur ein einziges Pendelchen (*a* Fig. 67) oder Goldblättchen in Verwendung kommt; dasselbe hängt in einem elektrischen Felde erzeugt durch zwei mit den Polen einer constanten Säule verbundenen Metallplatten *A A*.

Wird dem Pendelchen eine Elektrisirung ertheilt, so verlaufen die Kraftlinien einseitig und endigen alle auf der entgegengesetzt geladenen Platte *A*. Die den verschiedenen Ausschlagswinkeln α zugehörenden Potentialwerthe müssen auch hier empirisch eruirt werden; diese Anordnung hat den Vortheil dass die Richtung des Ausschlages zugleich den Sinn der Elektrisirung erkennen lässt, auch ist die Empfindlichkeit eine grössere wie beim gewöhnlichen Goldblattelektroskop.

Bohnenberger hat dieses Princip bei seinem bekannten Elektroskope angewendet; später wurde die Construction von Hankel durch Hinzufügung eines Mikroskops vervollkommnet, das noch ausserordentlich schwache Ausschläge des Goldblättchens zu messen gestattet. Die Empfindlichkeit des Hankel'schen Elektroskops ist eine sehr bedeutende.

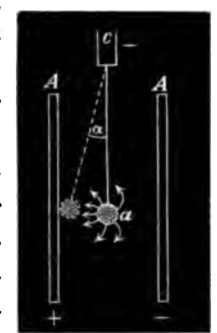


Fig. 67.

Bei einer praktischen Verwerthung der vorstehenden Elektrometer macht sich der Umstand sehr unangenehm geltend, dass die Ausschläge den Potentialen nicht proportional sind; nicht nur dass dadurch eine Calibrirung des Apparates für alle möglichen Ausschläge nothwendig wird, es ändert sich auch die Empfindlichkeit desselben innerhalb sehr weiter Grenzen und zwar, wenigstens bei den zuletzt besprochenen Anordnungen, in der Weise dass für geringe Potentiale die Empfindlichkeit eine weit kleinere ist als für grosse, während gerade das Gegentheil, wenn schon keine Constanz zu erzielen ist, wünschenswerth wäre.

Im Folgenden soll ein Apparat besprochen werden der die eben erwähnten Uebelstände gänzlich vermeidet und der durch die theoretische wie praktische Vollkommenheit seiner Construction gegenwärtig alle anderen Elektrometer mit Recht verdrängt hat. Es ist dies das von Sir W. Thomson [1]) angegebene sogenannte Quadrant-Elektrometer.

---

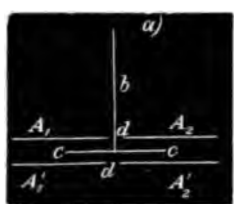
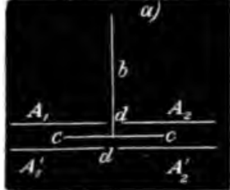
[1]) Reprint of Papers etc.

Die neue Gleichgewichtslage welche der bewegliche Theil eines Elektrometers (im früheren die Goldblättchen etc.) unter dem Einflusse einer elektrischen Ladung annimmt, ist bedingt durch die Grösse der elektrischen Kraft die diesen Ausschlag hervorbringt und zu vergrössern strebt, und durch die mechanische Kraft welche die ursprüngliche Ruhelage wieder herzustellen strebt.

Kann man den Apparat so construiren dass die elektrische Kraft für alle Ausschläge ein und denselben Werth hat, und dass die entgegenwirkende mechanische Kraft dem Ausschlagswinkel proportional ist, so hat man offenbar die gewünschte Proportionalität zwischen Potentialen und Ausschlägen erreicht. Denn da die elektrische Kraft K der Potentialdifferenz V zwischen dem beweglichen Theil und seiner Umgebung proportional sein muss so hat man

$$K = p \cdot V \text{ und } K' = p' \alpha$$

wo K' die mechanische Kraft, α den Ausschlagswinkel und p und p' Constante bedeuten die von der Construction des Apparates abhängen.

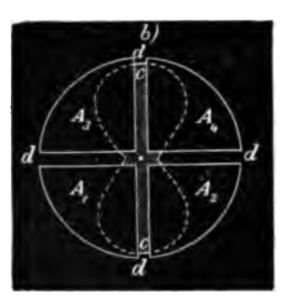


Fig. 68.

Da man für die neue Gleichgewichtslage die Bedingung $K = K'$ hat so ergibt sich die gewünschte Relation

$$V = p'' \cdot \alpha.$$

Die Art und Weise wie Thomson diesen Fall realisirt hat ist im Princip die folgende.

Als mechanische Kraft fungirt nicht wie bei den Goldblattelektrometern die Schwere sondern die Torsion eines $^1/_{20}$ mm dicken circa 300 mm langen freihängenden Platindrahtes b der an seinem oberen Ende an einem Isolator befestigt ist und an seinem unteren ein horizontales, lemniskatenförmiges, möglichst dünnes Aluminiumblech c trägt. (In Fig. 68 a und b ist der Hauptbestandtheil des Apparates in Seiten- und Oberansicht schematisch dargestellt.) Da das obere Ende von b festgeklemmt ist so kann diese Lemniskate horizontale Torsionsschwingungen ausführen wobei, wie bekannt, für alle Ausschlagswinkel innerhalb sehr weiter Grenzen die zurücktreibende Kraft der Torsion des Drahtes diesen Winkeln proportional ist. Es ist dies das schon bekannte, zuerst von Coulomb gelegentlich seiner Drehwaage eingeführte Messungsprincip.

Die Lemniskate schwingt in einer circa 1 cm hohen cylindrischen Metallbüchse die durch zwei rechtwinkelig auf einander

geführte axiale Schnitte d, d, in vier von einander gänzlich isolirte Theile zerlegt ist, A_1 A_2 A_3 A_4. Um einen Einblick in das Innere dieser Büchse zu ermöglichen wird die Mantelfläche derselben in der Regel fortgelassen und zwischen je zwei zusammengehörenden Platten unten und oben (z. B. A_1 und A_1') durch Draht eine metallische Verbindung hergestellt. Ein solches ein für alle Male verbundenes Plattenpaar nennen wir einen Quadranten, und bezeichnen dieselben kurz nach den Nummern ihrer Indices mit 1, 2, 3, 4. Alle diese Quadranten, die aus demselben Metalle hergestellt sein müssen, werden von sehr gut isolirenden Stützen getragen und sind mit passend angebrachten Zuleitungsdrähten versehen.

Wir wollen vorläufig die Quadranten 3 und 4 als nicht vorhanden betrachten indem dieselben nur dazu dienen die erzielte Wirkung zu verdoppeln; es seien die Paare 1 und 2 zur Erde abgeleitet also auf dem Potentiale Null, und die Lemniskate durch den dünnen Aufhängedraht mit dem einen Pol einer Volta'schen oder Zamboni'schen Säule von circa 100—200 Daniell Spannung, deren zweiter Pol abgeleitet ist, verbunden. War die Stellung der Lemniskate bei torsionslosem Drahte so, dass ihre Längsachse gerade über einem Schlitze d stand so ist Alles symmetrisch und es kann trotz der Potentialdifferenz zwischen den Quadranten und der Lemniskate keine Drehung der letzteren eintreten da die Kräfte gleich und entgegengesetzt wirken. Zur Erzielung dieser Symmetrie ist es nothwendig dass die Distanz zwischen Quadranten und Lemniskate an allen Punkten die gleiche ist worauf bei Adjustirung des Apparates zu achten ist.

Unterbrechen wir nun die Verbindung zwischen der Erde und dem Quadranten 2 und bringen diesen auf ein beliebiges Potential, so wird dadurch die Symmetrie der Kräfte die auf die Lemniskate wirken sofort gestört werden, und eine Drehung derselben um den Aufhängedraht eintreten.

Die beiden Ränder des Schlitzes d sind jetzt auf verschiedenem Potential, zwischen ihnen ist ein elektrisches Feld in welchem sich die Längsachse der geladenen Lemniskate ganz ähnlich bewegt wie das Goldblättchen im Felde des Bohnenberger'schen oder Hankel-schen Elektrometers, und durch die Richtung ihrer Bewegung sofort den Sinn der Elektrisirung erkennen lässt. Die Partien der Lemniskate die sich im Inneren der Quadranten befinden sind verhältnissmässig kleinen Kräften unterworfen, die hauptsächlichste Ursache der Drehung findet sich an den Stellen der Lemniskate die sich gerade über dem

Schlitz befinden; und da bei einer Drehung derselben — innerhalb gewisser Grenzen — immer neue Diameter derselben diese Stellung einnehmen so wirkt sie sozusagen wie eine Nadel die sich dreht und dabei doch immer an derselben Stelle bleibt. Denn indem die Lemniskate sich dreht erzeugt sie eine gewisse Torsion des Drahtes während immer neue Partien derselben über den Schlitz kommen und dort, immer an derselben Stelle, die Nadel bilden. Gerade in dieser Eigenthümlichkeit zeigt sich die Genialität mit welcher dieser Apparat construirt ist.

In dem letztberührten Umstande ist es begründet dass die elektrische Kraft bei allen Ausschlägen constant bleibt, wie es oben als Bedingung gefordert wurde; da dies aber nur erreicht wird wenn die treibende Kraft nur in der Gegend des Schlitzes und nicht auch im Inneren der Quadranten wirkt so wird niemals eine absolute Constanz der Kraft herstellbar sein. Wie weit aber eine Annäherung an diese erlangt werden kann ergibt sich aus den unten folgenden Formeln unmittelbar.

Die Wirkung der Quadranten 3 und 4 auf die Lemniskate ist ganz dieselbe wie die der beiden anderen, wenn zwischen ihnen die gleiche Potentialdifferenz besteht; man verbindet daher dauernd 1 mit 4 und 2 mit 3 wodurch die beiden Hälften der Lemniskate den Draht jederzeit im gleichen Sinne zu tordiren streben. Die Empfindlichkeit des Apparates wird somit die doppelte.

Was die Beobachtung der erzeugten Drehung anlangt so geschieht dieselbe mittelst Fernrohr und Scala; es ist zu diesem Zwecke in der Verlängerung des Aufhängedrahtes nach unten an der Lemniskate ein Metallstift angebracht der einen Spiegel trägt. Will man die Schwingungen dämpfen so bringt man am Ende dieses Metallstiftes einen Glaskörper an der in eine isolirende Flüssigkeit taucht, am besten Vaselinöl (paraff. liquid.); Schwefelsäure ist weniger geeignet, weil ihre Dämpfe im Laufe der Zeit die Metalltheile des Apparates angreifen. Bei passender Zusammenstellung des Apparates gelingt es demselben eine derartige Empfindlichkeit zu verleihen, dass eine Potentialdifferenz von 1 Daniell zwischen den Quadrantenpaaren, eine Ablenkung von 100 Theilen der Millimeterscala erzeugt. Eine Aenderung der Empfindlichkeit kann durch Variation der Ladung der Lemniskate oder der Dicke des Aufhängedrahtes erreicht werden.

Da bei der angenommenen Anordnung innerhalb der Grenzen der Spiegelablesung die elektrische Kraft constant und die Torsionskraft den Ausschlagswinkeln proportional bleibt, so können die Ab-

lesungen direct den Potentialdifferenzen der Quadranten proportional gesetzt werden. Eine einmalige Ermittlung dieser Proportionalitätsconstante, etwa durch Anlegung der beiden Pole eines übrigens isolirten Normalelementes an die Quadranten 1 und 2, genügt somit um alle folgenden Ablesungen direct auf dieses Normalelement als Einheit beziehen zu können.

In der Regel lässt man das Quadrantenpaar 1 dauernd zur Erde abgeleitet und verbindet den Körper dessen Potential gemessen werden soll mit dem Quadranten 2; der erfolgte Ausschlag ist dann ein Maass der Potentialdifferenz zwischen Körper und Erde. Dabei ist zu beachten dass das Potential dieses Körpers gemessen wird während er mit dem Elektrometer in Verbindung steht, dass also hier die im vorigen Paragraph über die Capacität des Elektrometers und das dadurch bedingte Ausgleichspotential gemachten Bemerkungen Giltigkeit haben; nur wenn der Körper den Pol einer Elektricitätsquelle selbst bildet, deren Potential gemessen werden soll, braucht auf die Capacität des Elektrometers aus leicht begreiflichen Gründen weiter keine Rücksicht genommen zu werden.

Wir wollen nun genauer untersuchen in welchem Verhältniss bei diesem Instrumente die Potentialdifferenz der Quadranten zu der Ablenkung steht. Wir bezeichnen die Potentiale welche die Lemniskate und die Quadrantenpaare 1 und 2 in einem gegebenen Momente haben der Reihe nach mit V, V_1 und V_2; diesen drei Körpern kommen dann auch gewisse Ladungen zu die wir M, M_1 und M_2 nennen, und diese Körper bilden in der gegenseitigen Lage die sie eben einnehmen, ein System dessen Energie W nach § 22 durch den Ausdruck $W = \frac{1}{2} \Sigma m v$ gegeben ist, wobei das unter dem Summenzeichen angedeutete Product für alle drei Körper zu bilden ist. Verschieben wir diese Körper gegen einander, so ändert sich im Allgemeinen auch diese Summe und das kann nur unter gleichzeitiger Arbeitsleistung geschehen, wobei zwischen der Aenderung der Energie W und der geleisteten Arbeit A die Relation besteht:

$$d\,W = -\,d\,A.$$

Eine Verschiebung der drei Körper gegen einander kann nur durch eine Bewegung der Lemniskate hervorgebracht werden und diese kann sich nur in ihrer eigenen Ebene drehen. Betrachten wir den Angriffspunkt der Resultirenden der elektrischen Kräfte so wird dieser jedenfalls in der Schwingungsrichtung der Lemniskate getrieben, da nach dieser Richtung alles symmetrisch ist, und zwar mit einer

Kraft die wir mit K bezeichnen wollen. Bewegt sich der Punkt um die Strecke x so ist die dabei geleistete Arbeit gleich $K \cdot x$. Nach dem oben Erwähnten übergeht die Energie des Systems dabei von W in W' und man hat, dem absoluten Werthe nach,

$$K \cdot x = W' - W.$$

Diese Gleichung setzt uns in den Stand die Grösse der Kraft K als Function der gegebenen Potentiale auszudrücken, denn die Energien W und W' sind selbst nur Functionen dieser Grössen.

Wir bezeichnen die Ladungen der Lemniskate und der Quadranten 1 und 2 in der ursprünglichen Lage mit M, M_1 und M_2 und nach einer Drehung um die Strecke x mit M' M_1' M_2'. Die neuen Ladungen stehen mit den alten in einer einfachen Beziehung; es wird sich nämlich die Dichte an den Rändern der Lemniskate und an jenen Partien die gerade über dem Schlitz stehen nicht ändern; wohl aber wird sich bei einer Drehung derselben z. B. von 1 gegen 2 die linke Seite verkleinern und die rechte um eben so viel vergrössern. Auf jeder Seite herrscht aber — von den unveränderlichen Randpartien abgesehen — eine Dichte die der Potentialdifferenz mit dem gegenüberstehenden Quadranten proportional sein muss, mit welchem die Lemniskate einen ebenen Condensator bildet. Bei einer Drehung um x geht somit ein der Grösse x proportionales Flächenstück von der einen Seite des Schlitzes zur anderen; die Ladung wächst somit um die Grösse $p\,x\,(V - V_2)$ und nimmt gleichzeitig ab um $p\,x\,(V - V_1)$, wo p eine Constante bedeutet. Auf den Quadranten werden sich ganz analoge Veränderungen der Ladung vollziehen denn 1 wird um ebensoviel abnehmen (dem absoluten Werthe nach) als die linke Seite der Lemniskate, dagegen 2 so viel zunehmen als deren rechte. Unter Berücksichtigung des Umstandes dass einem positiven Zuwachs der Lemniskate ein negativer des Quadranten entspricht, ergibt sich somit:

$$M' = M + p\,x\,(V - V_2) - p\,x\,(V - V_1)$$
$$M_1' = M_1 + p\,x\,(V - V_1)$$
$$M_2' = M_2 - p\,x\,(V - V_2).$$

Die ursprüngliche Energie des Systems war:

$$W = \frac{1}{2}\,\Sigma\,m\,v = \frac{1}{2}\,[M\,V + M_1\,V_1 + M_2\,V_2].$$

Nach der Drehung ist dieselbe aber:

$$W' = \frac{1}{2}\,\Sigma\,m'\,v = \frac{1}{2}\,\{M\,V + p\,x\,V\,(V - V_2) - p\,x\,V\,(V - V_1) +$$
$$+ V_2\,[M_2 - p\,x\,(V - V_2)] + V_1\,[M_1 + p\,x\,(V - V_1)]\}.$$

Die Differenz $W' - W$ wird somit

$$W' - W = \frac{1}{2} p x [2 V (V_1 - V_2) - V_1^2 + V_2^2] =$$

$$= p x (V_1 - V_2) \left[V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right].$$

Da die von den elektrischen Kräften geleistete Arbeit $K \cdot x$ dieser Aenderung der Energie an Grösse gleich sein muss so erhalten wir schliesslich für die drehende Kraft K den Ausdruck:

$$K = p (V_1 - V_2) \left[V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right].$$

Da die Torsion des Aufhängedrahtes dieser Kraft das Gleichgewicht halten muss, die Ablesungen am Fernrohr aber dieser Torsion proportional sind, so folgt daraus dass letztere gleichfalls die obige Function der vorhandenen Potentiale sind. Man wird dabei jedoch zu grosse Ausschlagswinkel vermeiden müssen da, wie bei Ableitung der Formel angenommen wurde, der Rand der Lemniskate dem Schlitze nicht zu nahe kommen darf.

Es ist aus dieser Formel jetzt leicht ersichtlich unter welchen Bedingungen die Ablesungen den Potentialdifferenzen der Quadranten einfach proportional sind. Es wird dies immer der Fall sein wenn die Grösse $\frac{1}{2} (V_1 + V_2)$ gegen V zu vernachlässigen ist denn dann erhält man

$$K = p (V_1 - V_2) V$$

oder, da die Ablesungen A der Kraft proportional sind,

$$A = q \cdot V (V_1 - V_2)$$

wo q eine Constante bedeutet die von der Aufstellung des Apparates abhängt. Auch das Potential V der Lemniskate wird, wenn dieselbe dauernd mit einer Säule verbunden ist, constant und wir können schreiben

$$A = q' (V_1 - V_2)$$

d. h. die Ablesungen sind der Potentialdifferenz der Quadranten proportional. In der Regel kann man den einen Quadranten z. B. den mit 2 bezeichneten, dauernd zur Erde leiten und dadurch $V_2 = 0$ machen; ladet man dann den Quadranten 1 bis zu dem zu messenden Potentiale V_1 so hat man die einfache Relation:

$$A = q' \cdot V_1.$$

Und entsprechen den zwei nacheinander gemessenen Potentialen φ_1 und φ_2 die Ablesungen A_1 und A_2 so besteht die einfache Relation

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{A_1}{A_2}.$$

Für manche Fälle ist es vortheilhaft das Instrument noch in einer anderen Weise zu gebrauchen. Man verbindet den Quadranten 2 mit der Erde, beseitigt die Säule mit welcher die Lemniskate geladen wurde und verbindet letztere durch einen Draht mit dem Quadranten 1.

Bringt man nun diesen auf ein Potential V_1 so ergibt sich die drehende Kraft der elektrischen Ladungen aus der früheren Formel wenn wir $V = V_1$ und $V_2 = 0$ setzen. Wir erhalten so:

$$K = p \cdot V_1 \left(V_1 - \frac{1}{2} V_1 \right) = p' V_1^2$$

und für die Ablesungen: $A = p'' \cdot V_1^2$.

Es sind also jetzt die Ablesungen den Quadraten der gemessenen Potentiale proportional was die Folge hat, dass der Apparat für relativ grosse Potentiale empfindlicher ist als für kleine, auch ist der Ausschlag bei dieser Anordnung vom Vorzeichen der Elektrisirung unabhängig was eine besondere Prüfung desselben erforderlich macht; dagegen liegt ein grosser Vortheil dieser Schaltung darin dass man von jeder elektrischen Hilfsquelle, also auch von deren Inconstanz frei ist wodurch die Empfindlichkeit im Laufe der Zeit keine Aenderung erleidet. Doch lässt sich auf diese Weise bei weitem nicht jene Empfindlichkeit erreichen, wenigstens nicht für kleine Potentiale von der Grössenordnung eines Daniell, wie bei der früher besprochenen Art der Justirung. Man kann den Umstand, dass die Art der Elektrisirung keinen Einfluss auf den Sinn des Ausschlages hat auch dazu benützen um das Instrument nach Art eines Elektrodynamometers zur Messung rasch wechselnder positiver und negativer Potentiale zu gebrauchen, wobei der Ausschlag einen constanten der absoluten Grösse dieser Potentiale entsprechenden Werth annimmt; doch ist bei derartigen Messungen eine gewisse Vorsicht nothwendig weil bei zu schnellem Wechsel der Elektrisirungen sich die + und — Ladungen superponiren und das Potential Null resultirt.

Man kann das Quadrant-Elektrometer auch noch auf verschiedene andere Weisen gebrauchen deren Effect sich aus der allgemeinen Formel für den Ausschlag A:

$$A = p \cdot (V_1 - V_2) \left[V - \frac{1}{2} (V_1 + V_2) \right]$$

ergibt.

Bei der gewöhnlichen Schaltung wo man $A_2 = 0$ macht und der Lemniskate das sehr hohe und constante Potential V ertheilt ergibt sich zwischen dem zu messenden Potentiale V_1 und dem Ausschlag A nur dann Proportionalität wenn V_1 gegen V sehr klein ist; nun ist es sehr oft wünschenswerth von der letzteren Bedingung frei zu sein, namentlich wenn man das Instrument zur Messung grösserer Potentiale verwenden will. Es lässt sich dann der folgende Weg einschlagen: man macht wieder $V_2 = 0$ und ladet den Quadranten 1 mit Hilfe einer Säule von passend vielen Elementen auf das constante Potential V_1. Die Lemniskate bringt man auf den zu messenden Werth V. Man hat dann:

$$A = p\,V_1\left(V - \frac{1}{2}\,V_1\right) = p\,V_1\,V - \frac{1}{2}\,V_1^2 = a \cdot V + b$$

wo a und b Constante bedeuten. Es bleibt also der Ausschlag eine lineare Function des zu messenden Potentiales, gleichgiltig wie gross dieses sei; der Unterschied gegen die frühere Schaltung besteht nur darin dass für $V = 0$ noch ein Ausschlag $A = b$ übrig bleibt der von der Induction zwischen dem Quadranten 1 und der unelektrischen Lemniskate herrührt. Zählt man die Ausschläge von dieser Ruhelage b an so sind sie gleichfalls den Potentialen proportional.

Man kann übrigens diese Grösse b sehr leicht der Null gleich machen indem man die Pole einer in der Mitte zur Erde abgeleiteten Säule mit den Quadranten 1 und 2 verbindet und übrigens wie im Vorhergehenden verfährt.

Sind die Potentiale der Säule an ihren Enden $+\varphi$ und $-\varphi$ so hat man in der Gleichung für den Ausschlag zu setzen:

$$V_1 = +\varphi \text{ und } V_2 = -\varphi$$

und erhält

$$A = p \cdot 2\,\varphi \cdot V = a \cdot V$$

wo a constant ist. Es sind also wieder die Ausschläge den Potentialen proportional und ausserdem wird für $V = 0$ auch $A = 0$ d. h. es stimmt der Nullpunkt mit der torsionslosen Ruhelage der Lemniskate überein. Diese Anordnung erweist sich bei Messung grösserer Potentiale als sehr brauchbar; man kann die Empfindlichkeit beliebig variiren je nach der gewählten Grösse von φ.

Sir W. Thomson hat noch eine Reihe Elektrometer nach ähnlichen Principien construirt, doch hat sich das Quadrant-Elektrometer wegen seiner Empfindlichkeit und Genauigkeit und wegen der Leichtigkeit seiner Handhabung von allen am besten bewährt und kann

gegenwärtig, namentlich bei wissenschaftlichen Untersuchungen, kaum mehr entbehrt werden.

Es soll im Folgenden noch ein Thomson'scher Apparat beschrieben werden der sehr hohe Potentiale zu messen gestattet und in Folge seiner Construction es ermöglicht dieselben in absolutem Maass d. h. in den Einheiten Gramm, Centimeter und Secunde auszudrücken. Es hat diese Reduction auf absolutes Maass, wie aus einem späteren Abschnitt hervorgehen wird, grossen Werth weil dadurch ein gemeinschaftliches Maass zwischen Grössen gegeben ist die sonst eine directe Vergleichung nicht zulassen.

Dieses sogenannte absolute Elektrometer ist im Principe folgendermassen construirt:

Die eine Platte *a* (Fig. 69) eines ebenen kreisförmigen Plattencondensators ruht auf einem isolirenden Fusse *b* und kann durch denselben parallel zu sich selbst gehoben und gesenkt werden. Ihr gegenüber befindet sich die zweite Platte *c* an drei dünnen Platindrähten als Waagschale an dem Waagbalken *d* aufgehängt; äquilibrirt ist dieselbe durch eine zweite Waagschale *e*. Die Platte *c* ist möglichst eng von einem fixen Schutzring *f* umschlossen, dessen Zweck darin besteht die Dichte der Ladung auf *c* möglichst gleichförmig zu machen.

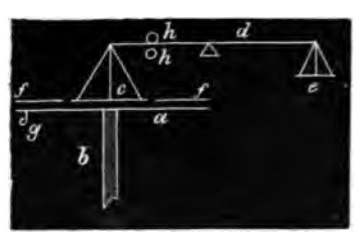


Fig. 69.

Wird die Platte *a* durch Anbringung eines Drahtes bei *g* mit dem zu messenden Körper in leitende Verbindung gesetzt, während *c* und *f* zur Erde abgeleitet sind, so wird *c* mit einer gewissen Kraft gegen *a* gezogen. Um diese Kraft *K* durch Gewichte zu messen, kann man so verfahren dass man zuerst bei unelektrischen Platten durch ein kleines Uebergewicht auf *e* eine Hebung von *c* erzeugt und dann *a* elektrisirt und so lange gegen *c* anschiebt bis *c* wieder in die ursprüngliche Gleichgewichtslage gezogen wird. Der elektrische Zug und die Schwere der Gewichte halten sich dann das Gleichgewicht. Bei grösseren Ladungen schlägt die Waage leicht um; man kann dagegen zwei Hemmungen *h h* verwenden gegen deren obere der Waagebalken in seiner Ruhelage anliegt und durch die Gewichte in *e* angedrückt wird. Man hebt dann *a* so lange bis ein Abreissen erfolgt.

Die Berechnung der Potentiale aus den Gewichten ergibt sich ohne Weiteres: ist die Distanz δ der beiden Condensatorplatten klein

gegen ihren Durchmesser so ist die Dichte μ auf jeder derselben, wenn deren Potentialdifferenz gleich V ist,

$$\mu = \frac{V}{4 \pi \delta}$$

und die Kraft mit welcher die Flächeneinheit von c gegen a getrieben wird ist $2 \pi \mu^2$. Bezeichnen wir mit S die Fläche der Platte c so hat man die Gesammtkraft K

$$K = 2 \pi \mu^2 S = 2 \pi S \frac{V^2}{16 \pi^2 \delta^2} = \frac{S V^2}{8 \pi \delta^2}$$

und erhält somit für das gesuchte Potential den Ausdruck

$$V = \delta \sqrt{\frac{8 \pi K}{S}} = \delta \cdot \sqrt{\frac{8 \pi m g}{S}}$$

wo m die Masse der Auflagegewichte und g die Beschleunigung der Erdschwere bedeutet.

In diesem Ausdruck sind alle Grössen der rechten Seite direct durch den Versuch gegeben, und zwar alle in absolutem Maass.

Bei dem grossen Einfluss den ein Fehler in der Messung der Plattendistanz auf das Resultat hat, kann man mit dieser nicht unter eine bestimmte Grösse gehen und daraus folgt im Verein mit der Kleinheit der elektrischen Kräfte, dass man auf diese Weise nur sehr hohe Potentiale, wie sie z. B. Elektrisirmaschinen erzeugen, messen kann.

Bei einem Radius der Platte c von 5 cm, einem Uebergewicht von 1 gm und einer Plattendistanz von 1 cm wäre z. B. eine Potentialdifferenz von circa 5000 Daniell zur Erhaltung des Gleichgewichtes erforderlich.

Der hauptsächlichste Werth des Apparates liegt aber wie schon erwähnt in der Möglichkeit mit seiner Hilfe Potentiale nach absolutem Maass zu messen.

§ 43. Potentialmessung.

Es hat keine Schwierigkeit mit Hilfe der im vorhergehenden Paragraphen erwähnten Apparate und Methoden das Potential eines Körpers zu messen der mit einer dauernden Elektricitätsquelle z. B. einer Batterie in Verbindung steht, denn da letztere einen eventuellen Elektricitätsverlust des Körpers immer wieder ersetzt so bleibt sein Potential ungeändert auch wenn er mit dem Elektrometer leitend verbunden wird. Der Ausschlag des letzteren gibt somit direct die gesuchte Grösse.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Körper mit einer bestimmten Ladung versehen und isolirt ist. In diesem Falle wird sein Potential durch die Verbindung mit dem Elektrometer geändert und dieses zeigt ein Ausgleichspotential [illegible] an, dessen Verhältniss zu dem ursprünglich zu messenden [illegible] vom Verhältniss der Capacitäten [illegible] und [illegible] des Elektrometers und des Körpers abhängt. War die Ladung des Körpers vor Verbindung mit dem Elektrometer M, so gelten die folgenden Gleichungen

[illegible] und [illegible]

wenn wir mit n das Verhältniss der beiden Capacitäten bezeichnen. Wie ersteres zu bestimmen ist, wurde schon in § [illegible] des Näheren ausgeführt.

Man kommt nicht selten in die Lage, Potentiale messen zu müssen, welche ausserhalb der Empfindlichkeitsgrenzen der zu Gebote stehenden Apparate liegen. Das Quadrant-Elektrometer gestattet gewöhnlich Grössen zwischen [illegible] Daniell zu messen, ein calibrirtes Goldblatt-Elektroskop solche von circa 50—3000 Daniell, das absolute Elektrometer reicht allerdings bis 30 000 Daniell und mehr, ist dann aber für Werthe unter 500 Daniell wegen zu grosser Versuchsfehler kaum zu gebrauchen. Namentlich die Lücke zwischen Quadrant-Elektrometer und Goldblatt-Elektroskop macht eine Methode wünschenswerth, Potentiale in bekanntem Maasse zu verkleinern oder zu vergrössern, wodurch sozusagen die Empfindlichkeitsgrenzen des Elektrometers in gleichem Maasse erweitert werden.

Die Methode zur Erreichung dieses Zweckes ergibt sich aus dem bekannten Zusammenhang zwischen Ladung, Potential und Capacität eines Körpers. Ist das zu messende Potential eines Körpers für unser Elektrometer zu gross oder zu klein, so müssen wir, während die Ladung desselben unverändert bleibt, seine Capacität in bekannter Weise vergrössern oder verkleinern, wodurch sein Potential sich ebenso viel verkleinert oder vergrössert. Wir werden also irgend eine der schon besprochenen Condensationsvorrichtungen anwenden, am einfachsten den ebenen Condensator, weil bei diesem sich die erreichte Aenderung des Potentials am genauesten berechnen lässt.

Es sei A (Fig. 70) eine isolirende Platte; auf derselben befindet sich die zur Erde abgeleitete kreisförmige Metallplatte a und ihr gegenüber die bewegliche Platte b. Letztere ist an dem einen Ende [illegible] um c drehbaren Hebels d angebracht und ruht für gewöhnlich

auf dem fixen Contactstück *e*; durch einen Druck auf *d* kommt dieselbe in die Lage *b' d'* und berührt die möglichst dünne Contactfeder *f*. In den beiden Lagen *b* und *b'* ist nun die Capacität der Platte eine sehr verschiedene und zwar stehen dieselben, *C* und *C'*, nach den in § 39 entwickelten Sätzen im Verhältniss

$$\frac{C}{C'} = \frac{\pi R}{8 \delta}$$

wo *R* den Radius und δ die Distanz der Platten in der Ruhelage bedeutet. Die Potentiale *V* und *V'* die *b* bei ein und derselben Ladung in beiden Fällen hat verhalten sich aber umgekehrt wie die Capacitäten und man hat somit

$$\frac{V}{V'} = \frac{8 \delta}{\pi R}$$

d. h. laden wir die Platte in der Lage *b* bis zum Potentiale *V* und bringen sie dann isolirt nach *b'* so wird sie dort ein $\frac{\pi R}{8 \delta}$mal so grosses Potential haben.

Wollen wir also z. B. das Potential einer Säule messen das für unser Elektrometer ein zu kleines ist so bringen wir den einen Pol derselben dauernd in Verbindung mit *e*, leiten den zweiten zur Erde und verbinden die Feder *f* mit dem Elektrometer. Setzen wir

$$\frac{\pi R}{8 \delta} = n$$

so wird das Potential der Platte beim ersten Niederdrücken des Hebels das *n*-fache des gesuchten Werthes sein, das Elektrometer wird aber in Folge seiner eigenen Capacität nicht diese ganze Grösse, sondern nur ein Ausgleichspotential angeben; es ist aber leicht einzusehen dass ein mehrmaliges Niederlassen und Wiederaufheben der Platte genügt um das Elektrometer bis auf einen zu vernachlässigenden Rest auf das *n*-fache des gesuchten Potentials zu bringen.

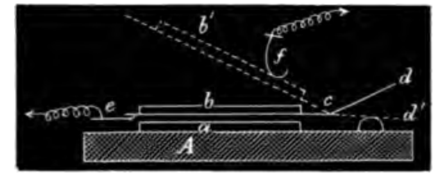


Fig. 70.

Macht man beispielsweise $R = 50$ mm, $\delta = 1$ mm so wird fast genau $n = 20$; man hat also hier ein Mittel die zu bestimmenden Grössen innerhalb ziemlich weiter Grenzen zu variiren. Construirt man den Apparat — etwa in der hier angegebenen Weise — mit Rücksicht darauf dass die Bedingungen unter welchen obiger Ausdruck für *n* abgeleitet wurde möglichst in der Ausführung eingehalten

werden, so zeigt sich auch zwischen dem berechneten und dem experimentell bestimmten Werthe von *n* kein wesentlicher Unterschied.

Handelt es sich darum das zu messende Potential zu verkleinern so wird man die Elektricitätsquelle mit der Feder *f*, dagegen das Elektrometer mit *e* in Verbindung setzen und übrigens ganz wie früher verfahren. Der gesuchte Werth wird dann in demselben Verhältniss verkleinert.

Wenn man auf eine Berechnung des Werthes von *n* verzichtet und sich auf eine empirische Ermittlung desselben beschränkt so kann man an Stelle eines ebenen auch einen Halb-Cylindercondensator verwenden was den Vortheil gewährt dass die auf- und abgehende Bewegung des beweglichen Theiles durch eine rotirende ersetzt werden kann wobei passend angebrachte Schleifcontacte jeweilig die nöthigen Verbindungen herstellen.

Noch viel weiter kann man die Empfindlichkeitsgrenze eines Elektrometers auf folgende Weise hinausschieben, die sich namentlich bei Messung von Elektrisirmaschinen mittelst des Quadrant-Elektrometers empfiehlt. Man verbindet den zu untersuchenden Pol der Maschine durch einen dünnen Draht mit einer kleinen Kugel *A* die man gut isolirt und so weit von allen übrigen Körpern aufstellt dass man ihre Ladung als gleichmässig vertheilt ansehen kann. Ihr gegenüber stellt man in einiger Entfernung eine zweite Kugel *B* die mit dem Elektrometer verbunden und gleichfalls möglichst weit von den Wänden des Zimmers entfernt wird. Das Elektrometer selbst, wenn es sich nicht weit genug von *A* und *B* befindet, muss durch abgeleitete Schirme vor Induction geschützt werden. Man verbindet zunächst die Kugel *B* und also auch das Elektrometer mit der Erde; das Potential von *B* ist Null und wird erzeugt durch die Ladung M_1 auf *A* und durch die inducirte Menge $-M_2$ auf *B*. Es besteht die Gleichung:

$$0 = \frac{M_1}{D} - \frac{M_2}{R_2} \; ; \; M_2 = M_1 \frac{R_2}{D}.$$

Wir bezeichnen mit *D* die Distanz und mit R_1 und R_2 die Radien von *A* und *B*; da letztere ohnedies klein, dagegen *D* gross genommen werden muss so können wir die Rückwirkung von *B* auf *A* vernachlässigen und haben weiter, wenn *V* das Potential der Maschine ist:

$$M_1 = V R_1 \text{ und } M_2 = \frac{V R_1 R_2}{D}.$$

Nun unterbricht man die Erdleitung von *B* und leitet gleichzeitig *A* ab, so vertheilt sich die Ladung M_2 über *B* und das Elek-

trometer, welches ein Ausgleichspotential φ anzeigen wird von der Grösse:

$$\varphi = \frac{M_2}{C + R_2}$$

wenn C die Capacität des Elektrometers und R_2 die von B ist. Setzt man $C = n \cdot R_2$ so hat man weiter

$$\varphi = \frac{M_2}{R_2(n+1)} = \frac{VR_1}{D(n+1)} \text{ und schliesslich } V = \varphi \frac{D}{R_1}(n+1).$$

Die Capacität eines Quadrant-Elektrometers ist in der Regel ziemlich bedeutend da die Lemniskate mit den Quadranten einen Condensator bildet; bei den gewöhnlichen Constructionen ist sie von der Grössenordnung einer Kugel deren Durchmesser circa $^1/_2$ m beträgt. Die Zahl n muss auf die bekannte Weise bestimmt werden. Trifft man die Anordnung des Versuches z. B. so, dass A und B je 1 cm Radius haben und setzt man $D = 100$ cm, $n = 50$ so ergibt sich aus obiger Formel $V = 5100 \cdot \varphi$ als Beispiel für die Erweiterung deren die Empfindlichkeit des Elektrometers durch Anwendung dieser Methode fähig ist.

Man wird die Kugelradien nicht zu klein nehmen dürfen, weil sonst die Capacität der Verbindungsdrähte, die in der Formel nicht berücksichtigt wurde, störend wirkt; man wird wenn nöthig, lieber die Empfindlichkeit des Elektrometers durch Anwendung der zuletzt angeführten Schaltungsmethode reduciren.

Das Princip der Induction lässt sich auch zur directen Potentialbestimmung für einen Punkt im Raume verwenden an welchem sich selbst keine elektrische Ladung befindet. Es seien z. B. beliebige Elektricitätsmengen an fixen Orten im Raum vorhanden und es solle das Potential V an einem Punkte P zwischen den elektrischen Massen bestimmt werden. Bringen wir zu diesem Zwecke einen mit dem Elektrometer verbundenen übrigens isolirten Körper A nach P so wird derselbe, und mit ihm das Elektrometer, ein Potential zwischen Null und V annehmen, und sich, wenn V positiv ist, negativ laden. Bezeichnen wir die Dichte dieser Ladung mit μ, so wird an der Oberfläche von A ein Potentialgefälle nach der Umgebung herrschen das der Grösse μ proportional ist. Können wir es durch irgend einen Mechanismus dahin bringen dass μ gleich Null wird, so herrscht auch zwischen A und seiner Umgebung keine Potentialdifferenz mehr d. h. A und das Elektrometer sind auf dem gesuchten Potentiale des Punktes P. Diesen Zweck kann man erreichen wenn man als Körper A einen

solchen wählt von dessen Oberfläche sich beständig kleine Partikelchen loslösen und die mit ihnen verbundene Ladung mitnehmen, wodurch binnen kurzer Zeit der erwünschte Zustand hergestellt wird. Es eignen sich hierzu am besten frei brennende Flammen oder Lunten, deren Verbrennungsgase und Rauch die Fortführung der inducirten Ladung besorgen. Auch kann man mit gutem Erfolge einen in Tropfen zerstäubenden Wasserstrahl, der aus einem isolirten Gefässe kommt verwenden, wobei das Potential jenes Punktes gemessen wird wo sich der Strahl in einzelne Tropfen auflöst.

Es sind dies die Methoden die schon im § 19 bei Besprechung der atmosphärischen Elektricität erwähnt wurden; die Anwendung der Flamme stammt zwar schon von Volta, die klare Darstellung ihrer Wirksamkeit aber, sowie die Anwendung der Wasserstrahlen verdanken wir W. Thomson, der diese Methoden zuerst wissenschaftlich begründete.

Bei der praktischen Verwerthung dieser Methoden muss man auf einen wichtigen Umstand Rücksicht nehmen der leicht zu Fehlern Veranlassung geben kann. Die Leitung welche das Elektrometer mit der Flamme oder dem Wassergefässe verbindet ist isolirt, und es hätte die grössere oder geringere Schnelligkeit mit welcher der Inductor (Flamme, Lunte, Wasser) wirkt demnach nur den Effect das Elektrometer schneller oder langsamer auf das Potential von P zu laden. Allein das setzt voraus dass die ganze Leitung vollkommen gut isolirt oder doch dass die Geschwindigkeit der Ableitung sehr klein ist gegen die Geschwindigkeit mit welcher der Inductor wirkt. Die letztere hängt aber von der Menge der Partikelchen ab die in der Zeiteinheit den Inductor verlassen, und diese ist je nach der Construction des letzteren verschieden. So geht z. B. bei einer Alkohol- oder Kerzenflamme der Process so schnell dass man bei einigermassen guter Isolation merkliche Elektricitätsverluste nicht zu befürchten hat; dagegen wirken Wasserstrahlen und namentlich Lunten viel langsamer, was man sehr bald aus der Zeit die das Elektrometer zu seiner vollen Ladung gebraucht, ersieht. Um daher sicher zu sein dass man wirklich den vollen Werth des Potentials gemessen hat muss man sich speciell vom genügenden Zustand der Isolation überzeugen.

Sollten die zu messenden Potentiale klein sein, etwa von der Grössenordnung einiger Daniell, so ist noch ein wichtiger Umstand zu berücksichtigen: in jeder Flamme gehen chemische Processe vor sich die, ähnlich wie im galvanischen Element, zu Elektricitätsentwicklung Veranlassung geben. Leitet man z. B. das Rohr eines

Bunsen'schen Brenners zur Erde und verbindet die Flamme durch einen Platindraht mit dem Elektrometer so erhält man Potentiale bis circa 1·5 Daniell, etwas wechselnd nach der Stelle des Drahtes in der Flamme. Aehnliches tritt bei Alkohol- oder anderen Flammen ein, so dass immer zu dem zu messenden Potentiale sich noch der Eigenwerth der Flamme addirt. Bei Messungen der atmosphärischen Elektricität wo es sich um Potentiale von mehreren hundert Daniell handelt, tritt dieser Einfluss nicht störend auf, bei Messung kleiner Potentiale muss man sich aber der Wasserstrahlen bedienen. Doch muss man auch in diesem Falle sich davon überzeugen dass nicht durch Reibung Elektricität entwickelt wird.

Die elektromotorische Wirkung der Flamme lässt sich dadurch sehr ersichtlich machen dass man von einer Reihe isolirter Bunsenscher Brenner je das Rohr des einen mit der Flammenspitze des nächsten durch einen Draht verbindet; man erhält so eine elektroskopisch kräftig wirkende galvanische Batterie, deren Widerstand aber sehr gross ist.

Auf die Potentialdifferenz an den Polen einer Elektrisirmaschine, eines Inductionsapparates oder einer galvanischen Säule von sehr vielen Elementen kann man auch aus der Distanz einen Schluss ziehen bis zu welcher die Funken überspringen; es besteht allerdings zwischen diesen Grössen keine einfache Relation, man kann nur sagen dass zwischen Elektroden von bestimmter Form, und in Luft von gewöhnlichem Druck einer jeden Schlagweite auch eine bestimmte Potentialdifferenz der Elektroden zukommt. Ist dieselbe ein- für allemal ermittelt so kann man unter Zuhilfenahme der betreffenden Tabelle die Schlagweiten direct als Maass der Potentiale benützen. Es sind derartige Messungen mehrfach ausgeführt worden; es folgen unten die Resultate welche Bichat und Blondlot [1]) auf sehr sorgfältige Weise mittelst eines absoluten Elektrometers erhalten haben. Dasselbe war nach den Principien des Thomson'schen construirt nur wurde an Stelle eines ebenen, ein Cylindercondensator verwendet. Auf grosse Genauigkeit können Messungen so hoher Potentiale wohl nie Anspruch machen, und hier ist noch besonders zu erwähnen dass dieselben in absolutem Maass (cm, gm, s) und zwar in elektrostatischen Einheiten erhalten wurden. Um die Zahlen mit den gewöhnlichen Maassen vergleichbar zu machen wurden sie auf Daniell umgerechnet wobei der Werth eines Daniell $D = 0{\cdot}0037$ absolute Einheiten ge-

[1]) Journ. de Phys. (1886).

setzt wurde; die Grösse ist aber, wie noch ausführlicher gezeig werden wird, mit einer beträchtlichen Unsicherheit behaftet so das die Zahlen nur als auf circa 10% genau angesehen werden könner

Die Schlagweiten wurden zwischen Kugeln von 1 cm Durch messer beobachtet und gelten die Zahlen demnach auch nur fü solche; das Metall aus welchem die Kugeln bestehen scheint nac älteren Untersuchungen keinen merklichen Einfluss auf die Schlag weite zu üben.

Distanz der Kugeln in cm	Potentialdifferenz in abs. Einheiten	Daniell
0·1	16·1	4350
0·2	27·5	7420
0·3	38·2	10310
0·4	47·7	12880
0·5	56·3	15200
0·6	64·9	17520
0·7	71·6	19330
0·8	77·0	20790
0·9	81·6	22030
1·0	84·7	22870
1·1	88·7	23950
1·2	91·3	24650
1·3	93·8	25330
1·4	95·8	25870
1·5	97·8	26410
1·6	99·2	26780
1·7	100·8	27220
1·8	101·8	27490
1·9	103·2	27860
2·0	104·5	28210
2·1	105·4	28460
2·2	106·4	28730

Diese Tabelle umfasst die Potentialdifferenzen wie sie an Elektrisi maschinen und Inductoren gewöhnlicher Construction auftreten.

XIV. Capitel.

Dielektrica.

§ 44. Die Dielektrica im Allgemeinen.

Alle Beziehungen die wir bisher zwischen elektrischen Ladungen und den von ihnen ausgeübten Kräften abgeleitet haben, basiren auf der Voraussetzung dass die Ladungen durch absolute Isolatoren von einander getrennt sind; wie schon in Capitel III im Allgemeinen erwähnt wurde ist aber diese Voraussetzung nicht ganz der Wirklichkeit entsprechend da wir Substanzen die in ihrer ganzen Ausdehnung absolut isolirend sind nicht kennen. Wie dort auch bereits auseinandergesetzt wurde besteht das Charakteristische eines absoluten Isolators oder Dielektricums darin, dass es von elektrischen Körpern gar nicht angezogen werden kann; dieser Bedingung genügt aber keine der uns bekannten Substanzen, auch die best isolirende, wie Schellack, Schwefel oder Paraffin, nicht. Alle diese Körper bewegen sich, wenn elektrischen Kräften ausgesetzt, im gleichen Sinn wie gute Leiter nur ist die Einwirkung welche sie erfahren an Intensität eine geringere als bei letzteren. Dass trotzdem zwischen zwei Punkten ungleichen Potentials, wenn dieselben durch eine dieser Substanzen getrennt sind kein Uebergang von Elektricität stattfindet beweist, dass zwischen ihnen und den Leitern noch ein anderer als nur quantitativer Unterschied bestehen muss und diesen hat, wie auch schon erwähnt wurde, Faraday sehr treffend charakterisirt. Faraday nimmt an dass die Dielektrica zum Theil aus wirklich isolirender Substanz bestehen zum Theil aber auch aus leitenden Partikeln, die in ersteren eingebettet und von einander ganz isolirt sind. Ein so constituirter Körper würde in der That alle Erscheinungen die wir an Dielektricis wahrnehmen, zeigen müssen: er könnte elektrischen Ladungen keinen Durchgang gestatten, da kein zusammenhängender leitender Weg vorhanden ist, müsste aber von elektrisirten Körpern angezogen werden in Folge der Induction die in einem jeden der leitenden Partikeln Platz greift; es ist leicht einzusehen dass diese Anziehung geringer sein muss als die welche ein Leiter von gleicher Form unter denselben Umständen erfahren würde.

Da bei einfach constituirten Körpern, namentlich bei isolirenden Flüssigkeiten von derartigen leitenden, der Muttersubstanz beigemengten Partikeln nicht wohl die Rede sein kann so wollen wir

Faraday's Ansicht gleich dahin erweitern dass wir die Moleküle selbst als diese Partikelchen ansehen und den leeren Zwischenraum als den idealen Isolator der sie trennt. Wie wir später sehen werden kommen wir mit dieser Darstellung nicht nur nicht in Widerspruch mit den Thatsachen, sondern es ergeben sich daraus auch sehr interessante Aufschlüsse über die Constitution der Körper. Von einem Leiter müssten wir, dem eben Gesagten entsprechend, voraussetzen dass durch seine ganze Ausdehnung hindurch zwischen einem mehr oder minder grossen Theil seiner Moleküle Berührung stattfindet, von einem Isolator dagegen dass seine Moleküle entweder sämmtlich von einander getrennt sind, oder doch dass zwischen den einzelnen Molekülgruppen kein Zusammenhang besteht.

Aus dem Vorstehenden erhellt dass wir bei Auflösung der Probleme über die Wechselwirkung elektrischer Massen nicht nur diese allein und ihre Distanzen in Rücksicht zu ziehen haben, sondern auch noch einen sehr wesentlichen dritten Factor, nämlich die Natur des Isolators welcher sie trennt; in jedem der leitenden Partikeln dieses letzteren tritt eine den herrschenden elektrischen Kräften entsprechende Induction auf, und die solcherweise in dem ganzen Isolator getrennten positiven und negativen Ladungen haben wir gleichfalls in Rechnung zu ziehen. Die Wirkungen welche ein derartiger der Induction unterworfener oder, wie man sich gewöhnlich auszudrücken pflegt „polarisirter“ Isolator auszuüben vermag sind keineswegs gering, und dürfen weder beim Experiment noch in der Rechnung ausser Acht gelassen werden; sie wären Null für einen durchaus idealen Isolator, nähern sich aber in Wirklichkeit umsomehr denjenigen eines Leiters als im Isolator die leitenden Partikeln überwiegen.

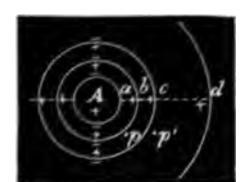


Fig. 71.

Um das Vorstehende nur ganz im Allgemeinen zu erläutern diene das folgende Beispiel.

Es sei A (Fig. 71) eine positiv geladene leitende Kugel die sich in irgend einem Dielektricum befindet; die leitenden Partikeln (Moleküle) des letzteren werden durch Induction von A aus alle so polarisirt dass ein jedes gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität getrennt enthält und dabei die negative Seite gegen A kehrt. Die Polarisation des ganzen Mediums wird daher radial gegen den Mittelpunkt von A gerichtet sein und zerlegt man dasselbe in Kugelschalen, deren Dicke von der Grössenordnung eines Moleküldurchmessers ist, so werden diese alle an der inneren Seite negativ, an

der äusseren positiv geladen sein. Sind a, b, c ... die betreffenden Begrenzungsflächen so ist a negativ geladen, b, c .... dagegen enthalten gleiche positive und negative Belegungen deren Wirkungen sich annulliren und die äusserste Begrenzungsfläche d, des kugelförmig gedachten Dielektricums, enthält wieder nur eine und zwar positive Ladung, vorausgesetzt dass der weitere Raum ideal isolirend ist.

Die Gesammtladung des Dielektricums ist natürlich gleich Null, nicht so aber die Wirkung derselben auf eine eventuelle Probeladung die irgendwo in das Innere des Isolators gebracht wird. In dem Punkte p z. B. und ebenso in jedem anderen verschwindet die Wirkung aller ausserhalb liegenden Kugelflächen, die der innerhalb liegenden reducirt sich auf die Wirkung der negativen Ladung von a und diese vermindert offenbar die ursprüngliche von A ausgehende Kraft. Bezeichnen wir die Distanz zwischen p und dem Centrum von A mit r so ist die ursprüngliche Kraft f_0 in p, bei Abwesenheit des Dielektricums,

$$f_0 = \frac{A}{r^2}$$

wenn A die Ladung der Kugel bedeutet; tritt zu letzterer noch die Ladung $-a$ im Dielektricum hinzu so hat man jetzt die Kraft f:

$$f = \frac{A - a}{r^2}$$

oder

$$f = f_0 \frac{A - a}{A} = f_0 \left(1 - \frac{a}{A}\right).$$

Was das Verhältniss $\frac{a}{A}$ anlangt, so ist leicht einzusehen dass dasselbe nur bedingt ist durch die Art und Weise wie der Raum zwischen zwei aufeinanderfolgenden Kugelflächen a, b, c ... von leitender Substanz ausgefüllt ist: ein je grösserer Bruchtheil der Fläche a z. B. von solcher belegt ist desto grösser wird auch die Ladung a sein. Ihr Werth wird offenbar zwischen den Grenzen 0 und A schwanken und ersteren Werth erreichen bei Abwesenheit aller leitenden Substanz, letzteren aber, dem Faraday'schen Theorem entsprechend, dann, wenn die ganze Kugelschale ein Leiter ist. Die Kraft f wird in diesen beiden Fällen die Werthe f_1 und f_2 annehmen:

$$f_1 = f_0 \quad \text{für } a = 0$$
$$f_2 = 0 \quad \text{für } a = A$$

Der letztere Werth stimmt mit dem Umstande überein dass im Innern eines Leiters die Kraft gleich Null sein muss.

Da der Werth $\frac{a}{A}$ nur von der Natur des Isolators abhängt so können wir auch schreiben

$$\left(1 - \frac{a}{A}\right) = \frac{1}{K} \text{ und } f = \frac{1}{K} f_0$$

wo K eine gleichfalls nur von der Constitution des Dielektricums abhängige Constante bedeutet.

Da für einen idealen Isolator $a = 0$. für einen Leiter $a = A$ ist so hat man

$K = 1$ für einen idealen Isolator
$K = \infty$ für einen Leiter.

Wirkt somit bei gegebener Ladung A im vollkommen leeren Raume an irgend einem Punkte $p, p' \ldots$ die Kraft f_0 so wird diese durch Anwesenheit eines Dielektricums im Raume überall um das K-fache vermindert. Der Werth dieser Constanten K, der sogenannten Dielektricitätsconstanten, liegt für alle Körper zwischen 1 und ∞ und wird für jede Substanz in erster Linie durch das Volumen der leitenden Partikeln in der Volumeinheit bestimmt. Dass auch die Form dieser Partikeln auf den Werth von K von Einfluss sein muss ist leicht einzusehen und wird später noch ausführlicher erörtert werden.

Wir wollen die eben besprochenen Verhältnisse nun genauer untersuchen. Es ist das Verdienst des italienischen Physikers Mosotti, die Anschauungen welche Poisson für magnetische oder magnetisirbare Medien ausgebildet hat direct auf elektrisirte Medien übertragen zu haben [1]; es besteht zwischen beiden in der That ein durchgreifender Parallelismus, der es gestattet die für das eine Gebiet geltenden Formeln fast unverändert auf das andere zu übertragen. Auch stimmt die hier adoptirte Ansicht über die Constitution der Dielektrica ganz mit der von Poisson für magnetische Medien seiner Theorie zu Grunde gelegten überein.

Wir denken uns also ein dielektrisches Medium als aus sehr kleinen leitenden Partikeln (Molekülen) bestehend, die durch den ideal isolirenden Raum von einander getrennt sind. Es wirke auf dieses Medium eine elektrostatische Kraft, herrührend von irgend welchen elektrischen Massen: wir schneiden aus demselben einen kleinen

[1] Atti della Soc. It. XXIV.

Cylinder der von einer Kraftröhre als Mantelfläche und von zwei benachbarten Niveauflächen begrenzt ist. Die Basisfläche sei ω, die Höhe λ, das Volumen somit $v = \omega \cdot \lambda$. Durch die elektrische Kraft f welche am Orte des Cylinders im Medium wirkt wird in allen dessen leitenden Partikeln Induction auftreten und in Folge dessen an der einen Basisfläche die Elektricitätsmenge $+\eta$ an der anderen $-\eta$ sich ansammeln. An allen den Niveauflächen parallelen Flächen im Innern verschwinden natürlich die dort inducirten Ladungen.

Wir bezeichnen nun das Product $\eta \cdot \lambda$ als das Moment des Cylinders (entsprechend der Definition des magnetischen Momentes in Poisson's Theorie) und den Ausdruck $\frac{\eta \cdot \lambda}{v} = m$ als das Moment per Volumeinheit an dem betrachteten Orte des Dielektricums. Da $v = \omega \cdot \lambda$ ist so hat man auch

$$m = \frac{\eta \lambda}{v} = \frac{\eta \cdot \lambda}{\omega \cdot \lambda} = \frac{\eta}{\omega} = \mu$$

wo μ die Flächendichte der inducirten Elektricität an der Cylinderbasis bedeutet.

Dieses Moment m können wir der an dem betreffenden Punkte im Dielektricum wirkenden Kraft f porportional setzen; denn in jedem leitenden Partikel muss die Kraft Null werden, die von den an beiden Enden desselben inducirten Elektricitätsmengen ausgeübte somit $= -f$ und da letztere, wie bei einem Condensator, bis auf Grössen höherer Ordnung den inducirten Mengen proportional ist, so muss auch die Gesammtladung η des Flächenstückes ω der Kraft f proportional sein. Wir haben somit

$$m = \varepsilon \cdot f \text{ oder } \varepsilon = \frac{m}{f}$$

wo f die im Dielektricum selbst wirksame Kraft und ε wieder eine von der Natur des Mediums abhängige Constante ist, die sogenannte Constante der dielektrischen Polarisation oder die Elektrisirungszahl. Diese Constante bedeutet also das Verhältniss der inducirenden Kraft zu dem per Volumeinheit geweckten elektrischen Moment an irgend einem Punkte des Dielektricums. Der Werth dieser Constante hängt nur von der Art und Weise ab, wie in einem Volumelement des Isolators die leitenden Partikeln angeordnet sind; er steigt und sinkt mit der Zahl und Ausdehnung derselben, oder mit dem Werthe der Raumerfüllung d. h. mit jener Zahl, welche angibt der wievielte Theil einer Volumeinheit des Körpers wirklich von

leitender Substanz ausgefüllt ist. Für einen isotropen Körper behält ε, und damit auch der Quotient $\frac{m}{f}$ in allen Punkten denselben Werth; das gilt aber nicht mehr für anisotrope Körper und zwar aus folgendem Grunde: die Elektricitätsmengen $\pm\eta$ hängen nämlich nicht nur von der Raumerfüllung sondern auch von der Form der leitenden Partikeln ab, sind diese z. B. länglich so wird $\pm\eta$ falls die Längsrichtung mit der Kraftrichtung zusammenfällt grösser sein als für jede andere Lage, damit ändert sich aber auch der Werth von ε. Für ein anisotropes Medium wird dieser also je nach der Richtung verschieden sein, wie dies später mitzutheilende Messungen auch wirklich ergeben haben.

Wir wollen nun untersuchen in welchem Zusammenhange die Elektrisirungszahl ε mit der früher schon erwähnten Dielektricitätsconstante K steht, und kehren deshalb zu unserem früheren Beispiele von einer geladenen Kugel (Fig. 71) im Innern eines Isolators zurück. Wir haben gesehen dass in Folge der in letzterem eintretenden Polarisation die Kraft an irgend einem Punkte des Feldes von dem Werthe f_0 (bei Abwesenheit aller Substanz, also im absolut leeren Raume) auf den Werth f gesunken ist wobei die Relationen bestehen:

$$f = \frac{1}{K} \cdot f_0 \text{ und } \frac{1}{K} = 1 - \frac{a}{A}.$$

A bedeutet hierbei die Ladung der Kugel und a die durch Polarisation in der anliegenden Schichte des Isolators frei gewordene Elektricitätsmenge. Die Grösse a können wir nun leicht mit Hilfe von ε und f ausdrücken denn es ist wenn ρ den Radius der Kugel bedeutet

$$a = 4\pi\rho^2 \cdot m = 4\pi\rho^2 \cdot \varepsilon \cdot f$$

indem, wie wir früher fanden, die Flächendichte auf a mit dem dort herrschenden Moment m pro Volumeinheit gleichbedeutend ist.

Wenn wir ferner für f seinen Werth einsetzen, unter Berücksichtigung dessen dass

$$f = \frac{f_0}{K} \text{ und } f_0 = \frac{A}{\rho^2}$$

so ergibt sich weiter

$$a = 4\pi\varepsilon \cdot \frac{A}{K}.$$

Es folgt somit

$$\frac{1}{K} = 1 - \frac{a}{A} = 1 - 4\pi\varepsilon\frac{1}{K} \text{ oder } K = 1 + 4\pi\varepsilon.$$

Diese einfache Relation verknüpft somit die Elektrisirungszahl ε mit der Dielektricitätsconstante K.

Hierzu ist noch das Folgende zu bemerken: es wurde früher gesagt dass die Werthe von K für die verschiedenen Substanzen zwischen 1 und ∞ liegen; das hat jedoch eine ganz bestimmte Bedeutung. Wir wissen nämlich über die absoluten Werthe von K gar nichts, sondern kennen, nach später zu beschreibenden Methoden, nur die relativen Werthe derselben, bezogen von einem Körper auf den anderen. Haben z. B. zwei Isolatoren 1 und 2 die uns weiter gar nicht bekannten Elektrisirungszahlen ε_1 und ε_2 so sind wir im Stande experimentell das Verhältniss

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon_1}{1 + 4\pi\varepsilon_2}$$

zu ermitteln und nennen dasselbe die Dielektricitätsconstante des Körpers 1 bezogen auf den Körper 2. Es ist dies ein ganz ähnlicher Vorgang wie wenn wir den Brechungsexponenten n_1 eines Körpers auf denjenigen n_2 eines anderen als Einheit beziehen; auch in diesem Falle können wir das Verhältniss $\frac{n_1}{n_2}$ experimentell bestimmen ohne von der Grösse der Lichtgeschwindigkeit — von der doch die Werthe n_1 und n_2 abhängen — Kenntniss zu haben. So wie wir nun im Allgemeinen die Brechungsexponenten der Körper auf denjenigen n_0 des leeren Raumes (d. h. nur mit Aether erfüllten Raumes) als Einheit beziehen, indem wir einfach $n_0 = 1$ setzen, ebenso verfahren wir auch in Bezug auf die Dielektricitätsconstanten. Wir müssen auch dem nur mit Aether erfüllten Raume eine Elektrisirungszahl ε_0 zuschreiben, und dementsprechend eine Dielektricitätsconstante $K_0 = 1 + 4\pi\varepsilon_0$; das was wir gewöhnlich mit K bezeichnen ist demnach eigentlich der Quotient

$$\frac{K}{K_0} = \frac{1 + 4\pi\varepsilon}{1 + 4\pi\varepsilon_0}$$

und von diesem Verhältnisse gilt strenge genommen das was früher kurzweg von K gesagt wurde, dass nämlich sein Werth für alle bekannten Substanzen — gasförmig, flüssig oder fest — experimentell zwischen 1 und ∞, also wesentlich positiv gefunden wurde.

Ueber die absoluten Werthe von K und ε lässt sich aber vorläufig nichts weiter aussagen als dass sie reine Zahlen sind, denn es war

$$\varepsilon = \frac{m}{f}; \quad m = \frac{\eta \cdot \lambda}{v} \quad \text{somit} \quad \varepsilon = \frac{\eta \cdot \lambda}{v \cdot f}.$$

[illegible] dargestellt nur [illegible] Einheit [illegible] bezeichnen, so ist [illegible]

[illegible]

[illegible] Zahl, deren Zähler [illegible] multiplicirt mit einem Volumen [illegible] werden sind diese Zahlen [illegible] gegen [illegible] sehr gro-

[illegible] Voraussetzung, dass [illegible] angeordnete elektrische Masse [illegible] Einflusses [illegible] unterscheiden. Wir nennen [illegible] das [illegible] Körper [illegible] das [illegible] Elektrisirungszahl [illegible] An irgend einem Punkte [illegible] herrscht die Kraft [illegible] der gegebenen elektrischen Masse; [illegible] inducirte Ladungen [illegible] parallelen cylindrischen [illegible] Höhe [illegible] geweckte elektrische Momente [illegible] diesen Richtungen entsprechenden [illegible] bestehen dann die Relationen:



[illegible]

[illegible] gross an einem Punkte [illegible] (Fig. [illegible]) [illegible] Elektricität [illegible] dadurch wird [illegible] Raumelementen durch die [illegible] geführt werden. Da wir die Kraft in ihre [illegible] werden wir auch dementsprechend ihre [illegible] erhalten, die wir mit c_x, c_y, c_z be-[illegible]

[illegible] auf den durch [illegible] gemessenen Quer-[illegible] unendlich [illegible] Raumelement die Ladung

$\omega \cdot m_x$ ausgeschieden, denn das Moment m_x ist ja nichts anderes als die Ladung der Flächeneinheit auf ω, aus dem rechtsseitig anstossenden dagegen die Ladung $- m_x' \omega$, wenn m_x' das Moment des rechtsseitigen Raumelementes bezeichnet.

Die Gesammtladung in P wird somit durch Induction

$$\begin{aligned} &\text{parallel } X \dots \rho_x = \omega (m_x - m_x') \\ &\quad\text{„} \quad Y \dots \rho_y = \omega (m_y - m_y') \\ &\quad\text{„} \quad Z \dots \rho_z = \omega (m_z - m_z'). \end{aligned}$$

Ersetzen wir nun die Momente durch die Kräfte, und berücksichtigen dass diese beim Uebergang von einem Raumelement zum anderen sich von f nach $f + df$ ändern so erhalten wir weiter

$$\rho_x = \omega (m_x - m_x') = \omega [\varepsilon f_x - \varepsilon (f_x + d f_x)] = - \omega \varepsilon d f_x =$$
$$= - \omega \varepsilon \frac{df}{dx} dx.$$

Die letzte Bezeichnung können wir einführen, weil für das unendlich kleine Raumelement die Annahme einer linearen Variation der Kraft gestattet ist. Da ferner

$$m_x = \varepsilon f_x \text{ und } \frac{dm}{dx} = \varepsilon \frac{df}{dx}$$

ist, so können wir auch schreiben:

$$\rho_x = - \omega \frac{dm}{dx} dx.$$

Das Product $\omega \cdot dx$ ist nichts anderes als das Volumen dv des kleinen Cylinders; somit ist $\rho_x = - \dfrac{dm}{dx} dv.$

In gleicher Weise werden die parallel den beiden anderen Coordinatenrichtungen im Punkte P zugeführten Elektricitätsmengen sein:

$$\rho_y = - \frac{dm}{dy} \cdot dv \text{ und } \rho_z = - \frac{dm}{dz} \cdot dv$$

und die Gesammtsumme wird

$$- \left(\frac{dm}{dx} + \frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dz} \right) dv.$$

Bezeichnen wir die in der Volumeinheit um den Punkt P angehäufte Ladung mit ρ so wird schliesslich

$$\rho = - \left(\frac{dm}{dx} + \frac{dm}{dy} + \frac{dm}{dz} \right)$$

oder

$$\rho = -\varepsilon\left(\frac{df}{dx} + \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\right)$$

oder

$$\rho = \varepsilon\left(\frac{d^2 V}{dx^2} + \frac{d^2 V}{dy^2} + \frac{d^2 V}{dz^2}\right) = \varepsilon \Delta V.$$

Hier bedeutet V die Potentialfunction die im Punkte P durch die inducirenden und durch die inducirten Ladungen erzeugt wird.

Für ΔV liefert die Poisson'sche Gleichung auch noch einen anderen Ausdruck, nämlich $\Delta V = -4\pi\rho$, es ergibt sich somit die Relation

$$\rho = -\varepsilon \cdot 4\pi\rho.$$

Diese Gleichung kann nur erfüllt werden durch die Werthe $\rho = 0$ oder $\varepsilon = -\frac{1}{4\pi}$; dieser letztere Werth ist aber, wie Maxwell gezeigt hat, nicht möglich denn es treten oft die Ausdrücke $4\pi\varepsilon$ und $1 + 4\pi\varepsilon$ als identisch auf, woraus folgt dass ε gegen 1 sehr gross sein muss.

Es bleibt demnach nur die zweite Möglichkeit, dass $\rho = 0$ ist, übrig; d. h. im Innern eines durch äussere Kräfte polarisirten Dielektricums herrscht an allen Punkten die Raumdichte Null, wirkliche Ladungen können somit nur an den Grenzen desselben auftreten. Dabei ist natürlich vorausgesetzt dass das Medium nicht schon von vorneherein elektrische Ladungen besessen hat d. h. dass es ursprünglich unelektrisch war; auch haben wir die Annahme gemacht dass dasselbe isotrop sei, für anisotrope Medien gilt der vorstehende Satz nicht mehr.

Wir wollen nun den früher für das Vorhandensein einer einzigen elektrischen Masse im Dielektricum gefundenen Satz, dass die von derselben in irgend einem Punkte ausgeübte Kraft f zu der im absolut leeren Raume wirksamen f_0 in der Relation $f = \frac{1}{K} f_0$ steht, auf beliebig vertheilte Massen anwenden, und die Grenzen seiner Giltigkeit untersuchen.

Wir setzen ein unbegrenztes, isotropes dielektrisches Medium voraus, und denken uns in demselben verschiedene elektrische Ladungen m, m', m'' .... auf kleinen leitenden Kugeln (oder in Punkten) fixirt. Wäre mit Ausnahme dieser Kugeln der Raum absolut leer so würde von den Ladungen m, m' ... in irgend einem Punkte das Potential Φ erzeugt werden. Durch die Anwesenheit des Dielektricums, respective

durch die in ihm inducirten Ladungen wird aber in demselben Punkte das Potential φ hervorgerufen werden, so dass jetzt dort das Potential $V = \Phi + \varphi$ herrscht. Die Kraftcomponenten werden

$$f_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d(\Phi + \varphi)}{dx}$$

$$f_y = -\frac{dV}{dy} = -\frac{d(\Phi + \varphi)}{dy}$$

$$f_z = -\frac{dV}{dz} = -\frac{d(\Phi + \varphi)}{dz}.$$

Die Raumdichte der Elektricität an irgend einem Punkte im Innern des Dielektricums können wir nun auf zweierlei Weise ausdrücken, erstens durch die früher abgeleitete Beziehung

$$\rho = \varepsilon \cdot \Delta V$$

und zweitens durch Anwendung der Poisson'schen Gleichung; dieselbe liefert

$$\rho = -\frac{\Delta V}{4\pi} = -\frac{\Delta(\Phi + \varphi)}{4\pi}.$$

Da wir aber einen Punkt im Innern des Dielektricums betrachten so liegt derselbe jedenfalls ausserhalb der wirksamen Massen m, m' .... und es verschwindet somit für denselben der Werth von $\Delta\Phi$. Wir können demnach schreiben

$$\rho = -\frac{\Delta\varphi}{4\pi} \text{ oder } \varepsilon\Delta V = -\frac{\Delta\varphi}{4\pi}.$$

Wenn wir die elektrische Dichte, wie sie bei Abwesenheit des Dielektricums an irgend einem Punkte herrschen würde mit ρ' bezeichnen (wobei auch die von den Massen m, m' ... occupirten Orte inbegriffen sind) so liefert die Poisson'sche Gleichung:

$$\rho' = -\frac{\Delta\Phi}{4\pi}.$$

Durch die Addition der beiden letzten Ausdrücke ergibt sich

$$\varepsilon\Delta V + \rho' = -\frac{\Delta\varphi}{4\pi} - \frac{\Delta\Phi}{4\pi} = -\frac{\Delta V}{4\pi}$$

oder weiter

$$4\pi\varepsilon\Delta V + \Delta V + 4\pi\rho' = 0; \ \Delta V + \frac{4\pi\rho'}{1 + 4\pi\varepsilon} = 0.$$

Setzen wir wie früher $1 + 4\pi\varepsilon = K$ (Dielektricitätsconstante) so hat man schliesslich

$$\Delta V + \frac{4\pi\rho'}{K} = 0.$$

Diese Gleichung lehrt Folgendes: Befinden sich die fixen Ladungen m, m' .... im absolut leeren Raume so herrscht an einem bestimmten Orte das Potential Φ und die Raumdichte ρ', wird aber der leere Raum von einem Dielektricum mit der Constante K erfüllt so gelten dafür die Grössen V und $\frac{\rho'}{K}$ d. h. die Potentialfunction wird so geändert dass sie im leeren Raume einer $\frac{1}{K}$mal kleineren Dichte der elektrischen Massen entsprechen würde. Wenn wir demnach, wie es gewöhnlich geschieht, aus den herrschenden Kräften auf die Massen schliessen so werden uns diese in einem Dielektricum K-mal kleiner erscheinen als sie wirklich sind. Die scheinbare Raumdichte $\frac{\rho'}{K}$ (wenn ρ' die wirkliche ist) wird im Innern des Dielektricums auch gleich Null sein, weil dort die wirkliche gleich Null ist, an den Orten aber wo ρ' von Null verschieden ist d. h. wo sich die wirksamen Massen m, m' ... befinden, dort wird die Dichte im Verhältniss von $\frac{1}{K}$: 1 verkleinert erscheinen. Es folgt daraus unmittelbar der schon früher ausgesprochene Satz:

$$f = \frac{f_0}{K}$$

wo f die Kraft bedeutet die von bestimmten Massen in einem Dielektricum (K), f_0 jene die von denselben Massen im leeren Raume ausgeübt wird.

Da wir für gewöhnlich alle elektrischen Kraftwirkungen in einem Dielektricum studiren (z. B. Luft) so müssen wir das fundamentale Kraftgesetz in einer von der bisherigen etwas abweichenden Form schreiben, nämlich:

$$F = \frac{m \cdot m'}{K \cdot r^2}.$$

Hier bedeutet F die Kraft welche die Massen m, m' in der Distanz r innerhalb eines Dielektricums mit der Constante K auf einander ausüben; für den leeren Raum haben wir $K = 1$ gesetzt.

Die Richtigkeit dieser Relation wurde auch von Silow [1]) experimentell bestätigt; es zeigte sich dass die Kraft zwischen der Lemniskate und den Quadranten eines Elektrometers, unter übrigens gleichen Umständen eine verschiedene war je nachdem das Instrument

[1]) Pogg. Ann. Bd. 156.

sich in Luft oder in einer isolirenden Flüssigkeit (von wesentlich grösserer Dielektricitätsconstante als Luft) befand. Die beobachtete Aenderung der Kraft entsprach vollkommen der berechneten.

Es folgt aus dem Vorstehenden dass die Einheit der Elektricitätsmenge wenn man sie als diejenige Quantität definirt die auf eine ihr gleiche in der Distanz Eins die Kraft Eins ausübt, experimentell ganz falsch bestimmt würde, wollte man nicht auf die Dielektricitätsconstante des Mediums in welcher die Bestimmung vorgenommen wird, Rücksicht nehmen.

Strenge genommen ist die Definition in obiger Gestalt lückenhaft, sie bezieht sich jedoch stillschweigend auf den leeren Raum für welchen eben die Constante gleich 1 gesetzt wird.

Wenn wir zwischen zwei gleichen Massen m, m in der Distanz r die Kraft F beobachten, so haben wir bisher immer

$$F = \frac{m\,m}{r^2}, \text{ oder } m^2 = F \cdot r^2$$

gesetzt; das ist aber falsch und soll heissen:

$$F = \frac{m \cdot m}{K \cdot r^2} \text{ und } m^2 = K \cdot F \cdot r^2.$$

Setzen wir $\sqrt{F \cdot r^2} = a$ so würden wir, ohne Rücksicht auf das vorhandene Dielektricum, $m = a$ finden während thatsächlich $m = a\sqrt{K}$ ist d. h. wir würden die Masse m im Verhältniss von $\frac{1}{\sqrt{K}} : 1$ falsch bestimmen.

Da fast alle elektrostatischen Messungen in Luft vorgenommen werden und die Dielektricitätsconstante der Luft sich, wie wir später sehen werden, nur äusserst wenig von 1 unterscheidet, so ist der Fehler den man eventuell begeht nicht gross und kann für die allermeisten Fälle ausser Acht gelassen werden; in flüssigen oder festen Isolatoren würde derselbe aber sehr bedeutende Werthe annehmen.

Die Wirkung eines Dielektricums das fixe elektrische Ladungen umgibt ist also die, letztere K-mal kleiner erscheinen zu lassen als sie wirklich sind; da im Innern des Isolators keinerlei freie Ladungen auftreten so reducirt sich die ganze Wirkung der dielektrischen Polarisation darauf, dass an den Grenzflächen von Isolator und geladenen Conductoren scheinbare Elektricitätsmengen auftreten die die Ladungen der letzteren auf das $\frac{1}{K}$-fache verringern. Es muss aber be-

sonders betont werden dass diese entgegengesetzten Ladungen des Isolators an seinen Grenzflächen nur scheinbare, nicht wirkliche sind; es soll damit nur gesagt werden dass die durch die dielektrische Polarisation des Isolators thatsächlich geweckten Kräfte genau so wirken als wäre gar keine Polarisation vorhanden dafür aber an den Grenzflächen eine wirkliche Ladung von solcher Grösse, dass durch sie die auf den Conductoren vorhandenen auf das $\frac{1}{K}$fache reducirt würden.

Die im Vorstehenden entwickelten Beziehungen gelten keineswegs allgemein; das Problem der Dielektrica basirt wesentlich auf dem Problem der Induction, und da, wie wir wissen, letzteres einer allgemeinen Lösung nicht fähig ist so gilt dies auch von ersterem. Die Aufgabe, anzugeben wie gross bei einer gegebenen Vertheilung geladener Conductoren und ursprünglich ungeladener Dielektrica an jedem Punkte des Feldes die Kraft ist, lässt sich daher nur unter ganz speciellen Voraussetzungen lösen so z. B. für geometrisch einfach geformte Dielektrica wenn sie sich in einem homogenen elektrischen Feld befinden. Man kann aber selbst für letzteres nicht mehr die Kraftgrösse im Innern eines beliebig geformten Isolators angeben. Wir wollen jetzt untersuchen für welche Fälle die im Obigen gefundene Beziehung zwischen der Kraft im Dielektricum und der Kraft im leeren Raume ihre Giltigkeit behält.

Zunächst ist daran zu erinnern dass wir unserer Ableitung die Annahme eines homogenen unbegrenzten Dielektricums zu Grunde gelegt haben; wäre dieselbe nicht erfüllt, wäre der Raum von verschiedenen Dielektricis mit den Constanten K_1 K_2... occupirt, so würden auch an den Trennungsflächen dieser scheinbare Ladungen auftreten, und die Aufgabe aufhören allgemein lösbar zu sein.

Beschränken wir uns aber auf ein homogenes unbegrenztes Dielektricum so können wir den ursprünglich ins Auge gefassten Fall noch beträchtlich erweitern.

Zunächst ist klar dass wir beliebig viele punktförmig angeordnete elektrische Massen voraussetzen können denn wir haben über ihre Zahl keinerlei Annahmen gemacht; dasselbe gilt von ihrer Lage. Wir können also etwa eine beliebig mit Elektricität belegte Linie oder deren mehrere als vorhanden annehmen und immer wird es richtig bleiben dass an jedem Punkte des Feldes die Kraft nur das $\frac{1}{K}$fache von der im leeren Raume ist. Desgleichen können wir zu

einer Fläche übergehen, wie immer dieselbe gestaltet sei ob geschlossen oder nicht, immer wird unsere Relation ihre Giltigkeit behalten, vorausgesetzt dass die Fläche, wenn sie geschlossen ist dasselbe Dielektricum umschliesst das sich aussen befindet, denn sonst würden wir gegen unsere Annahme der Homogenität verstossen. Denken wir uns nun die elektrischen Massen über eine geschlossene Fläche so vertheilt wie es dem Gleichgewichtszustande entsprechen würde falls diese Fläche die Oberfläche eines Conductors wäre, so ist klar dass in ihrem Innern keinerlei Kraft, weder von der eigenen Ladung noch von Seiten der sonst etwa vorhandenen, ausgeübt wird. In diesem Falle kann also das im Innern befindliche Dielektricum auch keine Polarisation erleiden und somit auch nach aussen keinerlei Wirkung ausüben d. h. es verhält sich vollkommen indifferent und wir können es durch einen beliebigen anderen Körper, auch Leiter, ersetzt denken. Das führt uns unmittelbar zu der äusserst wichtigen Bemerkung dass unser Gesetz auch noch für den Fall gilt dass die wirksamen Massen sich auf beliebigen Conductoren angeordnet finden; die Wichtigkeit dieses Satzes mit Rücksicht auf die für alle Experimente nothwendigen Bedingungen ist wohl unmittelbar klar. Auch braucht nicht besonders betont zu werden dass für Conductoren auf denen die Elektricität sich nicht in der den herrschenden Kräften entsprechenden Gleichgewichtslage befindet, der Satz seine Giltigkeit verliert.

Wir können demnach sagen: wenn in einem allseitig (oder für die Praxis doch beträchtlich) ausgedehnten Isolator von der Dielektricitätsconstante K sich Ladungen auf beliebig vertheilten Conductoren im Gleichgewichte befinden so ist die Kraft an jedem Punkte des Feldes das $\frac{1}{K}$fache von derjenigen die unter gleichen Umständen im leeren Raume dort herrschen würde.

Ersetzen wir demnach ohne an der Vertheilung der Ladungen etwas zu ändern ein Dielektricum (K_1) durch ein anderes (K_2) so übergeht an jedem Punkte des Feldes die Kraft f_1 in f_2 und es ist

$$f_2 = f_1 \cdot \frac{K_1}{K_2}.$$

§ 45. Folgerungen aus dem Verhalten der Dielektrica.

Ladungen die sich im Innern eines Dielektricums von der Constante K befinden, erscheinen, wie wir gesehen haben gegen den leeren Raum sämmtlich um das K-fache verkleinert, desgleichen alle Potentialdifferenzen im Felde und damit auch die Potentiale selbst. Durch

die Grösse der Ladungen und der zugehörigen Potentiale ist aber die Capacität der Körper charakterisirt, denn wir haben diese als

$$C = \frac{M}{V}$$

definirt, wenn alle übrigen Leiter unendlich weit entfernt sind. Befindet sich nun die Ladung M auf einem Conductor aber innerhalb eines Dielektricums (K) so ist das durch M erzeugte Potential nicht mehr V sondern $\frac{1}{K} \cdot V$ und die Capacität C' wird

$$C' = K \cdot \frac{M}{V} = K \cdot C.$$

Die Capacitäten C_1 und C_2 ein und desselben Körpers wenn derselbe einmal von einem Medium K_1 das andere Mal von einem Medium K_2 umgeben ist, sind daher $C_1 = K_1 C$ und $C_2 = K_2 C$; ihr Verhältniss ist also bestimmt durch den Quotienten:

$$\frac{C_2}{C_1} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Unsere ursprüngliche Definition bezieht sich somit strenge genommen nur auf den leeren Raum ($K = 1$) und wir sehen dass die Capacität eines Körpers oder eines Systems von Conductoren auch geändert werden kann ohne dass ihre Gestalt oder wechselseitige Lage im geringsten alterirt wird, und zwar dadurch, dass wir das Dielektricum welches sie trennt durch ein anderes ersetzen. Wählen wir dazu etwa eine leitende Substanz ($K = \infty$, die wir uns durch unendlich dünne Schichten von den Conductoren isolirt denken können) so werden alle Capacitäten unendlich gross; die Conductoren repräsentiren dann mit dem umgebenden Leiter zusammen Condensatoren von unendlicher Capacität. — Dadurch dass wir den leeren Raum zwischen den Conductoren mit einem Dielektricum (K) anfüllen, werden somit alle Potentiale V, V' . . . auf die Werthe $\frac{V}{K}$, $\frac{V'}{K}$ . . . herabgedrückt wenn die Ladungen M, M' . . . constant bleiben. Halten wir dagegen die Potentiale constant so müssen die Ladungen auf die Werthe $K \cdot M$, $K \cdot M'$ . . . ansteigen. In letzterem Falle behält die Kraft überall denselben Werth wie im leeren Raume.

Man sieht schon hier dass die Energie $\Sigma \frac{1}{2} M V$ welche die mit constanten Ladungen versehenen Conductoren repräsentiren, bei einer Auswechslung des Dielektricums wesentlich verändert werden

müss; wir werden noch sehen dass als Compensation dafür eine neue Energie im Dielektricum selbst auftritt die dort durch die Polarisation bedingt wird.

Alle Gleichungen die wir in den früheren Capiteln in Bezug auf den Zusammenhang zwischen Kraft und elektrischer Masse abgeleitet haben, werden eine Veränderung erfahren müssen sobald wir zwischen den Massen ein dielektrisches Medium als vorhanden ansehen; sie gelten in der früheren Gestalt nur für ein Zwischenmedium von der Constante 1 d. h. für den leeren Raum. Wenn wir aus der Kraft auf die Grössen der Massen schliessen so finden wir diese nach den bisherigen Formeln nur $\frac{1}{K}$mal so gross als sie wirklich sind; um diesen Fehler auszuschliessen müssen wir daher die thatsächlich vorhandene Kraft f durch den Ausdruck $K \cdot f$ ersetzen. Diesen letzteren bezeichnen wir als die Intensität der Induction und können im Uebrigen genau so von einer Inductionsströmung sprechen wie früher von der Kraftströmung. Führen wir also die erstere an Stelle der letzteren in unsere früheren Formeln ein, so werden wir zwischen der Kraft und der wirksamen Masse die thatsächlich bestehende Relation erhalten.

Zunächst wird der Satz von Gauss eine andere Gestalt annehmen; denken wir uns um eine elektrische Masse m eine beliebige geschlossene Fläche S geschlagen und bezeichnen wir die darauf senkrechte Kraftcomponente mit f so sagt dieser Satz:

$$4\pi m = \int f\,dS.$$

Befindet sich aber m in einem Dielektricum (K) so müssen wir die Kraft f durch die Induction $K \cdot f$ ersetzen und erhalten dann

$$4\pi m = \int K \cdot f\,dS = K \int f\,dS$$

da K als constant für das ganze Medium gilt. Wäre die Fläche S z. B. eine Kugel vom Radius r so wäre an allen Punkten derselben die normale Kraftcomponente gleich $\frac{1}{K} \cdot \frac{m}{r^2}$ und erst die vorstehende Gleichung würde uns aus dieser Kraft den wahren Werth von m ergeben.

Es lässt sich nun leicht übersehen welche weitere Veränderungen an unseren Gleichungen vorzunehmen sind. Gehen wir zu einer mit Elektricität belegten Fläche über, die sich im Innern eines Dielektricums (K) befindet und bezeichnen wir die beiderseits von der

Fläche weg normal wirkenden Kräfte mit f_1 und f_2 die Flächendichte mit μ so wird die charakteristische Gleichung nicht mehr lauten können: $4\pi\mu = f_1 + f_2$. Denn ziehen wir uns jetzt parallel zur Fläche beiderseits eine unendlich nahe Niveaufläche und senkrecht darauf eine Kraftröhre, und wenden auf das so begrenzte Volumen den Satz von Gauss an, so müssen wir statt der Kräfte f_1 und f_2 die Inductionen Kf_1 und Kf_2 einführen. Wir erhalten:

$$4\pi\mu = K(f_1 + f_2).$$

Ist die Grenzfläche keine Niveaufläche so zerlegen wir uns die Kraftströmung in eine zur Fläche parallele und eine normale Componente; erstere steht offenbar mit der Flächendichte in keinerlei Zusammenhang und für die letztere können wir die vorstehende Gleichung anwenden.

Grenzen beiderseits an die Fläche verschiedene Dielektrica mit den Constanten K_1 und K_2 so haben wir, um aus dem Gauss'schen Satze die wahre Grösse von μ zu erhalten, statt der Kräfte die Inductionen $K_1 f_1$ und $K_2 f_2$ einzuführen, welche Werthe giltig sind solange die Punkte mit den Kräften f_1 und f_2 beiderseits unendlich nahe an der Fläche liegen, so dass die Fläche selbst als sehr ausgedehnt gegen ihre Distanz betrachtet werden kann. Für alle endlichen, wenn auch kleinen, Grenzflächen zweier Dielektrica lautet somit die charakteristische Gleichung: $4\pi\mu = K_1 f_1 + K_2 f_2$ oder, wenn wir die Kräfte durch die Potentialgefälle ersetzen und mit n die Richtung der Flächennormale bezeichnen:

$$K_1 \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + K_2 \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 + 4\pi\mu = 0.$$

Hier bedeutet μ die reelle Flächendichte auf der Trennungsfläche der beiden Dielektrica.

Wir können die vorstehende Gleichung auch dazu benützen um einen Ausdruck für die scheinbar an der Grenzfläche eines Dielektricums auftretende Ladung mit der scheinbaren Flächendichte σ abzuleiten. Diese fingirte Ladung ersetzt, wie wir wissen, die thatsächlich vorhandene dielektrische Polarisation in ihrer Wirkung vollkommen, wenn wir erstere wie eine reelle Ladung, letztere dagegen als nicht vorhanden ansehen. Ist also die früher betrachtete Fläche die Trennungsfläche zweier Dielektrica (K_1 und K_2) die unter dem Einflusse äusserer Kräfte polarisirt werden, so ist die reelle Dichte $= 0$ und wir erhalten

$$K_1 f_1 + K_2 f_2 = 0.$$

Für die scheinbare Dichte σ haben wir dagegen den bekannten Ausdruck:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(f_1 + f_2),$$

denn hier müssen wir einfach die wirklichen Kräfte f_1 und f_2 einführen ohne Rücksicht auf die Grössen K_1 und K_2 weil wir das Medium als nicht polarisirt betrachten müssen. Die erste der beiden Gleichungen liefert uns

$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{K_2}{K_1}$$

(oder gleich $\frac{K_2}{K_1}$ falls wir die Kräfte beiderseits der Fläche in derselben Richtung zählen).

Die Grössen f_1 und f_2 sind hier die auf die Grenzfläche normalen Kraftcomponenten und diese stehen im Verhältniss der beiderseitigen Dielektricitätsconstanten; die zur Fläche parallelen Kraftcomponenten werden offenbar keine Veränderung beim Uebergang aus einem Mittel in ein anderes erleiden, da die Polarisationen so wirken wie eine Ladung der Grenzfläche, eine solche aber parallel zu sich selbst keine Kraft ausüben kann. Wir können demnach sagen: Trifft die Kraft beliebig auf die Trennungsfläche zweier Dielektrica, so erleidet sie ihrer Grösse nach eine solche Veränderung dass ihre beiderseitigen normalen Componenten im Verhältniss der beiden Dielektricitätsconstanten stehen, während die zur Fläche parallelen Componenten ungeändert bleiben. Damit ist auch, wie wir später sehen werden, die Richtungsänderung der Kraft bestimmt.

Wenn wir die Wirkung der Polarisation durch diejenige einer Ladung der Grenzschichte ersetzen, so können wir auch die Schwächung der Kraft beim Uebergang aus einem Medium in ein anderes als durch die Absorption hervorgebracht betrachten, welche die Kraftströmung durch die scheinbare Ladung der Grenzfläche erleidet. Es geht daraus hervor dass wir in einem Felde welches verschiedene Dielektrica enthält die Dichte der Kraftlinien an verschiedenen Orten nicht mehr als ein Maass der dort herrschenden Kraft ansehen können; das gilt nur innerhalb ein- und desselben Dielektricums. Wollten wir die Kraftlinien aber den Kräften entsprechend zeichnen dann müsste eine Kraftröhre die die Trennungsfläche zweier Dielektrica (K_1 K_2) senkrecht passirt, beiderseits eine verschiedene Anzahl von Kraftlinien enthalten, so zwar dass diese in Wirklichkeit im Verhältniss von $K_2 : K_1$ stünden.

Die Differenz käme eben auf die Absorption an der Grenzfläche und stellt die Veränderung der Kraft dar.

Wir kehren nun zur Berechnung von σ, der Dichte der scheinbaren Ladung der Grenzfläche zurück.

Wir hatten:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(f_1 + f_2) \text{ und } \frac{f_1}{f_2} = -\frac{K_2}{K_1}.$$

Man erhält weiter:

$$f_2 = -f_1 \frac{K_1}{K_2} \text{ und } \sigma = \frac{1}{4\pi} f_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right) =$$

$$= \frac{f_1}{4\pi}\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2}\right) = \frac{f_2}{4\pi}\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1}\right).$$

Diese Gleichung liefert uns die scheinbare Dichte als Function der Normalcomponenten der wirklichen Kräfte. Wird $K_1 = K_2$, befindet sich also beiderseits der Fläche dasselbe Dielektricum so wird $\sigma = 0$ wie es auch sein muss da im Innern eines homogenen Dielektricums keine scheinbare Ladung auftritt; wird $K_1 = \infty$ d. h. grenzt das Dielektricum K_2 an einen Leiter so wird $f_1 = 0$ und $\sigma = \frac{f_2}{4\pi}$.

Diese letzte Relation führt uns zu einer wichtigen Bemerkung. Grenzt ein Conductor an ein polarisirtes Dielektricum so wirkt normal auf die Conductoroberfläche eine Kraft f als die Resultirende aller Kräfte die von den einzelnen in den Molekülen desselben inducirten Elektricitätsmengen ausgeübt werden; diese Kraft f können wir uns auch anstatt durch die Polarisation des Mediums, dadurch entstanden denken dass die Grenzfläche desselben mit einer Ladung von der Dichte $\sigma = \frac{f}{4\pi}$ belegt, das Medium dagegen unpolarisirbar ($K = 1$) ist. Nun lehrt aber die Coulomb'sche Gleichung dass für den letzteren Fall einer wirklichen Ladung der Conductoroberfläche von der Dichte μ eine normale Kraft f entspricht die der Bedingung genügt

$$\mu = \frac{f}{4\pi}.$$

Die Grössen σ und μ sind somit identisch, und es steht uns vollkommen frei die Ursache der Kraft f entweder in einer wirklichen Ladung des Conductors, oder in einer Polarisation des umgebenden

Dielektricums zu suchen. Nach dieser letzteren Ansicht, die zuerst von Maxwell ausgesprochen wurde, bestände eine wirkliche Ladung von Conductoren niemals, und das was wir das Laden oder Entladen derselben nennen wäre nur der Uebergang des umgebenden Mediums aus dem unpolarisirten Zustande in den polarisirten, oder eine plötzliche Rückkehr derselben aus letzterem zu ersterem. Eine directe Entscheidung zwischen beiden Ansichten ist nicht möglich weil Conductoren immer von Dielektricis (auch der leere Raum ist ein solches) umgeben sind; solange wir übrigens zum Zustandekommen einer dielektrischen Polarisation wieder auf äussere inducirende Massen zurückgreifen müssen — und vorläufig kennen wir keine andere Ursache derselben — solange bietet die neuere Anschauung keinen wesentlichen Vortheil vor der älteren; sie zeigt aber wie sehr differente physikalische Vorgänge äusserlich von dem gleichen Effect begleitet sein können, und wie wenig eine Hypothese deshalb, weil sie die zugehörigen Erscheinungen erklärt, auch als der wahre Ausdruck der Natur angesehen werden muss.

Die Coulomb'sche Gleichung, welche die Relation zwischen der wirklichen Ladung und der Normalcomponente der Kraft an einer Conductoroberfläche ausdrückt, und die wir bisher in der Form $\mu = \frac{f}{4\pi}$ geschrieben haben, wird, wenn wir den Einfluss des angrenzenden Dielektricums respective der Polarisation desselben mit in Rechnung ziehen, auch eine kleine Umformung erleiden müssen.

Wir greifen zu diesem Zwecke auf die früher für eine mit der Dichte μ wirklich geladenen Fläche abgeleitete Gleichung zurück die gelautet hat:

$$K_1 \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + K_2 \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 + 4\pi\mu = 0 \text{ oder } K_1 f_1 + K_2 f_2 = 4\pi\mu.$$

Hier bedeuten f_1 und f_2 die von der Fläche beiderseits weg gezählten Normalkräfte und K_1 und K_2 die Dielektricitätsconstanten der beiden angrenzenden Medien. Ist das erste Medium ein Leiter so wird $f_1 = 0$ und

$$\mu = \frac{K_2 f_2}{4\pi}.$$

An Stelle des früheren Ausdruckes der Coulomb'schen Gleichung, der nur für den leeren Raum ($K = 1$) gegolten hat, haben wir demnach den allgemein giltigen zu setzen

$$\mu = \frac{K}{4\pi} \cdot f$$

wo μ die **wirkliche** Flächendichte der Ladung an der Grenze eines Conductors und eines Dielektricums K) bezeichnet, wenn die thatsächliche Normalkraft an dem betreffenden Punkte gleich f ist.

Schliesslich wird auch noch die Poisson'sche Gleichung durch Berücksichtigung der Dielektrica eine Veränderung erfahren: wir haben dieselbe bisher in der Form geschrieben:

$$\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

Befinden sich aber die Ladungen in einem homogenen isotropen Dielektricum von der Constanten K so sinken alle Potentiale auf das $\frac{1}{K}$fache herab; um daher von ihnen einen Schluss auf die **wahre** Grösse der Ladungen zu ziehen, müssen wir sie alle mit K multipliciren und schreiben:

$$\frac{d}{dx}\cdot\frac{dK\cdot V}{dx}+\frac{d}{dy}\cdot\frac{dK\cdot V}{dy}+\frac{d}{dz}\cdot\frac{dK\cdot V}{dz}+4\pi\rho=0.$$

Da K nach allen Richtungen des Mediums als constant vorausgesetzt wurde haben wir weiter:

$$K\frac{d^2 V}{dx^2}+K\frac{d^2 V}{dy^2}+K\frac{d^2 V}{dz^2}+4\pi\rho=0$$

oder schliesslich die allgemeine, für isotrope Medien giltige Gleichung:

$$K\cdot\Delta V+4\pi\rho=0$$

die für den leeren Raum ($K=1$) wieder in die ursprüngliche Form übergeht.

Wir wollen nun die in den letzten Paragraphen erhaltenen Resultate noch übersichtlich in den folgenden sieben Punkten zusammenstellen:

1. Das Kraftgesetz für die Wechselwirkung zweier elektrischer Massen übergeht in die allgemeine Form:

$$F=\frac{m\cdot m'}{K\cdot r^2}.$$

2. Wenn ein Conductor unter übrigens gleichen Umständen sich in verschiedenen Dielektricis (K_1 K_2) befindet so variirt seine Capacität (C_1 C_2) nach dem Gesetze:

$$\frac{C_2}{C_1}=\frac{K_2}{K_1}.$$

3. Der Ausdruck für den Satz von **Gauss** wird:

$$4\pi m = K\int f\,dS.$$

4. Die charakteristische Gleichung einer mit Elektricität von der **wirklichen** Dichte μ geladenen Fläche, wenn dieselbe beiderseits an Dielektrica ($K_1\, K_2$) grenzt, wird:

$$K_1\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + K_2\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 + 4\pi\mu = 0 \text{ oder } K_1 f_1 + K_2 f_2 = 4\pi\mu.$$

5. Die **scheinbare** Dichte an der Grenzfläche zweier Dielektrica ist:

$$\sigma = \frac{f_1}{4\pi}\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2}\right) = \frac{f_2}{4\pi}\left(\frac{K_1 - K_2}{K_1}\right).$$

6. Die **Coulomb'sche** Gleichung lautet:

$$\mu = \frac{Kf}{4\pi}.$$

7. Die **Poisson'sche** Gleichung lautet:

$$K\Delta V + 4\pi\rho = 0.$$

§ 46. Experimentelle Bestimmung der Dielektricitätsconstanten.

Bevor wir uns weiter mit der Constitution der Dielektrica beschäftigen, wollen wir die hauptsächlichsten bisher gewonnenen experimentellen Daten über ihre Constanten K mittheilen. Es ist nicht schwer aus dem Vorhergehenden eine Methode zur Bestimmung derselben abzuleiten wenn man bedenkt, dass es sich nicht um den absoluten Werth sondern immer nur um das Verhältniss der Grössen K bei verschiedenen Substanzen handeln kann.

Ist uns ein ebener Condensator gegeben dessen Platten die Fläche S, die Distanz δ und die Potentiale V_1 und V_2 haben, so ist die Dichte μ auf einer der Platten der Grösse nach gleich:

$$\mu = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\delta}.$$

Die ganze Ladung der Platte wird

$$M = \mu \cdot \delta = \frac{K \cdot S}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\delta}.$$

Es ist unmittelbar klar, dass wenn wir den Zwischenraum zwischen den Platten einmal mit einem Medium K_1 und dann mit einem anderen K_2 ausfüllen ohne an den übrigen Grössen etwas zu ändern, dass dann die Ladungen M_1 und M_2 der Bedingung genügen müssen:

$$\frac{M_2}{M_1} = \frac{K_2}{K_1}.$$

Wir sind nun im Stande diese Elektricitätsmengen M_1 und M_1 mit einander zu vergleichen z. B. dadurch, dass wir sie nach einander durch ein Galvanometer entladen: wir haben also ein sehr einfaches Mittel an der Hand das Verhältniss $K_2 : K_1$ zu bestimmen und in der That sind fast alle der folgenden Zahlen nach dieser oder doch principiell ähnlichen Methoden gewonnen.

Grössere Schwierigkeiten stellen sich dagegen einer exacten Bestimmung dieser Zahlen durch andere, schwer zu vermeidende Umstände entgegen. So sind z. B. Isolatoren nur in den seltensten Fällen in chemisch reinem Zustande erhältlich; bei vielen der in der Praxis häufig vorkommenden ist von einer bestimmten chemischen Constitution überhaupt kaum die Rede, wie etwa bei Guttapercha, Schellack, Ebonit. Dann aber zeigen wenigstens alle festen und flüssigen Isolatoren bei längerer Einwirkung der elektrischen Kräfte doch eine Spur von Leitungsvermögen, in Folge dessen die Dielektricitätsconstante bei längerer Dauer des Versuches zu gross gefunden wird.

Es ist daher nicht zu wundern wenn die Zahlen, die von verschiedenen Beobachtern gegeben werden, bei weitem nicht jene Uebereinstimmung zeigen wie sie die Methode zuliesse; nichtsdestoweniger liefern sie ein deutliches Bild des Verhaltens der verschiedenen Isolatoren.

Da die Dielektricitätsconstanten auch, und zwar nicht unerheblich, von der Temperatur abhängen so sind im Folgenden auch die Temperaturangaben, so weit solche vorliegen, berücksichtigt.

Schon Faraday hat die Beobachtung gemacht dass ein Kugelcondensator je nach der Natur des Zwischenmediums bei ein- und derselben Potentialdifferenz ganz verschiedene Ladungen aufnimmt; er fand dieselben viel grösser wenn der Zwischenraum mit Schellack oder Schwefel, als wenn er mit Luft erfüllt war. Er nannte die entsprechenden Verhältnisszahlen, die wir mit K bezeichnen, das specifische Inductionsvermögen der Körper und hat sich auch bemüht für verschiedene Gase, oder für verschiedene Dichten eines solchen, Unterschiede zu constatiren, jedoch mit negativem Erfolg, was bei der Kleinheit derselben (siehe die folgenden Tabellen) und der Unvollkommenheit der damaligen Messinstrumente nicht überraschen kann.

Es folgen nun einige Zahlen, und zwar die verlässlichsten der gegenwärtig vorliegenden Bestimmungen.

Die Dielektricitätsconstanten der festen und flüssigen Körper sind dabei auf diejenige der Luft bei gewöhnlicher Temperatur und

normalem Druck als Einheit bezogen; für diejenige der Gase ist die Dielektricitätsconstante des besten Vacuums als Einheit genommen.

1. Feste Körper.

Dielektricum	K
Paraffin	1·99—2·32
Kautschuk, schwarz	2·22
Ebonit	2·28—3·15
Guttapercha	2·46
Kautschuk, vulcanisirt	2·50
Colophonium	2·55
Schellack	2·74
Flintglas, leicht	3·01
Crownglas	3·11
Flintglas, schwer	3·16
Schwefel	3·84—4·77

Man sieht dass die Werthe der Dielektricitätsconstanten innerhalb ziemlich enger Grenzen liegen; es kommen zwar, z. B. für Glas, einzelne Bestimmungen vor bis zu Werthen 9 und 10, bedenkt man aber wie schwierig es ist diese Substanz von einer oberflächlichen Feuchtigkeitsschichte frei zu halten so wird man diesen Bestimmungen kein grosses Vertrauen schenken können. Die geringste Feuchtigkeitsschichte wird eine oberflächliche Leitung der Elektricität gestatten und damit auch die Dielektricitätsconstante viel zu gross erscheinen lassen.

Selbstverständlich ist auch der Fehler der aus einer eventuellen inneren Leitung der Substanz entspringt und in gleichem Sinne wirkt, nicht ausgeschlossen; die oben angeführten Körper gehören aber jedenfalls unter den festen zu den besten Isolatoren.

2. Flüssigkeiten.

Dielektricum	K
Schwefelkohlenstoff	1·81
Petroleumgeist	1·92
Petroleum	2·05—2·10
Terpentinöl	2·10—2·18
Terpentin	2·23
Spermacetiöl	3·02
Klauenöl	3·07
Olivenöl	3·16
Ricinusöl	4·78

Von besonderem Interesse mit Rücksicht auf die Constitu der Körper sind natürlich Messungen von isomeren oder homol Reihen; leider liegen deren bisher nur sehr wenige vor, von d die folgenden angeführt werden mögen [1]). Die Dichte bezieht auf 15° C.

Isomere Verbindungen nach $C_{10} H_{16}$.

Dielektricum	Temperatur	*K*	Dichte
Terpentinöl (links drehend) .	20·0 C.	2·271	0·876
Terpentinöl (rechts drehend)	20·5 „	2·264	0·866
Citronenöl	21·0 „	2·247	0·853

Homologe Verbindungen, aromatische Kohlenwasserstoffe [2]). Dichten beziehen sich auf die Beobachtungstemperatur.

Dielektricum	Temperatur	*K*	Dichte
Benzol	14·0	2·292	0·885
Toluol	14·0	2·301	0·871
Xylol	27·0	2·268	0·855
Metaxylol . . .	12·0	2·378	0·870
Pseudocumol . .	14·0	2·431	0·857
Cumol	19·0	2·471	0·851

Schliesslich folgen noch in letzter Zeit ausgeführte Messu die sich auf eine Reihe von Oelen beziehen [3]).

Dielektricum	*K*
Colzaöl	2·85
Olivenöl	2·99
Mandelöl	3·01
Sesamöl	3·02
Erdnussöl	3·03
Baumwollsamenöl (frisch)	3·10
„ (ranzig)	3·23
Leinöl	3·35
Ricinusöl	4·62

Es geht aus den vorstehenden Zahlen hervor, dass die Di tricitätsconstanten der Flüssigkeiten sich im Allgemeinen inne derselben Grenzen halten wie die der festen Körper.

---

[1]) Tomaszewski, Wied. Ann. XXXIII. (1888).
[2]) Negreano, J. d. Ph. (2) VI. (1887).
[3]) Salvioni, Rend. Accad. d. Linc. IV. (1888).

3. Gase und Dämpfe.

Die folgenden Zahlen gelten für einen Druck von 760 mm und 0° Temperatur.

Dielektricum	K nach Boltzmann[1])	K nach Klemenčič[2])
Bestes Vacuum	1·000000	1·000000
Wasserstoff	1·000264	1·000264
Luft	1·000590	1·000586
Kohlenoxyd	1·000690	1·000694
Grubengas	1·000944	1·000952
Kohlensäure	1·000946	1·000984
Stickoxydul	1·000994	1·001158
Aethylen	1·001312	1·001458
Schwefelkohlenstoff . .	—	1·00290
Aethyläther	—	1·00744
Schweflige Säure . . .	—	1·00954
Bromäthyl	—	1·01546
Chloräthyl	—	1·01552

Zu bemerken ist noch dass für ein und dasselbe Gas die Dielektricitätsconstante dem Drucke proportional variirt.

Es wurde schon erwähnt dass die Grösse K nur in isotropen Medien für alle Richtungen denselben Werth haben kann; auch dies hat sich experimentell bestätigt, indem sich in krystallinischen Medien eine deutliche Abhängigkeit von der Richtung zeigte. So fand z. B. Boltzmann[3]) an einer aus einem natürlichen Schwefelkrystalle geschliffenen Kugel in der Richtung der grössten (1), mittleren (2) und kleinsten (3) Axe die folgenden Dielektricitätsconstanten:

$$K_1 = 4{\cdot}773$$
$$K_2 = 3{\cdot}970$$
$$K_3 = 3{\cdot}811$$

Fasst man die gegenwärtig vorliegenden Zahlen zusammen so findet man ziemlich enge Grenzen innerhalb welcher die Dielektricitätsconstanten liegen: für Gase 1·00026—1·015, für Flüssigkeiten 1·81—4·78, für feste Körper 1·99—4·77. Auffallend ist der plötzliche Sprung der Dielektricitätsconstanten von den letzten Werthen zu ∞ d. h. der Uebergang von Isolatoren zu Leitern; auf die physikalische Bedeutung dieses letzteren werden wir später noch zurückkommen.

---

[1]) Pogg. Ann. CLV.
[2]) Wiener Akad. XCI.
[3]) Wiener Akad. LXX. (1874).

§ 47. Dielektrische Verschiebung.

Wird ein Dielektricum durch äussere Kräfte aus dem neutralen Zustande in denjenigen der Polarisation versetzt so geht, wie wir gesehen haben, in seiner ganzen Masse eine Verschiebung von Elektricität vor sich, die sich aber von derjenigen in einem Leiter dadurch unterscheidet, dass sich die verschobenen Elektricitätsmengen nicht von ihren zugehörigen leitenden Partikeln (Molekülen) entfernen können; bringen wir z. B. an irgend einen Punkt eines Dielektricums die Masse $+ m$ so wird von dieser aus in radialer Richtung eine Verschiebung positiver Elektricität durch das ganze Medium hindurch stattfinden so zwar, dass durch jede um m geschlagene Kugelfläche dieselbe, der Grösse m proportionale, Quantität fliesst deren Grösse, wie wir aus § 44 wissen, von der Dielektricitätsconstante des Mediums abhängt. Diese Strömung wird so lange andauern bis die Polarisation vollkommen hergestellt ist d. h. bis die durch die Polarisation geweckten Kräfte an jedem Punkte den äusseren das Gleichgewicht halten.

Bei dieser dielektrischen Strömung wird durch die Flächeneinheit, die wir uns senkrecht zu den Kraftlinien gelegt denken (parallel zu denselben findet gar keine Strömung statt) die Elektricitätsmenge ε passiren, und diese können wir als ein Maass der Strömungsintensität auffassen. Im Innern eines homogenen Dielektricums werden wir die Grösse ε nicht wahrzunehmen Gelegenheit haben, da ebensoviel Elektricität als einem Raumelement von der einen Seite zugeführt ihm nach der entgegengesetzten wieder entzogen wird; an der Grenze zweier Dielektrica bleibt zwar beiderseits, wie wir gleich sehen werden, der wahre Werth von ε auch derselbe, aber die gleiche Verschiebung bedingt in beiden Medien eine verschieden starke Polarisation als deren Ausdruck wir die scheinbare Ladung der Trennungsfläche kennen gelernt haben. Consequenter Weise werden wir dann die Ladungen die wir an der Grenze von Leitern und Isolatoren wahrnehmen auch als nur scheinbare auffassen können, indem wir den Leiter als ein Dielektricum von der Constante ∞ betrachten, und so gelangen wir wieder zu der schon früher erwähnten Maxwell'schen Vorstellung, derzufolge nicht den Conductoren, sondern den Dielektricis bei den elektrischen Erscheinungen die Hauptrolle zufällt. Nicht erstere sondern letztere sind geladen, aber diese Ladung wird nicht im Innern, sondern erst an der Grenze mit einem nicht geladenen Körper (Leiter) sichtbar.

Nach dieser Vorstellung hätten wir also die Flächendichte der Ladung eines Conductors als nichts anderes als die frühere Grösse ε zu betrachten und können schreiben

$$\varepsilon = \frac{K \cdot f}{4\pi} = \frac{J}{4\pi}$$

wenn wir wie früher die Inductionsströmung per Flächeneinheit durch J bezeichnen. Es ist also die elektrische Verschiebung gleich der Inductionsströmung dividirt durch 4π; ihre Richtung fällt mit der letzteren zusammen.

Betrachten wir nun die Trennungsfläche S zweier Dielektrica K_1 und K_2 die mit einer Niveaufläche zusammenfallen soll, so tritt durch das Flächenstück dS eine Inductionsströmung J_1 ein, und eine solche J_2 aus. Wir haben unmittelbar

$$J_1 = \int K_1 f_1 \, dS \text{ und } J_2 = \int K_2 f_2 \, dS.$$

Nach einer bekannten Relation ist aber $K_1 f_1 = K_2 f_2$ und somit wird auch

$$J_1 = J_2.$$

Es ist somit der früher angenommene Satz richtig dass die Intensität der Inductionsströmung, und damit auch die der dielektrischen Verschiebung, längs einer Kraftröhre constant bleibt selbst wenn diese verschiedene Dielektrica passirt; und da wir einen Leiter auch als Dielektricum ($K = \infty$) ansehen können, so gilt dies ganz allgemein.

Es folgt somit dass sich bei der Polarisation die Elektricität längs einer Inductionsröhre wie eine incompressible Flüssigkeit bewegt indem an keiner Stelle eine Verdichtung oder Verdünnung eintritt; da eine jede Elektricitätsbewegung als in einem (durch Dielektrica) geschlossenen Kreise vor sich gehend angesehen werden kann so stimmt dies mit dem bekannten Erfahrungssatze überein dass immer gleiche Mengen positiver und negativer Elektricität erzeugt werden. Bei der Ladung eines Condensators würde sich nach dieser Ansicht ebensoviel Elektricität in der äusseren Schliessung von der ersten zur zweiten Platte bewegen als gleichzeitig im Dielektricum von der zweiten zur ersten.

Aus der Constanz der Inductionsströmung folgt dass, wie uns schon bekannt ist, an der Grenze zweier Dielektrica keine wirkliche Ladung auftritt; die Wirkung der Polarisation nach aussen

können wir aber durch die schon öfter besprochene scheinbare Ladung der Grenzfläche ersetzen. Die Wirkung dieser hat Faraday durch folgendes sinnreiche Experiment illustrirt. Leitet man ein der Polarisation unterworfenes Dielektricum dadurch zur Erde ab dass man es mit einer abgeleiteten Flamme an seiner Oberfläche bestreicht, so nimmt dasselbe von der Erde eine solche wirkliche Oberflächenladung auf dass dadurch sein Potential und seine Wirkung nach aussen Null wird. Entfernt man darauf die Flamme sowie jene Kräfte welche die ursprüngliche Polarisation erzeugten so bleibt auf dem Isolator nur mehr die aufgenommene reelle Ladung die nun durch ihre Wirkung nach aussen sichtbar wird. Diese muss offenbar an Grösse gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt jener scheinbaren Ladung sein.

Isolirt ein Dielektricum nicht vollständig und bleibt es durch längere Zeit den inducirenden Kräften unterworfen so verschwindet allmälig die Polarisation, indem die Ladungen der einzelnen Moleküle sich mehr und mehr an die Oberfläche begeben; es tritt somit allmälig an Stelle der Polarisation und der scheinbaren Ladung ein unpolarisirtes Medium mit einer wirklichen Ladung an der Oberfläche. Beide Zustände können natürlich auch neben einander bestehen und bilden so eine der schon früher erwähnten Schwierigkeiten bei der experimentellen Bestimmung der Dielektricitätsconstanten.

In einem absoluten Leiter haben wir schliesslich gar keine Polarisation, und nur eine reelle Ladung an der Oberfläche, oder nach Maxwell's Ansicht in der Grenzschichte des anstossenden Dielektricums.

§ 48. Brechung der Kraftströmung.

Trifft eine Kraftröhre senkrecht auf die Trennungsfläche zweier Dielektrica so geht sie ohne Richtungsänderung hindurch nur die Intensität der Kraft erleidet die bekannte Veränderung derzufolge sich dieselbe nach dem Durchgang zur ursprünglichen verhält wie die Dielektricitätsconstante des ersten Mediums zu der des zweiten.

Trifft die Kraft- oder Inductionsströmung aber schief gegen die Trennungsfläche so muss sie nebst der Intensitäts- auch noch eine Richtungsänderung erleiden d. h. eine Brechung; das Gesetz derselben lässt sich leicht auf folgende Weise ermitteln.

Es sei SS (Fig. 73) die Trennungsfläche zweier Medien mit den Constanten K_1 und K_2, ferner NN' die Normale und α_1 und α_2 seien die Winkel welche die Kraftströmung $f_1 f_2$ vor und nach dem

Durchgang mit derselben bildet. Die normalen Kraftcomponenten sind dann $f_1 \cos \alpha_1$ und $f_2 \cos \alpha_2$ und zwischen diesen besteht die Relation:

$$K_1 f_1 \cos \alpha_1 = K_2 f_2 \cos \alpha_2 .$$

Die tangentiellen, zur Fläche $S\,S$ parallelen Componenten, bleiben ungeändert da die Polarisation der Medien so wirkt wie eine scheinbare Ladung der Trennungsfläche, eine solche Ladung aber in ihrer eigenen Richtung keine Kraft hervorbringt. Man hat daher weiter:

$$f_1 \sin \alpha_1 = f_2 \sin \alpha_2 .$$

Die Verbindung dieser zwei Gleichungen liefert unmittelbar das Gesetz:

$$\frac{1}{K_1} \operatorname{tang} \alpha_1 = \frac{1}{K_2} \operatorname{tang} \alpha_2 \text{ oder } \frac{\operatorname{tang} \alpha_1}{\operatorname{tang} \alpha_2} = \frac{K_1}{K_2} .$$

Ist $K_2 = K_1$ so geht, wie die Formel ergibt, die Kraftströmung ohne Richtungsänderung durch die Grenzfläche; ist $K_2 = \infty$ d. h.

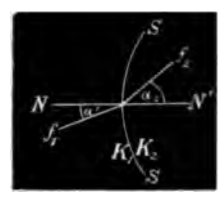


Fig. 73.



Fig. 74.

das zweite Medium ein Leiter, so wird $\alpha = 90^{\circ}$ und es gelangt gar keine Kraftströmung mehr in das Innere.

Das vorstehende Gesetz ist identisch mit dem von Kirchhoff für die Richtungsänderung eines galvanischen Stromes aufgestellten, wenn letzterer die Trennungsfläche zweier verschieden guter Leiter passirt; an die Stelle der Dielektricitätsconstanten treten in diesem Falle die Constanten der Leitungsfähigkeit.

§ 49. Zwangszustand im Dielektricum.

Geht von einer Conductoroberfläche S (Fig. 74) eine Kraftströmung aus, so wird das umgebende Dielektricum polarisirt; wir betrachten ein Raumelement desselben das durch zwei sehr benachbarte Niveauflächen S_1 und S_2 und durch eine Kraftröhre begrenzt ist. Denken wir uns dasselbe von dem umgebenden Raum durch eine unendlich dünne, absolut isolirende Schichte längs seiner Oberfläche getrennt so wird die Polarisation des Elementes so wirken als wäre S_1 mit einer Ladung von der Dichte μ_1 und S_2 mit einer solchen von der Dichte μ_2 versehen. Dabei haben μ_1 und μ_2 natürlich ent-

gegengesetztes Vorzeichen und es besteht die bekannte Gleichung: $\mu_1 S_1 = \mu_2 S_2$.

Indem wir die Polarisation des Elementes durch diese Oberflächenschichten ersetzen, wobei wir dann das Element wie einen Conductor behandeln müssen, gelangen wir leicht zu einem Ausdruck für die elektrische Spannung P_1 und P_2 per Flächeneinheit an S_1 und S_2. Dieselbe ist, wie bekannt, durch die Grösse $2\pi\mu^2$ gegeben und wir erhalten demnach:

$$P_1 = \frac{K}{8\pi} f_1^2 \qquad P_2 = \frac{K}{8\pi} f_2^2$$

wenn wir an Stelle der Dichten die Kräfte einführen, und berücksichtigen dass immer

$$K f = 4\pi\mu$$

sein muss, und dass der Druck $2\pi\mu^2$, wie jede Kraft, im Medium auf den $\frac{1}{K}$fachen Werth sinkt.

Alle Flächen die parallel zu Kraftlinien liegen haben die Dichte Null, und dort verschwindet somit auch der Werth P. Ueber die Richtung von P kann kein Zweifel sein, sie hängt ab von dem Vorzeichen von μ und ist somit an den Flächen S_1 und S_2 die entgegengesetzte. Wir gelangen so zu dem Resultate dass an jedem Volumelement des Dielektricums, das von Niveauflächen begrenzt ist, Kräfte nach auswärts wirken die durch die Grösse $\frac{K}{8\pi} f^2$ per Flächeneinheit bestimmt sind und das Bestreben haben, das Element in Richtung der Kraftlinien zu dehnen.

Auf die Flächen S_1 und S_2 wirken — nach auswärts — im Ganzen die Kräfte $P_1 S_1$ und $P_2 S_2$. Die Resultirende P derselben ist somit:

$$P = P_1 S_1 - P_2 S_2 = \frac{K}{8\pi} (f_1^2 S_1 - f_2^2 S_2).$$

Aus der Constanz der Kraftströmung folgt aber $f_1 S_1 = f_2 S_2$ so dass wir auch schreiben können:

$$P = \frac{K f_1 S_1}{8\pi} (f_1 - f_2).$$

Ferner besteht die Relation:

$$f_2 = f_1 + \frac{d f_1}{d n} d n$$

da wir innerhalb des Volumelementes die Aenderung der Kraft als linear ansehen können.

Wir erhalten somit, da $\frac{d f_1}{d n}$ negativ ist:

$$P = \frac{K \cdot f_1 S_1}{8 \pi} \cdot \frac{d f_1}{d n} \cdot d n = \frac{K \cdot f_1}{8 \pi} \frac{d f_1}{d n} \cdot v$$

wenn wir das Volumelement $S_1 \, d n$ mit v bezeichnen; oder für ein Raumelement vom Volumen 1 die Kraft P_0 welche dasselbe längs der Kraftlinien zu bewegen strebt:

$$P_0 = \frac{K f_1}{8 \pi} \frac{d f_1}{d n} = \frac{1}{2} \frac{d P_1}{d n}.$$

Diese Kraft ist also gemessen durch die Variation des elektrostatischen Druckes welchen die Flächeneinheit (senkrecht zu den Kraftlinien) an dem betreffenden Punkte erleidet.

In einem homogenen Felde ist $f_1 = f_2$ und damit wird auch $P_1 = P_2$ und $P_0 = 0$ d. h. es unterliegt zwar das Volumelement einer Spannung längs der Kraftlinien diese ist aber nach beiden Seiten an Grösse gleich und es entfällt in Folge dessen die Kraft P_0 welche dasselbe als Ganzes zu bewegen strebt.

Ist das Feld aber nicht homogen so hat P_0 einen endlichen Werth und man muss, wenn das Medium sich im Gleichgewichte befinden soll noch die Existenz anderer Kräfte in demselben voraussetzen die die Wirkung von P_0 annulliren.

Als solche Kräfte können wir z. B. an allen Punkten des Mediums wirkende Drucke ansehen die wir mit Q bezeichnen wollen; soll ein Raumelement vom Volumen 1 mit der Basis S und der Höhe $d n$ in Ruhe verharren, wenn $d n$ die Richtung der Kraftlinien ist, so muss

$$Q_0 = P_0 = \frac{1}{2} \frac{d P_1}{d n}$$

sein, wenn wir mit Q_0, analog wie früher, die Differenz der an den beiden Basisflächen wirkenden Druckkräfte bezeichnen; für letztere, auf die Flächeneinheit bezogen, schreiben wir Q_1 und Q_2 und erhalten unmittelbar die folgenden Relationen:

$$Q_0 = S (Q_1 - Q_2); \quad Q_2 = Q_1 + \frac{d Q_1}{d n} d n, \quad Q_0 = - \frac{d Q_1}{d n} \cdot S \cdot d n.$$

Da unserer Voraussetzung gemäss $S \cdot d n = 1$ ist so folgt weiter:

$$Q_0 = P_0 \text{ oder } \frac{d Q_1}{d n} = - \frac{1}{2} \frac{d P_1}{d n} \text{ und } Q_1 = - \frac{1}{2} P_1.$$

Diese Spannungen P_1 und Drucke Q_1 per Flächeneinheit zusammen genügen also um das Medium in einer stabilen Lage zu erhalten; als thatsächlich resultirende Spannungen an den Flächen S_1 und S_2 erscheinen somit die Werthe π_1 und π_2:

$$\pi_1 = P_1 + Q_1 = \frac{1}{2} P_1 \text{ und } \pi_2 = P_2 + Q_2 = \frac{1}{2} P_2.$$

Diese Spannungen an den Basis- (Niveau-) Flächen sind vollkommen bestimmt, nicht so diejenigen an der durch die Kraftröhre gebildeten Begrenzung; dort hat P überall den Werth Null und somit würde auch der Werth $Q = 0$ unseren Bedingungen genügen. Es ist aber leicht einzusehen dass wir für diese seitlichen Drucke ganz beliebige Werthe einführen können, denn da ihre Richtung senkrecht auf derjenigen der elektrischen Kraft steht so wird letztere durch sie gar nicht beeinflusst. Es wird demnach unendlich viele Druckvertheilungen geben die mit der Gleichgewichtsbedingung des Mediums vereinbar sind und somit auch unendlich viele Zwangszustände; welche von diesen, oder ob überhaupt mehrere derselben mit den physikalischen Eigenschaften des Mediums vereinbar sind lässt sich vorläufig nicht entscheiden.

In einem homogenen elektrischen Feld wird $P_1 = P_2$ und die Gesammtspannung $P_1 + P_2$ die ein Element in Richtung der Kraftlinien zu erleiden hat, wird von der Länge desselben unabhängig.

Diese Spannung ist, wie sich aus den vorstehenden Gleichungen unmittelbar ergibt gleich $\frac{K}{8\pi} F^2$ auf die Flächeneinheit, wenn F die Intensität des Feldes ist.

Die Wirkung der Polarisation auf ein dielektrisches Medium besteht daher in der Schaffung eines Zwangszustandes, demzufolge jedes Raumelement in der Richtung der Kraftlinien gestreckt wird; die Kraft die auf die Flächeneinheit einer jeden Niveaufläche wirkt ist ihrer Grösse nach durch $\frac{K}{8\pi} f^2$ bestimmt und dieser Kraft entgegen wirkt noch, mit halber Stärke, der Druck des Mediums.

Grenzt letzteres an einen Conductor so entfällt an dieser Grenze der Gegendruck und die Spannung ist dort $\frac{K}{8\pi} f^2$.

Da im ganzen Innern des homogenen Dielektricums auf jede Fläche gleiche und entgegengesetzte Spannungen ausgeübt werden so kann die Wirkung der ganzen Polarisation schliesslich dahin definirt

werden dass eine jede Kraftröhre, respective das Medium innerhalb derselben, an den beiden Begrenzungsflächen Züge nach aussen von der Grösse $\frac{K}{8\pi} f_1^2$ und $\frac{K}{8\pi} f_2^2$ auszuhalten hat; die Kraftröhre ist also zwischen den Conductoren welche sie verbindet gleichsam ausgespannt wie ein Kautschukfaden und ihr Bestreben geht dahin dieselben einander zu nähern. Der Zug welcher dabei per Flächeneinheit an der Oberfläche eines jeden der Conductoren wirkt ist wieder $\frac{K}{8\pi} f_1^2$ und $\frac{K}{8\pi} f_2^2$ und dies sind, wie bekannt, thatsächlich die Ausdrücke für die Spannung an der Oberfläche der Conductoren.

Wenn man daher mit Maxwell den Conductoren selbst gar keine eigene Ladung zuschreibt, sondern nur dem Dielektricum eine Polarisation, so kommt man für die an der Oberfläche der Conductoren vorhandene Spannung ($2\pi\mu^2$) ganz zu demselben Werthe wie nach der üblichen Anschauung; es muss aber hier wieder darauf hingewiesen werden, dass das Ersetzen der Conductorladungen durch die Wirkung einer Polarisation für unsere Anschauungen insolange ohne wesentlichen Einfluss bleiben muss, als man genöthigt ist das Entstehen einer derartigen Polarisation wieder auf das Vorhandensein von Ladungen zurückzuführen.

Es ist auch versucht worden den Zwangszustand eines Mediums an Stelle der fernwirkenden Kräfte zu setzen; so sehr sich auch die Erkenntniss immer mehr und mehr Bahn bricht, dass eine jede Kraft in ihrer Wirkung wesentlich durch das Medium bedingt wird durch welches hindurch sie sich fortpflanzt, so wenig kann der Zwangszustand, wenigstens gegenwärtig, die Stelle der Fernwirkung vertreten. Erstens involvirt die von uns angenommene Ansicht über die Constitution der Dielektrica schon die unvermittelte Wirkung von einem leitenden Partikelchen zum nächsten, und zweitens können wir bisher einen jeden Zwangszustand immer nur durch die Fernwirkung von Massen entstanden denken. Solange diese beiden Punkte unerledigt sind kann wohl von einem wirklichen Ersatz der fernwirkenden Kräfte nicht die Rede sein.

Der Zwangszustand eines dielektrisch polarisirten Mediums, respective die dabei im Innern desselben auftretende Kraft, zeigt sich auch an den veränderten physikalischen Eigenschaften derselben; so wird z. B. eine dielektrische Flüssigkeit, wenn sie starken elektrostatischen Kräften ausgesetzt ist, optisch doppelbrechend und zeigt jene Erscheinungen, wie sie an schnell gekühlten oder einseitig ge-

pressten Gläsern als die Wirkung innerer Spannungen schon längst bekannt sind. Das Auftreten dieser Erscheinungen ist jedenfalls ein schöner experimenteller Beleg für die Richtigkeit der über die Natur der Dielektrica gemachten Voraussetzungen.

§ 50. Elektrostatischer Auftrieb.

Es gilt gewöhnlich als eine Fundamentalerscheinung dass ein an und für sich unelektrischer Körper von einem elektrischen angezogen wird; insolange wir auf die Wirkung des Isolators, der beide trennt, keine Rücksicht zu nehmen brauchen oder im leeren Raume experimentiren, behält dieser Satz auch seine allgemeine Giltigkeit, er verliert dieselbe aber wenn das die Körper umgebende Dielektricum selbst einer beträchtlichen Polarisation fähig d. h. wenn seine Dielektricitätsconstante gleich oder grösser wird als die des angezogenen Körpers. Im letzteren Fall geht die Anziehung sogar in eine scheinbare Abstossung über. Wir wollen diesen Fall nun näher untersuchen.

Es seien S_1 S_2 (Fig. 75) zwei Niveauflächen und L eine Kraftröhre; das von beiden eingeschlossene Volumen sei von einer Substanz mit der Dielektricitätsconstante K_2 erfüllt während dem Medium ausserhalb die Constante K_1 zukomme. Die beiden Grenzflächen S_1 und S_2 haben dann eine scheinbare Flächendichte μ_1 und μ_2 von entgegengesetztem Vorzeichen und es besteht die Relation $\mu_1 S_1 + \mu_2 S_2 = 0$ wenn wir mit S_1 und S_2 kurz die Endflächen des betrachteten Volumens bezeichnen.

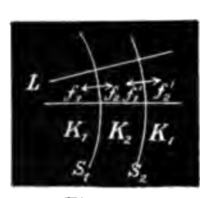


Fig. 75.

Es ist klar dass μ_1 positiv oder negativ sein wird je nachdem $K_1 \lessgtr K_2$ ist. An jeder der Grenzflächen wirken nun Kräfte normal auf letztere die wir der Reihe nach mit $f_1 f_2 f_1' f_2'$ bezeichnen wollen und die wir eine jede von der betreffenden Fläche **weg** als **positiv** zählen.

Es bestehen dann folgende Relationen:

$$f_1 + f_2 = 4\pi\mu_1 = q_1$$
$$f_1' + f_2' = 4\pi\mu_2 = q_2$$
$$\frac{f_1}{f_2} = -\frac{K_2}{K_1};\quad \frac{f_1'}{f_2'} = -\frac{K_1}{K_2}.$$

Für die resultirenden Kräfte q_1 und q_2 an den Flächen S_1 und S_2 erhalten wir demnach:

$$q_1 = f_1\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)$$
$$q_2 = f_2'\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right).$$

Betrachten wir das ganze Volumen als starr aber als frei beweglich im umgebenden Medium, so gibt uns $q_1 + q_2$ die Kraft mit welcher die Einheit der Elektricität an seiner Stelle längs der Kraftlinie getrieben wird; es ist

$$q = q_1 + q_2 = \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)(f_1 + f'_2).$$

Da ferner die Ladung der Fläche $S_1 = \mu_1 S_1 = m = -\mu_2 S_2$ ist, so sind die Kräfte Q_1 und Q_2 mit welchen S_1 und S_2 angegriffen werden:

$$Q_1 = m\, q_1 = m\, f_1 \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right); \; Q_2 = -m\, q_2 = -m f'_2 \left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)$$

und ihre Resultirende Q:

$$Q = Q_1 + Q_2 = m\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)(f_1 - f'_2) = \frac{S_1 f_1}{4\pi}\left(1 - \frac{K_1}{K_2}\right)^2 \cdot (f_1 - f'_2).$$

Mit dieser Kraft Q wird also das betrachtete Volumelement längs der Kraftlinie verschoben; eine Discussion der Gleichung führt zu folgenden Schlüssen:

Ist das Feld ein homogenes, also $f_1 = f'_2$, so wird $Q = 0$, d. h. der Körper befindet sich im Gleichgewichte, ganz abgesehen von der Natur des umgebenden Mediums.

Ist das Feld von einem homogenen Medium durchaus erfüllt, also $K_1 = K_2$, so wird wieder $Q = 0$ wie ja selbstverständlich ist.

Ist das Feld inhomogen, und convergirt die Kraftröhre gegen die linke Seite unserer Figur, so ist immer $f_1 > f'_2$, der letzte Klammerausdruck in der Formel für Q also wesentlich positiv, da f_1 und f'_2 für sich positive Grössen sind; es wird also Q positiv sein wenn $K_1 < K_2$ und negativ wenn $K_1 > K_2$ ist. In ersterem Falle erfolgt Bewegung nach dem Convergenzpunkte der Kraftröhre, also Anziehung, im letzteren Falle Abstossung. Seine grösste Intensität erreicht Q wenn $K_2 = \infty$ wird d. h. für den Fall eines leitenden Körpers in einem isolirenden Medium; es wird ein solcher also immer stärker angezogen als irgend ein dielektrischer Körper unter gleichen Umständen.

Wird $K_1 = \infty$, befindet sich also der Körper in einem leitenden Medium so wird wieder $Q = 0$ weil in diesem Falle die Kräfte f_1 und f'_2 gleich Null werden.

Man kann das vorstehend behandelte Problem auch experimentell verificiren; verbindet man den einen Pol einer Elektrisirmaschine mit einer kleinen, durch einen Schellacküberzug gut isolirten

Messingkugel, während der zweite Pol der Maschine zur Erde abgeleitet ist, und bringt man dieser Kugel zwei kleine Kugeln aus Ebonit und Messing gegenüber, die an Seidenfäden aufgehängt sind, so beobachtet man eine Anziehung der beiden letzteren gegen die grosse, sobald die Maschine in Gang gesetzt wird, vorausgesetzt dass sich das ganze System in Luft befindet. Bringt man die zwei Kugeln aber in ein Dielektricum dessen Constante grösser ist als diejenige des Ebonits ($K = 2,3$), z. B. in Ricinusöl ($K = 4,7$), so wird die Ebonitkugel deutlich abgestossen, während die Metallkugel ($K = \infty$) nach wie vor angezogen wird. Noch auffallender wird die scheinbare Abstossung wenn man Blasen aus Luft ($K = 1$) sich unterhalb einer in Petroleum ($K = 2,1$) horizontal befestigten Glasplatte sammeln lässt und dann die mit der Elektrisirmaschine verbundene Kugel von unten denselben nähert; so wie die Maschine erregt wird, weichen sämmtliche Luftblasen von der Kugel zurück.

Diese Erscheinungen sind in vieler Beziehung denen des hydrostatischen Auftriebes ähnlich, mit dem Unterschiede jedoch dass in Bezug auf die Gravitation jeder Körper mit einer von Null verschiedenen Masse versehen ist, während ein der Induction unterworfener, ganz isolirter Körper stets die Ladungssumme Null hat: die Gravitation wirkt daher auch im homogenen Feld bewegend, die elektrische Induction dagegen nicht, ausser der Versuchskörper war von vornherein positiv oder negativ geladen.

Ihr vollständiges Analogon findet die behandelte Erscheinung aber im Verhalten der Körper magnetischen Kräften gegenüber: fast alle Substanzen, Eisen besonders, werden von einem Magnetpole angezogen d. h. verhalten sich paramagnetisch, manche aber, z. B. Wismuth, werden auch abgestossen, sind diamagnetisch. Auch diese Abstossung ist nur als eine scheinbare aufzufassen, als ein magnetischer Auftrieb, der eintritt sobald die Umgebung stärker magnetisch ist als der Versuchskörper, d. h. eine grössere Magnetisirungsconstante besitzt als dieser.

§ 51. Leitung in Dielektricis.

In einem absoluten Isolator geht nur so lange eine Verschiebung der Elektricität, in gewissem Sinne also eine Leitung, vor sich als die Intensität der inducirenden Kraft variirt; bleibt letztere aber constant, so hört jede Bewegung von Elektricität im Innern auf. In Wirklichkeit haben wir es aber kaum jemals mit einem idealen Isolator zu thun, alle Substanzen — wenigstens alle festen und

flüssigen — gestatten der Elektricität ein Strömen wenn auch oft nur in äusserst geringem Maasse. Auch die besten Isolatoren wie Paraffin, Schwefel etc. zeigen, wenn sie längere Zeit einer constanten Induction ausgesetzt waren, eine positive Ladung an einer Seite, eine negative an der anderen, die sich durch denselben Process des langsamen Strömens dann von selbst wieder ausgleichen. Ueber die Grössen welche für diesen Process maassgebend sind, gibt die folgende Betrachtung Aufschluss.

Für das Innere eines Dielektricums, das wir wieder als isotrop annehmen, gilt die bekannte Gleichung:

$$K \Delta V + 4 \pi \rho = 0.$$

Wir betrachten nun ein kubisches Raumelement $d v$ dessen Kanten den drei Coordinatenaxen parallel liegen sollen. Wir setzen ferner das Vorhandensein einer, aus welcher Ursache immer eingetretenen Elektricitätsströmung im Innern voraus und bezeichnen die parallel der x-Axe in $d v$ eintretende Menge mit q_x, die austretende mit q'_x, beide bezogen auf die Zeit $d t$.

Diese Mengen sind offenbar proportional den treibenden Kräften f_x und f'_x, den senkrecht getroffenen Flächen $d y \cdot d z$ und der Zeit $d t$, so dass wir schreiben können:

$$q_x = c \cdot d y \cdot d z \cdot f_x \cdot d t \qquad q'_x = c \cdot d y \cdot d z \cdot f'_x \cdot d t.$$

Die Constante c hängt nur von der physikalischen Beschaffenheit des Mediums ab, und kann als Leitungsvermögen aufgefasst werden; sie behält, ein isotropes Dielektricum vorausgesetzt, überall denselben Werth.

Es besteht ferner die Beziehung:

$$f'_x = f_x + \frac{d f_x}{d x} \cdot d x$$

und wenn wir die in der Zeit $d t$ in $d v$ durch Strömung parallel der x-Axe angehäufte Elektricität mit Q_x bezeichnen, so erhalten wir:

$$Q_x = q_x - q'_x = c \cdot d y \cdot d z \cdot d t\,(f_x - f'_x) = - c \frac{d f_x}{d x} d v \cdot d t =$$
$$= c \cdot \frac{d^2 V}{d x^2} \cdot d v \cdot d t.$$

In gleicher Weise können wir bezüglich der Strömung längs der beiden anderen Coordinatenrichtungen verfahren und erhalten so die ganze in $d v$ während der Zeit $d t$ angehäufte Elektricität Q:

$$Q = Q_x + Q_y + Q_z = c \left(\frac{d^2 V}{d x^2} + \frac{d^2 V}{d y^2} + \frac{d^2 V}{d z^2} \right) d v \cdot d t =$$
$$= c \cdot \Delta V \cdot d v \cdot d t.$$

Wir können aber für Q auch noch einen anderen Ausdruck aufstellen; denn bezeichnen wir die Zunahme der Raumdichte ρ in der Zeit dt mit $d\rho$, so ist offenbar auch

$$Q = dv \cdot d\rho$$

und somit

$$c \cdot \Delta V \cdot dv \cdot dt = dv \cdot d\rho \text{ oder } c\,\Delta V = \frac{d\rho}{dt} \text{ oder } \Delta V = \frac{1}{c} \cdot \frac{d\rho}{dt}.$$

Aus der ersten unserer Gleichungen folgt aber

$$\Delta V = -4\pi \frac{\rho}{K}$$

so dass sich weiter ergibt:

$$\frac{1}{c} \cdot \frac{d\rho}{dt} = -4\pi \frac{\rho}{K} \text{ oder } \frac{d\rho}{\rho} = -\frac{4\pi c}{K} \cdot dt.$$

Die Integration dieser Gleichung liefert unmittelbar

$$\log. \rho = -\frac{4\pi c}{K} \cdot t + C \text{ oder } \rho = e^{C} \cdot e^{-\frac{4\pi c}{K} \cdot t} = A \cdot e^{-\frac{4\pi c}{K} \cdot t}.$$

Die Constante A lässt sich folgendermassen bestimmen: ρ ist die Raumdichte zur Zeit t; nennen wir die Dichte welche zur Zeit $t = 0$ an dem betreffenden Punkte geherrscht hat ρ_0 so wird $A = \rho_0$ und man hat:

$$\rho = \rho_0 \cdot e^{-\frac{4\pi c}{K} \cdot t}.$$

Ist das Leitungsvermögen c des Körpers gleich Null so bleibt immer $\rho = \rho_0$ d. h. es findet eben gar kein Strömen von Elektricität statt, auch wenn das Innere von Anfang an beliebige Mengen Elektricität enthalten hat; wäre dagegen $c = \infty$ so würde für jede endliche Dauer der Induction $\rho = 0$ werden, die Ladung würde aus dem Innern verschwinden und an der Grenzfläche erscheinen.

Für die in Wirklichkeit vorkommenden Isolatoren kennen wir die Werthe von c nicht, die Formel sagt daher in Bezug auf diese nur im Allgemeinen aus, dass die Aenderung von ρ um so beträchtlicher sein wird je grösser c und je kleiner K ist.

§ 52. Energie eines polarisirten Dielektricums.

Wird ein Dielektricum polarisirt so werden in allen seinen leitenden Molekülen Elektricitätsmengen verschoben und dabei eine gewisse Arbeit geleistet; diese findet sich im polarisirten Medium als Energie aufgespeichert, und kommt zu Tage sowie nach Entfernung

der inducirenden Massen sich die getrennten Elektricitäten wieder vereinigen können.

Die Grösse dieser Energie hängt ab von dem Werthe der Potentialfunction und von der Dichte der inducirten Ladung in jedem Raumelement. Bezeichnen wir erstere mit V letztere mit ρ, also die Ladung des Elementes $d\,v$ mit $\rho\,d\,v$ so ist nach einem bekannten Gesetze die Energie dieses Elementes gleich $\frac{1}{2} V \rho\, d\, v$. Indem wir diesen Ausdruck über ein beliebiges Volumen integriren, erhalten wir die Gesammtenergie W desselben:

$$W = \frac{1}{2} \int V \rho\, d\, v$$

wobei im Allgemeinen sowohl V als ρ von Punkt zu Punkt variiren werden.

Aus der allgemeinen Gleichung $K \Delta V + 4 \pi \rho = 0$ entnehmen wir ferner:

$$\rho = - \frac{K \Delta V}{4 \pi}$$

und wenn wir diesen Werth in obige Gleichung einführen so wird:

$$W = - \frac{K}{8 \pi} \int V \Delta V\, d\, v.$$

Dadurch dass wir die Dielektricitätsconstante K vor das Integralzeichen setzen, ist bereits angedeutet dass die Rechnung sich nur auf isotrope und homogene Medien bezieht, da andernfalls auch K von Punkt zu Punkt variabel wäre.

Das Integral $\int V \Delta V\, d\, v$ gestattet eine sehr einfache Lösung mit Hilfe eines zuerst von Green aufgestellten Satzes. Sind nämlich U und V zwei beliebige aber stetige und überall endliche Functionen der Coordinaten, und ist S eine beliebige aber um den betrachteten Raum geschlossene Fläche so besteht die Relation:

$$\int U \Delta V\, d\, v = \int U \frac{d V}{d\, n} d\, S - \int \left(\frac{d U}{d\, x} \cdot \frac{d V}{d\, x} + \frac{d U}{d\, y} \cdot \frac{d V}{d\, y} + \frac{d U}{d\, z} \cdot \frac{d V}{d\, z} \right) d\, v.$$

Indem wir hier $U = V$ setzen kommen wir auf unsere Gleichung und erhalten unmittelbar:

$$\int V \Delta V\, d\, v = \int V \frac{d V}{d\, n} d\, S - \int \left[\left(\frac{d V}{d\, x} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d\, y} \right)^2 + \left(\frac{d V}{d\, z} \right)^2 \right] d\, v$$

oder

$$\int V \Delta V\, d\, v = \int V \frac{d V}{d\, n} d\, S - \int F^2\, d\, v$$

wenn wir mit F die Kraftintensität bezeichnen.

Die Fläche S können wir beliebig wählen mit der einzigen Bedingung, dass sie den betrachteten Raum vollständig einschliesse; wir wählen eine Kugelfläche von sehr grossem Radius R um unseren Punkt, und da ist klar, dass der Werth des Integrals mit dS sich der Null nähern muss. Es wächst nämlich S mit R^2, die Kraft $\frac{dV}{dn}$ nimmt aber ebenso mit R^2 ab, so dass diese beiden Einflüsse sich aufheben; es bleibt dann nur noch das Potential V und dieses wird für $R = \infty$ gleich Null. Wählen wir also diese Kugel beliebig gross, so können wir den Werth des ersten Integrals vernachlässigen und schreiben:

$$\int V \Delta V d\tau = -\int F^2 d\tau.$$

Für die Energie W des Raumelementes τ ergibt sich somit:

$$W = -\frac{K}{8\pi}\int F^2 d\tau = \frac{K F^2}{8\pi} \cdot \tau$$

oder für die Volumeinheit

$$W_1 = \frac{K F^2}{8\pi}.$$

Den vorstehenden Ausdruck haben wir schon einmal kennen gelernt; er ist nichts anderes als der auf die Flächeneinheit im Innern des polarisirten Mediums ausgeübte Druck. Dieser und die Energie der Volumeinheit haben somit dieselbe Grösse; sie sind auch beide von denselben Dimensionen, denn die Energie der Volumeinheit ist (wenn m eine Masse, l eine Länge bedeutet) dargestellt durch $\frac{m}{l^3} \cdot \frac{m}{l} = \left(\frac{m}{l^2}\right)^2 = F^2$ und der elektrostatische Druck $2\pi\mu^2$ ebenso durch $\left(\frac{m}{l^2}\right)^2 = F^2$.

Die Grösse $\frac{K}{8\pi}$ ist eine reine Zahl und ohne Einfluss auf die Dimension.

Der vorstehende Ausdruck für die Energie eines polarisirten Dielektricums führt uns zu einer sehr merkwürdigen Thatsache: es zeigt sich, dass bei jedem gegebenen System von geladenen Conductoren in einem Dielektricum stets die Energie des letzteren zu genau demselben Ausdruck führt, als wenn wir die Energien der Conductorladungen nach der üblichen Formel $\frac{1}{2} MV$ berechnen. Es besagt das, dass wir hier wieder, wie schon früher, von wirklichen

Ladungen der Conductoren vollständig absehen und alle Wirkungen der Polarisation des Zwischenmediums zuschreiben können. Zur Erläuterung des eben Gesagten wollen wir einige einfache Beispiele heranziehen.

1. Es sei eine leitende Kugel vom Radius R in einem homogenen unendlichen Dielektricum von der Constante K gegeben, und dieselbe besitze die Ladung M. Nach der üblichen Anschauungsweise ist nun die Energie, welche dieses System repräsentirt, gegeben durch $\frac{1}{2} M V$, wo V das Potential der Kugel bedeutet.

Dabei ist zu beachten dass V mit M in folgender Weise zusammenhängt:

$$V = \frac{1}{K} \frac{M}{R}$$

so dass man für die Energie W schreiben kann:

$$W = \frac{1}{2K} \cdot \frac{M^2}{R}.$$

Suchen wir nun einen Ausdruck für die Energie des polarisirten Mediums, so haben wir für jede Volumeinheit:

$$W_o = \frac{K}{8\pi} F^2$$

wo F die dort herrschende Kraft ist.

Wir denken uns nun um die Kugel mit den Radien ρ und $\rho + d\rho$ zwei concentrische Kugelschalen geschlagen deren Rauminhalt gleich $4\rho^2 \pi d\rho$ sein wird. Die Kraft F an diesem Orte muss den Werth haben

$$F = \frac{M}{K \cdot \rho^2}$$

so dass wir für die Energie w dieser Kugelschale erhalten:

$$w = 4\rho^2 \pi d\rho \cdot W_o = 4\rho^2 \pi d\rho \cdot \frac{K}{8\pi} \cdot \frac{M^2}{K^2 \rho^4} = \frac{M^2}{2K} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

Für die Gesammtenergie W des Mediums erhalten wir somit

$$W = \frac{M^2}{2K} \int_R^\infty \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{1}{2K} \frac{M^2}{R}$$

also genau denselben Werth der aus der Annahme einer reellen Ladung der Kugel folgt. Es steht uns daher frei, mit Maxwell den

Sitz dieser Energie von der Kugeloberfläche auf die gesammte Masse des Dielektricums zu verlegen.

2. Als zweites Beispiel wählen wir den ebenen Condensator. Es sei die eine Platte zur Erde abgeleitet, die zweite auf das Potential V geladen. Das Zwischenmedium habe eine Constante K und eine Dicke δ. Es ist dann nach der gewöhnlichen Anschauung die Energie W wieder gegeben durch

$$W = \frac{1}{2} M \cdot V \text{ und } M = \mu S$$

wenn S die Fläche der Platte bedeutet. Es bestehen dann folgende Relationen:

$$\mu = \frac{K}{4\pi} \cdot \frac{V}{\delta}; \quad M = \frac{K \cdot S \cdot V}{4\pi\delta}; \quad W = \frac{K \cdot S}{8\pi} \cdot \frac{V^2}{\delta}.$$

Nach Maxwell's Anschauung dagegen berechnet sich die Energie des Dielektricums wie folgt.

Es ist

$$W_o = \frac{K}{8\pi} F^2; \quad F = \frac{V}{\delta} \text{ somit } W_o = \frac{K}{8\pi} \frac{V^2}{\delta^2}.$$

Für die ganze Zwischenschicht, deren Volumen gleich $S \cdot \delta$ ist wird dann die Energie W:

$$W = W_o S \cdot \delta = \frac{KS}{8\pi} \cdot \frac{V^2}{\delta}.$$

Also auch hier kommt man beiderseits zu demselben Ausdruck. Dass im vorliegenden Beispiele jene Partien des Dielektricums die ausserhalb des Condensators liegen, ausser Berechnung gelassen wurden, begründet sich durch die schon bei Ableitung der Condensatorformel gemachte Voraussetzung dass im äusseren Raume keine nennenswerthe Kraftströmung mehr verläuft, sondern alle Kraftlinien gerade Verbindungslinien der zwei Platten sind; wenn das der Fall ist so wird das äussere Medium auch nicht polarisirt und liefert daher auch keinen Beitrag zur Energie.

3. Schliesslich wollen wir noch für den Kugelcondensator dieselbe Parallele durchführen.

Wir haben schon in § 39 für dieses System die Beziehung zwischen Ladung und Potentialen abgeleitet und gefunden dass

$$V = \frac{M \cdot \delta}{R_1 R_2}$$

ist wo R_1 R_2 die beiden Kugelradien, δ ihre Differenz $(R_2 - R_1)$ und M, V Ladung und Potential der inneren Kugel bedeuten wenn die

äussere zur Erde abgeleitet ist. Es wurde aber dort die Dielektricitätsconstante des Zwischenmediums = 1 gesetzt weil wir dasselbe als nicht vorhanden oder vielmehr als unwirksam vorausgesetzt haben. Ist die Dielektricitätsconstante desselben K so übergeht die Relation zwischen V und M in

$$V = \frac{1}{K} \cdot \frac{M \cdot \delta}{R_1 R_2}.$$

Die Energie des geladenen Condensators W wird somit:

$$W = \frac{1}{2} M V = \frac{M^2}{2K} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Berechnen wir nun die Energie die das polarisirte Zwischenmedium repräsentirt.

Wir erhalten wieder für die Energie w einer concentrischen Kugelschale vom Radius ρ und der Dicke $d\rho$ — ganz wie in dem ersten Beispiel —

$$w = \frac{M^2}{2K} \cdot \frac{d\rho}{\rho^2}.$$

denn die Kraft F an irgend einem Punkte des Dielektricums ist auch hier durch den Ausdruck $F = \frac{1}{K} \cdot \frac{M}{\rho^2}$ gegeben weil die Ladung der äusseren Belegung des Kugelcondensators im Innern keine Kraft ausübt.

Indem wir über das ganze Dielektricum integriren, erhalten wir die Gesammtenergie:

$$W = \frac{M^2}{2K} \int_{R_1}^{R_2} \frac{d\rho}{\rho^2} = \frac{M^2}{2K} \cdot \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}.$$

Also auch hier ist es gleichgiltig ob wir den Sitz der Energie in die Ladung des Condensators oder, diese ganz bei Seite lassend, in die Polarisation des Dielektricums verlegen.

Das erste der gegebenen Beispiele ist noch einer sehr wesentlichen Erweiterung fähig; wir haben dort gezeigt dass die Energie einer kugelförmig angeordneten Elektricitätsmenge nach der gewöhnlichen Auffassung auch identisch ist mit der Energie des Dielektricums wenn dieses homogen und unendlich ist.

An Stelle der Kugel können wir aber offenbar auch einen Punkt setzen und wenn deren mehrere im Raume vorhanden sind so werden

die von ihnen ausgehenden Polarisationen sich [illegible] und dieser Satz wird auch hier noch Anwendung finden. Er wird demnach auch noch für eine beliebig mit Elektricität belegte Fläche gelten, wenn diese beiderseits von demselben Dielektricum begrenzt ist. Ist die Fläche geschlossen, so gilt er allgemein nur, wenn sich im Innern dasselbe Medium befindet wie ausserhalb. Ist ferner die Vertheilung der Elektricität auf der Fläche eine derartige, dass sie einer Gleichgewichtslage gleichkommt, so verschwindet im Innern die Kraft und damit auch die Polarisation und es ist unmittelbar klar, dass in diesem Falle unser Satz seine Giltigkeit auch behält, wenn sich im Innern ein beliebiges Medium befindet. Nun sind die Oberflächen von Conductoren für statische Ladungen immer Gleichgewichtsflächen und daraus folgt, dass für ganz beliebig geformte und vertheilte Conductoren die Gesammtenergie ihrer Ladungen nach der gewöhnlichen Vorstellung und die Energie des Dielektricums identisch [illegible] sind.

§ [illegible] Fälle [illegible] Induction [illegible] Dielektricis.

Es wurde bereits erwähnt, dass das Problem der Induction in beliebig vertheilten dielektrischen Medien allgemein nicht lösbar ist. Wir wollen aber im Folgenden einige specielle, auch für die Praxis nicht unwichtige Fälle betrachten, bei denen durch einfache geometrische Anordnung von Leitern und Isolatoren eine Lösung ermöglicht wird.

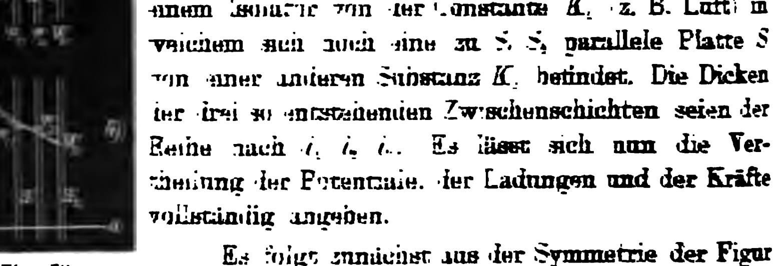


Fig. 76.

Es seien S_1 S_2 (Fig. 76 a) die beiden Belegungen eines ebenen Condensators mit den constanten Potentialen V_1 und V_2. Die Zwischenschicht bestehe aus einem Isolator von der Constante K_1 (z. B. Luft), in welchem sich noch eine zu S_1 S_2 parallele Platte S von einer anderen Substanz K_2 befindet. Die Dicken der drei so entstehenden Zwischenschichten seien der Reihe nach d_1 d_2 d_3. Es lässt sich nun die Vertheilung der Potentiale, der Ladungen und der Kräfte vollständig angeben.

Es folgt zunächst aus der Symmetrie der Figur, dass auch bei einem solchen Condensator die Kraftlinien sämmtlich in gerader Richtung von S_1 nach S_2 verlaufen müssen, wenn die Platten als sehr gross gegen ihre Distanz vorausgesetzt werden, d. h. dass die Kräfte f_1 f_2 f_3 innerhalb der Strecken d_1 d_2 d_3 constant bleiben.

Da die Kraftlinien die Begrenzungsflächen von S senkrecht treffen so gelten unmittelbar die Relationen:

$$f_1 : f_2 = k_2 : k_1$$
$$f_2 : f_3 = k_1 : k_2$$
$$f_1 = f_3.$$

Bezeichnen wir die Potentiale an den Grenzen von S mit φ_1 und φ_2 so ergibt das lineare Potentialgefälle auch noch die folgenden Gleichungen:

$$f_1 = f_3 = \frac{V_1 - \varphi_1}{d_1} = \frac{\varphi_2 - V_2}{d_3}$$

$$f_2 = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{d_2}$$

Für die Gesammtpotentialdifferenz $V_1 - V_2$ können wir auch den folgenden Ausdruck setzen:

$$V_1 - V_2 = (V_1 - \varphi_1) + (\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_2 - V_2)$$

oder wenn wir an Stelle der Potentialdifferenzen die Kräfte einführen:

$$V_1 - V_2 = f_1 d_1 + f_2 d_2 + f_1 d_3 = f_1 (d_1 + d_3) + f_2 d_2 = f_1 (d_1 + d_3) +$$
$$+ f_1 \frac{K_1}{K_2} d_2 = f_1 \left(d_1 + d_3 + \frac{K_1}{K_2} d_2 \right).$$

Wir erhalten somit für die gesuchten Kräfte $f_1\, f_2\, f_3$ die Werthe:

$$f_1 = f_3 = \frac{V_1 - V_2}{d_1 + d_3 + \frac{K_1}{K_2} d_2} \quad \text{und} \quad f_2 = \frac{(V_1 - V_2) \frac{K_1}{K_2}}{d_1 + d_3 + \frac{K_1}{K_2} d_2}.$$

Der Gang der Potentialgefälle ist in Fig. 76 *b* für den Fall dargestellt dass $K_2 > K_1$ ist in welchem Falle $f_2 < f_1$ wird; die punktirte Linie gilt für den Werth $K_2 = \infty$ wo $f_2 = 0$ ist.

Man sieht aus den vorstehenden Gleichungen dass für $K_2 = K_1$ auch $f_2 = f_1$ wird, gleich $\frac{V_1 - V_2}{\Delta}$, wenn Δ die Distanz beider Condensatorplatten bedeutet; denselben Werth erhält man natürlich für f_1 wenn $d_2 = 0$ und somit $d_1 + d_3 = \Delta$ wird.

Für die Ladung M des Condensators ergeben sich folgende Werthe; es ist, wenn S die Fläche des Condensators bedeutet:

$$M = \mu \cdot S = S \cdot \frac{K_1}{4\pi} f_1 = \frac{K_1 S}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{d_1 + d_3 + \frac{K_1}{K_2} d_2}$$

wird aber $K_2 = K_1$ d. h. entfernt man die eingeschobene Platte S so hat man:

$$M_0 = \frac{K_1 S}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{d_1 + d_2 + d_2} = \frac{K_1 S}{4\pi} \cdot \frac{V_1 - V_2}{\Delta}.$$

Ist die Capacität im ersten Falle C im zweiten C_0, und macht man durch Ableitung zur Erde $V_2 = 0$ so hat man weiter:

$$C = \frac{M}{V_1} \quad C_0 = \frac{M_0}{V_1} \quad \frac{C}{C_0} = \frac{M}{M_0} = \frac{\Delta}{d_1 + d_3 + \frac{K_1}{K_2} d_2}.$$

Es ist also bei eingeschobener Platte S die Capacität grösser oder kleiner je nachdem $K_2 \lesseqgtr K_1$ ist; wird $d_2 = 0$ so ist $C = C_0$; wird $d_2 = \Delta$ und somit $d_1 + d_3 = 0$ so hat man

$$\frac{C}{C_0} = \frac{K_2}{K_1}$$

wird $K_2 = K_1$ so bleibt $C = C_0$, wird aber $K_2 = \infty$ so wird

$$\frac{C}{C_0} = \frac{\Delta}{d_1 + d_3} = \frac{\Delta}{\Delta - d_2}.$$

Da die Potentialgefälle innerhalb der Strecken d_1 d_2 d_3 constant sind, so sind auch für alle Punkte die absoluten Werthe der Potentiale bekannt; für die Begrenzungsflächen von S erhält man:

$$\varphi_1 = V_1 + f_1 d_1$$
$$\varphi_2 = V_1 + f_1 d_1 + f_2 d_2$$

wobei auf die Vorzeichen von f_1 und f_2 Rücksicht zu nehmen ist.

Für die Dichten μ an den Condensatorplatten und für die scheinbaren Dichten σ an den Flächen von S ergeben sich schliesslich die Werthe:

$$\mu_1 = -\mu_2 = \frac{K_1 f_1}{4\pi}; \quad \sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{1}{4\pi}(f_1 - f_2).$$

Die vorstehende Aufgabe findet auch öfters eine praktische Anwendung, so z. B. bei der Bestimmung der Dielektricitätsconstanten fester Isolatoren nach der Condensatormethode; es geht in diesem Falle nicht gut an den ganzen Zwischenraum zwischen den Platten mit der Substanz auszufüllen, und so ist man gezwungen eine planparallele Platte derselben in den Condensator einzuschieben und aus ihrer Dicke und der Aenderung der Capacität das K zu bestimmen.

Auch das folgende Problem ist mit Rücksicht auf viele Aufgaben der Praxis von Interesse. Wir denken uns eine punktförmig (oder auf einer kleinen Kugel) angeordnete Elektricitätsmenge m im

Punkte P (Fig. 59) und den umgebenden Raum durch eine unendliche Ebene AA' in zwei Theile getheilt die mit den Dielektricis K_1 und K_2 homogen erfüllt sein sollen; es fragt sich wie gross ist das Potential an irgend einem Punkte im zweiten Medium der auf der verlängerten Normalen von P nach AA' liegt, wenn letztere und die Werthe m, K_1 K_2 gegeben sind.

Die Aufgabe wird gelöst sein sobald wir die Vertheilung der scheinbaren Ladung auf AA' kennen die die Polarisation der Medien ersetzt; nun haben wir schon in § 34 mit Hilfe des Principes der elektrischen Bilder ein ganz analoges Problem gelöst, bei welchem nur das zweite Medium als Leiter ($K = \infty$) vorausgesetzt war. Für die Flächendichte μ an irgend einem Punkte von AA' haben wir damals erhalten:

$$\mu = \frac{m \cdot a}{2 \pi r^3}$$

wo a die Distanz des Punktes P von AA' und r die zwischen P und dem betrachteten Flächenstück bezeichnet.

Die scheinbare Flächendichte σ welche in unserem Falle an Stelle dieser wirklichen μ zu treten hat kann sich von derselben offenbar nur durch einen für alle Theile von AA' constanten Factor unterscheiden denn die Art der Vertheilung muss in beiden Fällen dieselbe sein, da wir einen Leiter ja gleichfalls als ein Dielektricum aber mit der Constante $K = \infty$ ansehen können. Während aber im Falle eines Leiters die Gesammtladung von AA' gleich m wird, wird sie in unserem Falle nur einen bestimmten Bruchtheil m' derselben betragen, so dass wir als Ausdruck der scheinbaren Dichte σ erhalten:

$$\sigma = \frac{m' \, a}{2 \pi r^3}.$$

Um nun die Grösse m' durch m auszudrücken bedienen wir uns der folgenden Gleichungen:

Für irgend einen Punkt B der Fläche AA' ist die von P ausgehende Kraft $f = \frac{m}{r^2}$ und die auf AA' senkrechte Componente derselben f_0:

$$f_0 = \frac{m \cdot a}{r^3}.$$

Die Kräfte f_1 und f_2 welche in B beiderseits der Fläche wirken, setzen sich zusammen aus dieser Kraft f_0 und den von der Flächen-

ladung auf $A A'$ in zwei beiderseits unendlich nahe gelegenen Punkten ausgeübten Wirkungen; letztere sind aber, da $A A'$ eine Ebene ist:

$$+ 2 \pi \sigma \text{ und } - 2 \pi \sigma$$

so dass man für f_1 und f_2 die folgenden Relationen hat:

$$f_1 = \frac{m a}{r^3} - 2 \pi \sigma; \quad f_2 = \frac{m a}{r^3} + 2 \pi \sigma$$

und ausserdem besteht die bekannte Gleichung:

$$f_2 = f_1 \frac{K_1}{K_2}.$$

Man entnimmt daraus unmittelbar

$$\frac{m a}{r^3} + 2 \pi \sigma = \frac{K_1}{K_2} \left(\frac{m a}{r^3} - 2 \pi \sigma \right)$$

$$2 \pi \sigma \left(1 + \frac{K_1}{K_2} \right) = \frac{m a}{r^3} \left(\frac{K_1}{K_2} - 1 \right)$$

und setzt man hier den Werth für σ ein: $\sigma = \frac{m' a}{2 \pi r^3}$ so ergibt sich:

$$m' = m \cdot \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} = m \cdot \alpha, \text{ wenn } \alpha = \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2} \text{ ist.}$$

Für $K_1 = K_2$ wird $m' = 0$ wie selbstverständlich, und für $K_2 = \infty$ wird $m' = -m$ das ist eben der Fall eines leitenden Mediums hinter $A A'$.

Wir wollen nun der Einfachheit wegen annehmen dass der untersuchte Punkt P' im zweiten Medium ebenso weit hinter $A A'$ liege wie P vor demselben; das Potential V in P' setzt sich dann zusammen aus dem Potentiale V_0 welches m in P' bei Abwesenheit jeglicher Polarisation erzeugen würde und aus dem Potentiale v welches unter gleichen Umständen von der scheinbaren Ladung auf $A A'$ ausginge. Der Werth von V_0 ist

$$V_0 = \frac{m}{2 a}.$$

Der Werth von v lässt sich gleichfalls leicht bestimmen. Denken wir uns auf $A A'$ vom Punkte O aus zwei Kreise mit den Radien ρ und $\rho + d \rho$ gezogen so schliessen dieselben eine Fläche $2 \pi \rho d \rho$ und eine Elektricitätsmenge $2 \pi \rho d \rho \cdot \sigma$ ein; das Potential $d v$ welches diese in P' erzeugt ist:

$$d v = \frac{2 \pi \rho d \rho \sigma}{r} = \frac{m' a \rho d \rho}{r^4}.$$

Nun ist aber $\rho\, d\rho = r\, dr$ und man kann schreiben:

$$dv = m' a \frac{dr}{r^3} = m \cdot a \cdot \alpha \cdot \frac{dr}{r^3}$$

das gibt weiter

$$v = m \cdot a \cdot \alpha \int_a^\infty \frac{dr}{r^3} = \frac{m\, \alpha}{2\, a}.$$

Man hat somit für das Potential V im Punkte P':

$$V = V_0 + v = \frac{m}{2\, a} + \frac{m\, \alpha}{2\, a} = \frac{m}{2\, a}(1 + \alpha) = V_0 (1 + \alpha)$$

oder

$$V = V_0 \left(1 + \frac{K_1 - K_2}{K_1 + K_2}\right) = V_0 \left(\frac{2 K_1}{K_1 + K_2}\right).$$

Ist $K_1 = K_2$ so wird natürlich $V = V_0$; wird $K_2 = \infty$ so wird $V = 0$.

Diese Formel ist auch einer experimentellen Prüfung leicht zugänglich. Es wurde in ein weites Glasgefäss Petroleum ($K_2 = 2{\cdot}1$) gegossen und in mehreren Centimetern Tiefe die horizontale Spitze einer Quecksilber-Tropfelektrode angebracht die leitend mit einem calibrirten Elektroskope zur Messung der Potentiale verbunden war. In gleicher Höhe über der Oberfläche befand sich eine constant geladene kleine Messingkugel in Luft ($K_1 = 1$).

Es wurden nun die Potentiale V und V_0 bei Anwesenheit und Abwesenheit des Petroleums gemessen, und für den Quotienten $\frac{V}{V_0}$ in fünf Versuchen die Werthe erhalten: 0·71, 0·62, 0·64, 0·66, 0·58 oder im Mittel: 0·64.

Dagegen berechnet sich dieses Verhältniss nach obiger Formel und $K_1 = 1$, $K_2 = 2{\cdot}1$ zu 0·63.

Auch für einen festen Isolator wurde die Formel geprüft indem eine verticale Quecksilber-Tropfelektrode in den möglichst reducirten Zwischenraum zwischen zwei Paraffinklötze mit ebener Vorderfläche gebracht wurde. Vor letzterer befand sich wieder die geladene Kugel. Zwei Messungen ergaben für $\frac{V}{V_0}$ die Werthe: 0·67, 0·64, im Mittel 0·655. Die Dielektricitätsconstante des Paraffins schwankt zwischen den Grenzen 1·99 und 2·30. Nehmen wir für dieselbe den Werth 2·1 so liefert die Rechnung für obiges Verhältniss wieder 0·63 was mit der Beobachtung in genügender Uebereinstimmung steht.

Bei Anwendung fester Dielektrica muss man sich natürlich davon überzeugen dass dieselben nicht etwa an ihrer Oberfläche, durch Reibung, elektrisch sind, und wenn dies der Fall ist, sie durch Bestreichen mit einer Flamme unelektrisch machen.

Noch ein anderer sehr wichtiger Specialfall der Induction in Dielektricis soll hier erwähnt werden, nämlich der einer isolirten Kugel in einem elektrischen Feld; ist letzteres homogen d. h. verlaufen alle Kraftlinien parallel so ist das Problem vollständig lösbar und wir wollen im Folgenden wenigstens die Resultate der Rechnung mittheilen die, an und für sich ohne Interesse, ziemlich langwierig ist. Es ist also ein homogenes elektrisches Feld von der Intensität F vorausgesetzt und ein Raum mit der Dielektricitätsconstante K_1 in welchem eine Kugel mit der Constante K_2 sich befindet.

Als Pole dieser Kugel bezeichnen wir die Punkte wo die Kraftrichtung die Kugeloberfläche senkrecht trifft.

Es ist klar dass die centrale Kraftlinie ohne Richtungsänderung durch die Kugel hindurch gehen wird, alle anderen dagegen werden eine Brechung erleiden. Ist $K_2 > K_1$ so verdichten sich die Kraftlinien vor der Kugel um hinter derselben wieder symmetrisch auseinander zu gehen. Im Innern verlaufen alle der ursprünglichen Kraftrichtung parallel d. h. das Feld bleibt im Innern der Kugel ein homogenes aber seine Intensität wird verändert.

Bezeichnen wir mit f_1 und f_2 die Kräfte an einem Pol unmittelbar ausserhalb und innerhalb der Kugel so muss die Relation bestehen: $f_1 : f_2 = K_2 : K_1$. Die Rechnung liefert für dieselben die folgenden Werthe:

$$f_1 = F \frac{3 K_2}{K_2 + 2 K_1} \qquad f_2 = F \cdot \frac{3 K_1}{K_2 + 2 K_1}.$$

Wir $K_1 = K_2$ so wird natürlich $f_1 = f_2 = F$; wird $K_2 = \infty$ d. h. befindet sich eine leitende Kugel im Feld so wird $f_1 = 3 \cdot F$ und $f_2 = 0$, welche Beziehungen sich in Fig. 42 im Verlauf der Niveauflächen ausgedrückt finden.

Für die scheinbare Dichte σ an den Polen erhält man:

$$\sigma = \frac{1}{4\pi}(f_1 - f_2) = \frac{3F}{4\pi}\left(\frac{K_2 - K_1}{K_2 + 2 K_1}\right).$$

Hat man es hier wieder mit einer leitenden Kugel zu thun so wird $K_2 = \infty$ und $\sigma = \frac{3F}{4\pi}$; ist das homogene Feld z. B. durch zwei ebene Condensatorplatten erzeugt so herrscht an diesen die

Dichte $\mu = \frac{F}{4\pi}$ und man sieht dass die Dichte σ an den Polen einer in dieses Feld gebrachten leitenden Kugel die dreifache ist wie die an den Platten. Befindet sich die dielektrische Kugel in einem absolut leeren Raume so wird $K_1 = 1$ und

$$\sigma = \frac{3F}{4\pi}\left(\frac{K_2 - 1}{K_2 + 2}\right).$$

Die Poldichten σ_∞ einer leitenden und σ_K einer dielektrischen Kugel stehen unter diesen Umständen in der folgenden Relation:

$$\frac{\sigma_K}{\sigma_\infty} = \frac{K-1}{K+2}$$

wenn K die Dielektricitätsconstante der isolirenden Kugel bedeutet, und die Rechnung zeigt dass in demselben Verhältniss auch die Kräfte stehen mit denen die beiden Kugeln, wenn sie gleich gross sind, von einer elektrischen Masse angezogen werden.

Dabei ist jedoch vorausgesetzt dass diese Masse sich weit von den Kugeln entfernt befindet, weil sonst die Voraussetzung des homogenen Feldes nicht mehr genügend erfüllt ist; ist das Feld jedoch absolut homogen so werden diese Kräfte, wie leicht einzusehen ist, einzeln gleich Null.

Der Ausdruck $\frac{K-1}{K+2}$ hat noch eine specielle, physikalisch besonders wichtige Bedeutung. Nach der Mosotti-Faraday'schen Hypothese über die Constitution der Dielektrica hängt die Grösse K, wie schon erwähnt wurde, auf das Engste mit der Raumerfüllung durch leitende Substanz zusammen und man kann, wenn man über die Anordung der letzteren gewisse einfache Voraussetzungen macht, diesen Zusammenhang noch näher formuliren. Setzt man voraus, dass die leitenden Partikeln kugelförmig sind, gleichmässig im isolirenden Raume vertheilt und so klein gegen ihre Distanzen dass sie wechselseitig die Vertheilung ihrer Ladungen nicht mehr merklich stören, so ergibt die Rechnung für die Grösse v des in der Volumeinheit der Substanz von leitender Materie thatsächlich eingenommenen Raumes die einfache Beziehung:

$$v = \frac{K-1}{K+2}.$$

Für den leeren Raum ist $K = 1$ und $v = 0$; für einen absoluten Leiter wäre $K = \infty$ und somit $v = 1$.

Zwischen diesen beiden Grenzwerthen muss v bei allen Substanzen liegen, und wir werden aus dieser Grösse wichtige Schlüsse in Bezug auf die Constitution der Körper ziehen können.

Die vorstehende Formel steht nicht mit unserer Voraussetzung in Widerspruch, dass in der Gleichung $K = 1 + 4\pi\varepsilon$ die Elektrisirungszahl ε eine gegen die Einheit sehr grosse Zahl ist, denn in letzterer Gleichung ist K die absolute Dielektricitätsconstante während alle vorhergegangenen, sowie die für verschiedene Substanzen in § 46 mit Zahlen angeführten nur relative, auf diejenige des leeren Raumes als Einheit bezogen, sind.

Bezeichnen wir die absoluten Constanten des leeren Raumes und eines beliebigen Mediums mit K'_0 und K', die relativen mit K_0 und K, so ist also $K_0 = 1$ und $K = \frac{K'}{K'_0}$.

Führen wir ferner in die Formel für die Raumerfüllung v diese absoluten Constanten ein so lautet dieselbe

$$v = \frac{K' - K'_0}{K' + 2K'_0}$$

und man sieht dass v für den leeren Raum Null wird während doch die absoluten Dielektricitätsconstanten K' und K'_0 beliebig hohe Werthe haben können; da $K' = 1 + 4\pi\varepsilon$ und $K'_0 = 1 + 4\pi\varepsilon_0$ ist, wo ε und ε_0 die respectiven Elektrisirungszahlen sind, so können auch letztere sehr grosse Zahlen sein.

§ 54. Zusammenhang zwischen elektrischen und optischen Grössen.

Aus seinen Ansichten über das elektrische und magnetische Verhalten der Körper hat Maxwell auch eine Formel für die Geschwindigkeit abgeleitet mit welcher sich eine elektrische, respective magnetische Störung in einem isotropen Medium allseitig ausbreitet. Er ist dabei von der Ansicht ausgegangen dass möglicherweise alle Erscheinungen die wir als optische zu bezeichnen pflegen sich auf die Ausbreitung solcher elektrischer oder magnetischer Störungen zurückführen lassen, und dementsprechend wurden diese auch als periodisch wechselnde vorausgesetzt, da es wohl nicht zweifelhaft sein kann dass das Licht durch irgend einen Vorgang mit oscillatorischem Charakter erzeugt wird. Als Träger der Bewegung wird, wie bei allen Theorien des Lichtes, zunächst der Aether angesehen. Die Formel für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit c lautet:

$$c = \frac{v}{\sqrt{4\pi\varepsilon(1 + 4\pi\vartheta)}}.$$

Hier bedeutet ε die Elektrisirungszahl und ϑ die Magnetisirungszahl des betreffenden Mediums welch letztere in Bezug auf magnetische Kräfte genau dieselbe Bedeutung hat wie ε für elektrische; das Medium ist also sowohl als elektrisirbar wie als magnetisirbar vorausgesetzt. Die Grösse v hat folgende Bedeutung: wie wir noch ausführlicher sehen werden haben wir zwei Maasssysteme zur Verfügung nach welchen wir Elektricitätsmengen messen können, das elektrostatische und das elektromagnetische. Die Einheit des ersten leitet sich aus der statischen Fernwirkung, die des zweiten aus der elektromagnetischen einer fliessenden Elektricitätsmenge ab. Die Einheiten der beiden Maasssysteme stehen offenbar in einem bestimmten und constanten Verhältnisse zu einander und eben dieses Verhältniss ist die Grösse v; sie bedeutet das Verhältniss der Einheit der elektrostatischen zu derjenigen des elektromagnetischen Maasssystems.

Kehren wir nun zu unserer Formel für die Geschwindigkeit zurück; da ε gegen 1 gross ist so können wir auch schreiben:

$$c = \frac{v}{\sqrt{(1+4\pi\varepsilon)(1+4\pi\vartheta)}} = \frac{v}{\sqrt{K \cdot \Theta}}$$

wenn K und Θ Dielektricitätsconstante und Magnetisirungsconstante bedeuten. Beschränken wir uns auf Medien ohne ausgesprochene Magnetisirbarkeit so können wir $\Theta = 1$ setzen, und es folgt dann aus der Formel unmittelbar dass die Geschwindigkeit c im leeren Raume ($K = 1$) gleich v, in einem Leiter ($K = \infty$) aber gleich Null wird. Das letztere wäre der Ausdruck der Thatsache dass in allen vollkommenen Leitern (Metallen) das Licht schon auf sehr kurzen Strecken ganz absorbirt wird; man müsste also schliessen dass im Allgemeinen die Durchsichtigkeit und das Leitungsvermögen der Körper im umgekehrten Verhältnisse zu einander stehen, eine Relation die sich wohl im Grossen und Ganzen bestätigt findet.

Für den leeren Raum liefert die Formel $c = v$ und diese Relation hat durch die Thatsache, dass der experimentell bestimmte Werth von v vollkommen mit der Lichtgeschwindigkeit stimmt, eine hohe Bedeutung gewonnen. Nach Methoden die später noch erwähnt werden, wurde $v = 3 \cdot 10^8 \cdot \frac{\text{Meter}}{\text{Secunde}}$ gefunden und das ist eben auch der Werth der Geschwindigkeit des Lichtes; beide Grössen sind gegenwärtig noch nicht genau bestimmt, aber über die Gleichheit ihrer Grössenordnung kann nicht der geringste Zweifel sein.

Um eine Vergleichung der beiden Zahlen zu ermöglichen, mögen hier die betreffenden Messungsresultate der einzelnen Autoren, mit Hinweglassung der älteren jedenfalls unsicheren Bestimmungen, folgen.

Autor	v
Ayrton und Perry	$2{\cdot}94 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
J. J. Thomson	2·96 „
King	2·89 „
Shida	2·96 „
Exner	2·92 „
Klemenčič	3·02 „
Himstedt	3·00 „

Autor	Lichtgeschwindigkeit
Aus Aberration	$3{\cdot}08 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$
Foucault	2·98 „
Cornu	3·0 „

Aber noch in einer anderen Hinsicht ist die Maxwell'sche Formel für c von grosser Bedeutung; haben wir zwei Medien mit den Constanten K_1 Θ_1 und K_2 Θ_2 so ist die Geschwindigkeit in denselben

$$c_1 = \frac{v}{\sqrt{K_1 \Theta_1}} \text{ und } c_2 = \frac{v}{\sqrt{K_2 \Theta_2}}.$$

Das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten wird somit

$$\frac{c_1}{c_2} = \sqrt{\frac{K_2 \Theta_2}{K_1 \Theta_1}} = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

wenn wir wieder von in merklichem Maasse verschieden magnetisirbaren Medien absehen. Das Verhältniss $\frac{c_1}{c_2}$ ist aber nichts anderes als der relative Brechungsexponent n der beiden Substanzen also

$$\frac{c_1}{c_2} = n = \sqrt{\frac{K_2}{K_1}}$$

und wenn wir mit n_0 den Brechungsexponenten eines Körpers (K) bezogen auf den leeren Raum bezeichnen, so haben wir, da dann $K_1 = 1$ wird:

$$n_0 = \sqrt{K} \text{ oder } K = n_0^2$$

d. h. der Brechungsexponent eines Körpers und die Wurzel aus seiner Dielektricitätsconstante, beides bezogen auf den leeren Raum, müssten identische Zahlen sein. Bei dieser Relation fällt zunächst in die Augen dass wir gewohnt sind die Dielektricitätsconstante als eine Constante,

den Brechungsexponenten dagegen als eine Function der Wellenlänge respective Schwingungsdauer, und ausserdem als abhängig von der Temperatur zu betrachten. In Bezug auf letzteren Punkt kann es wohl kaum einem Zweifel unterliegen dass auch K von der Temperatur abhängt, und zwar in analoger Weise wie n, das geht schon aus der Relation zwischen K und der Raumerfüllung, die eine Function der Temperatur ist hervor; doch liegen bisher experimentelle Daten über diesen Punkt nicht vor.

Was dagegen die Abhängigkeit des K von λ (Wellenlänge) betrifft so wäre darüber Folgendes zu bemerken. Für einen idealen Isolator muss K allerdings unabhängig sein von der Zeit durch welche hindurch die elektrischen Kräfte auf ihn wirken; wie wir aber bereits ausgeführt haben liegt dieser ideale Zustand nur in den seltensten Fällen vor, fast bei allen Substanzen zeigt sich wenigstens eine Spur von Leitungsfähigkeit, in Folge dessen die Dielektricitätsconstante mit der Versuchsdauer wächst. Diese dielektrische Nachwirkung entfällt von den bisher untersuchten Substanzen nur bei den Gasen und bei Schwefel, also bei den besten Isolatoren. Wenn wir nun mit Maxwell die Lichtschwingungen als periodische Elektrisirungen des Mediums auffassen, so müssen wir annehmen dass die elektrischen Kräfte, der grossen Schwingungszahl des Lichtes entsprechend, immer nur sehr kurze Zeit auf dasselbe wirken, am kürzesten bei violettem, am längsten bei rothem Licht; und wenn wir den Brechungsexponenten mit der experimentell bestimmten Dielektricitätsconstanten in eine Relation setzen wollen so haben wir offenbar jenen Brechungsexponenten zu nehmen der einer möglichst langsamen Schwingung also möglichst grossen Wellenlänge entspricht, weil wir dadurch jenen Bedingungen unter welchen wir das K bestimmen noch am nächsten kommen.

Es folgt aus dieser Betrachtungsweise auch, dass für einen idealen Isolator die Dispersion ganz verschwinden müsste, und dass dieselbe im Allgemeinen um so grösser wird je weniger vollkommen die Substanz isolirt.

Das n_0 in der Formel $n_0 = \sqrt{K}$ haben wir also auf möglichst grosse Wellenlängen zu beziehen; wenn wir n_0 als Function von λ nach der Cauchy'schen Reihe darstellen so ist

$$n_0 = A + \frac{B}{\lambda^2} + \frac{C}{\lambda^4} + \dots$$

wo A, B, C ... Constante bedeuten, und wir erhalten für $\lambda = \infty$ $n_0 = A$. Wir haben also eigentlich die Constante $A = n_\infty$ der Wurzel

aus der Dielektricitätsconstanten gleichzusetzen; nun ist diese Constante nicht direct bestimmbar sondern muss aus obiger Formel durch Messung einiger Spectrallinien entnommen werden die naturgemäss in Bezug auf die Gesammtausdehnung des Spectrums ziemlich nahe aneinander liegen. Schon aus diesem Grunde ist der Werth von n_∞ sehr unsicher und eine exacte Uebereinstimmung zwischen Theorie und Experiment nicht zu erwarten; am grössten werden wir dieselbe noch bei den Gasen und den besten der starren Isolatoren finden.

Es folgt nun eine Zusammenstellung der sichersten der bisher bekannten Werthe von K und n_∞.

1. Feste Körper.

Substanz	K	n_∞^2
Schwefel	3·84	4·06
Paraffin	2·32	2·33
Colophonium	2·55	2·38
Kautschuk (rein)	2·34	2·25
Flintglas (dicht)	3·168	2·789
„ (leicht)	2·993	2·402
Crownglas (hart)	3·097	2·250

2. Flüssigkeiten.

Substanz	K	n_∞^2
Petroleumgeist	1·92	1·922
Petroleum	2·10	2·078
Terpentin	2·23	2·128
Terpentinöl	2·22	2·132
Ricinusöl	4·78	2·153
Spermacetöl	3·02	2·135
Olivenöl	3·16	2·131
Klauenöl	3·07	2·125
	$\sqrt{K}$	n_{roth}
Benzol	1·514	1·503
Toluol	1·495	1·486
Xylol	1·506	1·484
Metaxylol	1·542	1·494
Pseudocumol	1·559	1·480
Cumol	1·572	1·479

3. Gase.

Substanz	K	n^2_∞
Wasserstoff	1·000264 . .	1·000276
Luft	1·000586 . .	1·000588
Kohlenoxyd	1·000694 . .	1·000680
Grubengas	1·000952 . .	1·000886
Kohlensäure	1·000984 . .	1·000898
Stickoxydul	1·001158 . .	1·001006
Aethylen	1·001458 . .	1·001356
Schwefelkohlenstoff . .	1·00290 . .	1·002956
Aethyläther	1·00744 . .	1·003074
Schweflige Säure . .	1·00954 . .	1·001330
Bromäthyl	1·01546 . .	1·002436
Chloräthyl	1·01552 . .	1·002348

Diese Zahlen beziehen sich auf einen Druck von 760 mm und 0° Temperatur; die Zahlen für feste und flüssige Körper beziehen sich auf Zimmertemperatur.

Dass für anisotrope Körper die Dielektricitätsconstante nach verschiedenen Richtungen einen verschiedenen Werth hat wurde bereits erwähnt; auch hier zeigt sich wenigstens eine qualitative Uebereinstimmung mit dem Gang des Brechungsexponenten so weit bisher Messungen vorliegen; Boltzmann fand für einen Schwefelkrystall in Richtung der grossen (a) mittleren (b) und kleinen (c) Axe die folgenden Werthe:

	a	b	c
K . . .	4·773 . . .	3·970 . . .	3·811
n^2_∞ . . .	4·596 . . .	3·886 . . .	3·591

Im Grossen und Ganzen zeigen die vorstehenden Zahlen eine merkwürdige Uebereinstimmung zwischen den äusserlich so ganz verschiedenen Erscheinungen der Elektricität und des Lichtes; diese Uebereinstimmung hat auch viel dazu beigetragen dass die Maxwell'sche Vorstellung von der elektrischen Natur des Lichtes immer mehr Anhänger fand. Man muss sich jedoch bei derartigen Analogien stets die Frage vorhalten ob die Gleichheit der beiden Erscheinungen sich auf ihre Natur selbst erstreckt oder nur auf die Gesetze nach welchen sie vor sich gehen, und da wird man oft die Wahrnehmung machen dass ihrer Natur nach ganz differente Processe doch nach denselben Gesetzen verlaufen. Ein gleicher Fall scheint hier vorzu-

liegen: Die Theorie der Dielektrica liefert für die Raumerfüllung v den Ausdruck

$$v = \frac{K - 1}{K + 2}$$

und zu einem gleichen Ausdruck gelangt man wenn man den Einfluss der Körpermoleküle auf die rein mechanisch gedachte Aetherbewegung des Lichtes untersucht. Lorenz [1]) hat dies unter der Voraussetzung gethan dass die Körpertheilchen Kugeln, und klein gegen ihre Abstände sind und kommt zu dem Resultate

$$v = \frac{n_\infty^2 - 1}{n_\infty^2 + 2} = \frac{A^2 - 1}{A^2 + 2}$$

wo n_∞ den Brechungsexponenten des Körpers für unendlich lange Wellen und A die Cauchy'sche Constante bedeutet.

Die beiden Formeln liefern unmittelbar

$$K = n_\infty^2$$

und diese Beziehung folgt somit nicht so sehr aus der Identität der Natur elektrischer und optischer Vorgänge als vielmehr aus der Gleichartigkeit der Abhängigkeit dieser beiden von der Constitution der Körper; damit ist aber selbstverständlich die Möglichkeit nicht ausgeschlossen dass beide Phänomene auch ihrer Natur nach identisch sind.

Es wurde wiederholt der Versuch gemacht durch gleichzeitige Superposition elektrischer und optischer Bewegungen zu untersuchen ob eine wechselseitige Beeinflussung derselben stattfindet etwa wie in dem berühmten Experimente von Fizeau über die Lichtgeschwindigkeit in fliessendem Wasser. Róiti [2]) untersuchte durch eine sehr empfindliche Interferenzmethode ob die Geschwindigkeit eines Lichtstrahles der eine mit Zinksulfatlösung gefüllte Röhre passirte, sich änderte wenn gleichzeitig ein galvanischer Strom die Röhre in gleicher oder entgegengesetzter Richtung durchfloss; das Resultat des Versuches war aber ein negatives, es konnte keinerlei Aenderung constatirt werden, und aus der Anordnung des Experimentes folgte, dass eine Aenderung der Geschwindigkeit um 200 m in der Secunde hätte bemerkt werden müssen.

Das Vorstehende bezieht sich auf eine leitende Substanz (Zinksulfat): aber auch für ein Dielektricum (Glas) in einem ebenen Condensator wurde von Wilberforce [3]) der Nachweis geliefert dass

---

[1]) Wied. Ann. Bd. 11.

[2]) Pogg. Ann. Bd. 150 (1873).

[3]) Cambr. Ph. Soc. XIV (1887).

der beim Laden auftretende Verschiebungsstrom die Geschwindigkeit eines in gleicher oder entgegengesetzter Richtung gehenden Lichtstrahles um nichts Merkliches, jedenfalls aber um weniger als 41 m in der Secunde verändert.

§ 55. Physikalische Constitution der Dielektrica.

Die Beziehung zwischen der Raumerfüllung v und der Dielektricitätsconstante K respective dem Brechungsexponenten n_∞ eines Körpers, welche sich in der Gleichung

$$v = \frac{K-1}{K+2} = \frac{n_\infty^2 - 1}{n_\infty^2 + 2}$$

ausspricht, gibt uns das Mittel an die Hand wichtige Schlüsse in Bezug auf den molekularen Bau der Körper zu ziehen, insolange wir natürlich diese als unseren Voraussetzungen entsprechend ansehen können; diese Voraussetzungen bestehen darin dass die Moleküle kugelförmig, leitend und gleichmässig im Raume vertheilt sind, dass letzterer vollkommen isolire und dass die Distanz der Moleküle von einander gross gegen ihren Durchmesser sei. In Bezug auf Gase können wir diese Bedingungen als genügend erfüllt voraussetzen, für diese können wir auch unbedenklich n_∞^2 statt K einführen durch welchen Umstand die Methode auf eine grosse Anzahl von Körpern anwendbar wird.

Inwieweit eine Uebertragung derselben auf flüssige und feste Isolatoren statthaft ist wird aus dem Folgenden ersichtlich werden.

Wir wollen die Constante v zunächst zur Bestimmung der Grösse der (kugelförmig vorausgesetzten) Moleküle benützen.

In seiner epochemachenden Arbeit „Zur Grösse der Luftmoleküle" hat Loschmidt [1]) eine mit v identische Grösse zum ersten Male dazu benutzt, um aus ihr einen Schluss auf die Dimensionen der Moleküle zu ziehen; er hat ihr den Namen „Condensations-Coëfficient" gegeben und bestimmte sie aus dem Volumen, welches die Gase im tropfbar flüssigen Zustande zeigen, gegenüber dem im gasförmigen Zustande ihnen zukommenden. Eine derartige Bestimmung liefert freilich für v nur einen oberen Grenzwerth, da ja auch in flüssigem Zustande der Raum keineswegs vollständig von Materie erfüllt ist, doch war dieser Umstand für die damalige erste und grundlegende Bestimmung der Grössenordnung des Moleküles nicht von Belang.

---

[1]) Wiener Akad. Bd. LII (1865).

Im Vorstehenden ist nun der Weg gezeigt, die Grösse v direct auf elektrischem oder optischem Wege an jeder Substanz im gasförmigen Zustande zu bestimmen; es ist also nicht nöthig, dazu Messungen am verflüssigten Gase zu machen, auch erhält man für v nicht einen Grenzwerth, sondern dessen wirklichen Werth, insolange die kleinsten Partikelchen als Kugeln angesehen werden können.

Die Relation, welche die Grösse v mit dem Moleküldurchmesser verbindet und welche auch von Loschmidt in seiner oben erwähnten Arbeit zur Auswerthung des letzteren verwendet wurde, findet ihren Ausdruck in der folgenden von der Gastheorie gelieferten Gleichung:

$$\sigma = 6\sqrt{2} \cdot v \cdot \lambda.$$

Hier bedeutet σ den Moleküldurchmesser, v den obigen Coëfficienten und λ die mittlere Weglänge. Leider sind die Werthe von λ in vielen Fällen gegenwärtig noch nicht mit der wünschenswerthen Genauigkeit bestimmt, jedenfalls dürften die aus den Diffusionsversuchen abgeleiteten mehr Vertrauen verdienen, als die den Reibungs- und Transspirationsversuchen entstammenden, welch letztere durchwegs zu gross bestimmt zu sein scheinen.

Es sind daher im Folgenden auch der Berechnung von σ, wo es möglich ist, die aus den Diffusionsversuchen stammenden Werthe von λ zu Grunde gelegt.

In der folgenden Tabelle findet sich eine kurze Zusammenstellung der Werthe von v für einige Gase, und zwar unter A die aus der Dichtigkeit im gasförmigen und flüssigen Zustande berechneten Condensations-Coëfficienten und unter B dieselben Grössen nach der Formel

$$v = \frac{K-1}{K+2} \text{ oder } v = \frac{n^2-1}{n^2+2}.$$

Die Werthe unter A sind von O. E. Meyer[1]) berechnet.

	A	B
H_2O . .	0·00081 . .	0·00017
NH_3 . .	0·00119 . .	0·00026
H_2S . .	0·00168 . .	0·00043
CO_2 . .	0·00198 . .	0·00031
N_2O . .	0·00204 . .	0·00033
Cl_2 . .	0·00238 . .	0·00051
C_2N_2 . .	0·00270 . .	0·00056

[1]) Theorie der Gase.

Man sieht aus dieser Tabelle, dass die Condensations-Coëfficienten, auf die übliche Weise bestimmt, um das 4—5fache zu gross sein können, und in demselben Maasse werden dann auch die Dimensionen der Moleküle zu gross gefunden.

Das Folgende ist eine Zusammenstellung der bisher gemessenen gasförmigen Substanzen; wo Bestimmungen von K vorlagen wurden diese zur Berechnung von v benutzt sonst die Brechungsexponenten.

Die zur Ausmittlung des Moleküldurchmessers σ nöthigen Werthe der mittleren Weglängen wurden so weit als möglich Diffusionsversuchen, sonst Reibungsversuchen entnommen.

Substanz	v	σ in Cent.
Luft	$17 \cdot 10^{-5}$	$10 \cdot 10^{-9}$
H_2O	17 „	9 „
NH_3	26 „	16 „
SH_2	43 „	22 „
CO_2	31 „	13 „
N_2O	33 „	12 „
C_2N_2	56 „	19 „
SO_2	44 „	17 „
Cl_2	51 „	19 „
N_2	20 „	17 „
H_2	8·7 „	10 „
CO	23 „	13 „
CH_4	31 „	21 „
C_2H_4	44 „	21 „
NO	20 „	16 „
O_2	18 „	16 „
HCl	30 „	18 „

Nach den vorstehenden Zahlen kann die Grössenordnung der Molekulardurchmesser nicht mehr zweifelhaft sein; zu bemerken ist der verhältnissmässig geringe Unterschied in der absoluten Grösse bei den verschiedensten Substanzen.

Aus den für die Raumerfüllung v in Gasen mitgetheilten Zahlen lassen sich auch die entsprechenden Verhältnisszahlen für die einzelnen Atome der Constituenten ableiten. Um die Zahlen möglichst zu vervollständigen, wollen wir noch die Grösse v für Schwefel-, Phosphor- und Quecksilberdampf, nach den Brechungsexponentenbestimmungen von Le Roux [1]) anführen. Es ergibt sich

[1]) Ann. d. ch. et ph. (3) LXI.

Substanz	n	$r = \frac{n^2 - 1}{n^2 + 2}$
S_4	1·00163	0·00108
P_4	1·00136	0·00091
Hg	1·00056	0·00037

Zieht man diese Substanzen bei, so erhält man für die relative Raumerfüllung φ durch die Atome folgende Zahlen:

Substanz	φ
H	4·4
N	10
O	9
Cl	25
S	27
P	23
Hg	37
C (aus CO — O)	14

Als Controle für die Zulässigkeit der hier durchgeführten Rechnungen kann man nun die Werthe von v für die früher aufgezählten Gase aus den vorstehenden Zahlen für die Constituenten berechnen und kommt so, wie die folgende Tabelle zeigt, zu einer guten Uebereinstimmung mit den direct beobachteten Werthen.

Substanz	v · beobachtet	v · berechnet
Luft	0·00017	0·00019
CO_2	31	32
N_2O	33	34
CH_4	31	32
C_2H_4	44	45
NH_3	26	23
H_2O	17	18
NO	20	19
H_2S	43	36
HCl	30	29
C_2N_2	56	48
SO_2	44	45

Bedeutende Differenzen ergeben sich nur bei H_2S und C_2N_2; ob dieselben auf Beobachtungsfehler bei Bestimmung der Brechungsexponenten zurückzuführen sind, oder ob sie der Wirklichkeit ent-

sprechen, muss dahingestellt bleiben. Wäre letzteres der Fall, so wird man vielleicht im Laufe der Zeit gerade aus solchen Differenzen am ersten einen Schluss auf die Constitution der betreffenden Moleküle ziehen können.

Aus der nach der Loschmidt'schen Methode berechneten Grösse der Moleküle hat O. E. Meyer[1]) die Molekularvolumina *w* für eine Reihe anderer Gase berechnet, die so erhaltenen Zahlen sind in der folgenden Tabelle mit der beobachteten Grösse *v* zusammengestellt.

Nach dem Gesetze Avogadro's sind letztere Zahlen den Molekularvolumen proportional.

Substanz	$v \cdot 10^{-5}$	w
Luft	17	23
CO_2	31	35
H_2	8·7	7
CO	23	25
N_2O	33	35
CH_4	31	28
C_2H_4	44	42
NH_3	26	22·5
H_2O	17	18
N_2	20	24
NO	20	23
O_2	18	21
H_2S	43	33
HCl	30	26·3
C_2N_2	56	56
SO_2	44	48
Cl_2	51	45·6

Die Uebereinstimmung der beiden Reihen muss im Ganzen als um so befriedigender bezeichnet werden, als die Werthe von *v*, jeder für sich ganz unabhängig von den übrigen das Resultat einer Beobachtung ist; auch hier zeigt sich bei H_2S wieder die grösste Differenz, so dass der Gedanke naheliegt, dass der Brechungsexponent desselben mit einem Fehler behaftet ist.

Wir wenden uns nun zu einer anderen Folgerung, die man aus unserer Formel ziehen kann.

---

[1]) Theorie der Gase S. 220.

Es ist auffallend, dass die Dielektricitätsconstanten isolirender Körper, und damit auch deren Brechungsexponenten zwischen verhältnissmässig engen Grenzen eingeschlossen sind. Die untere Grenze bildet die Einheit und Werthe über 2 für Brechungsexponenten oder über 4 für Dielektricitätsconstanten gehören schon zu den Seltenheiten; dann aber erfolgt plötzlich ein Sprung, die Dielektricitätsconstante wird unendlich gross und der Brechungsexponent nimmt unbestimmbare Werthe an, wir stehen an der Grenze zwischen Isolatoren und Leitern. Wenn wir an dem Zusammenhange zwischen Raumerfüllung und Dielektricitätsconstante festhalten, so gibt es eine physikalische Deutung für diesen plötzlichen Sprung, die im Folgenden näher erörtert werden soll.

Die erwähnte Relation hat nur Giltigkeit, so lange man die kleinen leitenden Partikelchen als von einander isolirt und als kugelförmig betrachten darf; diese Bedingung ist aber wahrscheinlich nur in den seltensten Fällen, wenn überhaupt je erfüllt. Es fragt sich nur, wie weit eine Abweichung von der Kugelform für die vorstehenden Betrachtungen von Belang sein kann. Da wir über die Form der kleinsten Theilchen gar nichts wissen, so hat eine speciellere Erörterung dieser Frage vorläufig noch kein Interesse, doch lässt sich nach den Inductionserscheinungen im Allgemeinen voraussagen, dass der Einfluss der Form kein wesentlicher sein wird, so lange dieselbe nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweicht. Hätte man es also z. B. mit Würfeln, Octaedern, Tetraedern u. dgl. zu thun, so würde der Einfluss vielleicht noch kaum oder gar nicht bemerkar sein; anders aber, wenn in der Grundform eine Dimension besonders vorherrscht, wie z. B. bei nadelförmigen Prismen u. dgl. Hier müsste der Fehler ein sehr bedeutender sein, denn die Grösse der Induction richtet sich nach der grössten Dimension des Körperchens und ein solches Prisma in die Richtung der Kraftlinien gebracht, würde fast so wirken wie eine Vollkugel, deren Durchmesser gleich der Längsausdehnung des Prisma ist.

Die aus unserer Formel berechnete Grösse v würde dann viel zu gross gefunden und man kann allgemein sagen, dass die berechnete Raumerfüllung immer eine obere Grenze ist.

Was nun den Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren, respective den plötzlichen Sprung der Dielektricitätsconstante ins Unendliche anlangt, so wäre darüber Folgendes zu bemerken: Wir gelangen nach dem Vorgange Faraday's und Mosotti's zu einer ganz befriedigenden Erklärung des Verhaltens der Isolatoren, wenn wir an-

nehmen, dass deren kleinste Theilchen so gut aus leitender Materie bestehen, wie die der Metalle, dass dieselben aber durch den leeren Raum von einander isolirt seien und wenn wir weiter annehmen, dass dieselben angenähert die Kugelgestalt haben und dass sie angenähert gleichmässig im Raume vertheilt sind. Denken wir uns aber nun die letztere Bedingung nicht erfüllt, denken wir uns z. B. die Moleküle kettenförmig aneinandergereiht, durch grössere oder geringere Strecken, oder zu einem Raumgitter vereinigt, so muss eine solche Anordnung der Materie in elektrischer Beziehung wesentlich anders wirken. Die Induction durch einen derartig von einem Gitter occupirten Raum hindurch geht nahezu ebenso vor sich, als wäre der Raum vollständig mit leitender Substanz erfüllt, d. h. die Dielektricitätsconstante desselben wird unendlich gross. Eine derartige Anordnung der Materie würde also das dielektrische Verhalten der Leiter erklären. Das Kriterium des Metalles wäre demnach nicht an die Substanz des Atoms, auch nicht an den Charakter des Moleküls gebunden, sondern an den Charakter der Molekülverkettung zur sichtbaren Materie. Diese Ansicht kann selbstverständlich nicht darauf Anspruch machen, als der wirkliche Ausdruck der Thatsachen zu gelten, sie scheint aber eine Möglichkeit zu bieten, über diesen schwierigen Punkt hinwegzukommen.

Wenn wir bei gasförmigen Medien, also bei den besten Isolatoren stehen bleiben, so werden wir unsere Formel für die Raumerfüllung v insolange richtig anwenden können, als die Formen der kleinsten Theilchen nicht zu sehr von der Kugelgestalt abweichen. Aus der Grösse v ergibt sich aber eine sehr wichtige, bisher nicht beachtete Constante, nämlich das wahre specifische Gewicht der Substanzen, denn v drückt denjenigen Bruchtheil eines Kubikcentimeters aus, der von der Materie des Gases wirklich occupirt ist, also das thatsächliche Volumen desselben, durch dessen Division in die Dichte oder in das gewöhnliche specifische Gewicht wir eben das wahre specifische Gewicht erhalten.

In der folgenden Tabelle sind die betreffenden Werthe für die untersuchten Gase zusammengestellt; die specifischen Gewichte der Gase sind in Grammen pro Kubikcentimeter angegeben, und die wahren specifischen Gewichte auf $H_2O = 1$ bezogen, drücken also gleichfalls in Grammen das Gewicht der Substanz pro Kubikcentimeter aus.

Substanz		Gewicht in Gramm pro 1 cm^3 = 10^{-6} mal	$r = 10^{-8}$ mal	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$
A	H_2	8·9	8·7	1·02
B	CH_4	72	31	2·32
	C_2H_4	126	44	2·86
	NH_3	76	26	2·92
	SH_2	152	43	3·54
	OH_2	80	17	4·71
	ClH	162	30	5·40
C	Luft	129	17	7·58
	CO	125	23	5·44
	CO_2	197	31	6·36
	NO	134	20	6·70
	N_2O	196	33	6·00
	Cl_2	319	51	6·26
	S_4	575	108	5·32
	P_4	561	91	6·16
	N_2	126	20	6·30
	O_2	142	18	7·89
	C_2N_2	233	56	4·16
	SO_2	290	44	6·59
D	Hg	900	37	24·32

In dieser Tabelle gibt die letzte Columne die wahren specifischen Gewichte der untersuchten Substanzen an; dieselben zerfallen augenscheinlich in vier Gruppen, deren erste (*A*) durch den Wasserstoff gebildet wird. Dieser hat von allen Körpern das geringste wahre specifische Gewicht; es wiegt ein Kubikcentimeter, ganz mit Wasserstoffsubstanz erfüllt, fast genau 1 g, also so viel wie das gleiche scheinbare Volumen Wassers.

Die zweite Gruppe (*B*) enthält die Verbindungen des Wasserstoffes und man bemerkt, dass letzterer sein geringes specifisches Gewicht in dieselben überträgt, denn ihre Dichte ist um so geringer, je beträchtlicher ihr Gehalt an Wasserstoff ist. Die dritte Gruppe (*C*) wird gebildet durch C, S_4, P_4, Cl_2, N_2, O_2 und deren Verbindungen mit einander; sie zeigt eine auffallende Constanz der specifischen Gewichte, die um den ungefähren Mittelwerth = 6 schwanken.

Die vierte Gruppe (*D*) endlich enthält nur Quecksilber mit dem hohen Werthe 24·32; da das gewöhnliche specifische Gewichte desselben gleich 13·6 ist, so geht daraus hervor, dass das scheinbare Volumen des Quecksilbers unter gewöhnlichen Umständen schon etwas

mehr als bis zur Hälfte von Materie occupirt ist, was eine viel dichtere Raumerfüllung bedeutet als bei anderen Substanzen beobachtet werden kann, wo dieselbe meist zwischen den Werthen $^1/_8 — ^1/_3$ bei festen Körpern und zwischen $^1/_{11} — ^1/_6$ bei Flüssigkeiten schwankt. Es wäre wohl denkbar, dass die besonderen physikalischen Eigenschaften des flüssigen Quecksilbers zum Theil wenigstens in dieser dichten Raumerfüllung ihren Grund hätten. Es erscheint sehr wünschenswerth, auch von den übrigen Grundstoffen die wahren specifischen Gewichte zu kennen, was sich durch eine Bestimmung der Brechungsexponenten und Dichte ihrer Dämpfe erzielen liesse.

Aus den vorstehend mitgetheilten wahren specifischen Gewichten kann man dieselben für die einzelnen Constituenten entnehmen, und zwar für H_2, S_4, P_4, Cl_2, N_2, O_2 und Hg direct und für *C* aus einer der Verbindungen, z. B. aus CO. In der folgenden Tabelle sind diese Werthe mit den Zahlen φ, welche die relativen Volumina der Atome angeben, zusammengestellt.

Substanz	φ	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$
H	4·4	1·02
(aus CO) C	14	3·84
(aus Diamant) C	—	5·58
S	27	5·32
P	23	6·16
Cl	25	6·26
N	10	6·30
O	9	7·89
Hg	37	24·32

Es ist nicht ohne Interesse, die wahren specifischen Gewichte der Substanzen, wie sie sich aus dem Vorangegangenen ergeben, mit den Dichten der verflüssigten Gase zu vergleichen, weil sich daraus ein Maassstab für die Raumerfüllung in letzteren ergibt; ich stelle die Zahlen, so weit solche vorliegen, in der folgenden Tabelle zusammen.

Substanz	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$	Spec. Gewicht in flüssigem Zustande
H_2	1·02	0·6—0·88 [1])
O_2	7·89	0·9 [2])
Cl_2	6·26	1·33 [3])
H_2O	4·71	1·00

[1]) Graham, aus Verdichtung im Palladium.

[2]) Pictet und Cailletet.

[3]) Faraday.

Substanz	Wahres spec. Gewicht $H_2O = 1$	Spec. Gewicht in flüssigem Zustande
SO_2 . . .	6·59 . . .	1·36 [2])
C_2N_2 . . .	4·16 . . .	0·87 [1])
N_2O . . .	6·00 . . .	0·87 [2])
CO_2 . . .	6·36 . . .	0·86 [2])
Fest „	— . . .	1·94 [3])
HCl . . .	5·40 . . .	0·85 [4])
NH_3 . . .	2·92 . . .	0·62 [2])
C_2H_4 . . .	2·86 . . .	0·36 [5])
H_2S . . .	3·54 . . .	0·91 [5])

Man ersieht aus dieser Zusammenstellung, dass bei den verflüssigten Gasen stets noch ein beträchtlicher Theil des scheinbaren Volumens, drei Viertel bis acht Neuntel desselben, von Materie frei ist; selbst die feste Kohlensäure füllt in gepresstem Zustande nur ein Drittel des von ihr eingenommenen Raumes wirklich aus. Die relativ grösste Verdichtung zeigt, nach den allerdings sehr schwankenden Angaben Graham's, der Wasserstoff im Zustande der Occlusion im Palladium; die angegebenen Werthe als richtig vorausgesetzt, würde derselbe den occupirten Raum bis zu zwei Drittel wirklich erfüllen.

Wir haben im Vorhergehenden die wahren specifischen Gewichte der Körper aus den physikalischen Eigenschaften der gasförmigen Verbindungen derselben abgeleitet, wir können dasselbe auch in Bezug auf die verflüssigten Gase thun, insoweit uns deren Dichten und Brechungsexponenten bekannt sind und aus den Zahlen die wir erhalten wird sich durch Vergleich mit den aus dem gasförmigen Zustande abgeleiteten zeigen, dass unsere Betrachtungsweise sich auch noch auf flüssige Isolatoren ohne zu grosse Fehler anwenden lässt. Aus den Brechungsexponenten der flüssigen Gase finden wir auf bekannte Weise die Raumerfüllung v und aus dieser und der Dichte das wahre specifische Gewicht. In der folgenden Tabelle sind die betreffenden Werthe zusammengestellt, wobei die Brechungsexponenten der verflüssigten Gase einer Arbeit von Bleekrode [6]) entnommen sind.

---

[1]) Faraday.
[2]) Andreef.
[3]) Landolt.
[4]) Ansdell.
[5]) Bleekrode.
[6]) J. de Ph. (2) vol. IV März 1885.

Substanz	Dichte	n	Wahres spec. Gewicht Gas	Wahres spec. Gewicht Flüssigkeit
SO_2	1·359	1·351	6·59	6·54
C_2N_2	0·866	1·327	4·16	4·27
N_2O	0·870	1·204	6·00	6·66
CO_2	0·863	1·196	6·36	6·89
HCl	0·854	1·257	5·40	5·26
Cl_2	1·330	1·367	6·26	5·92
NH_3	0·616	1·325	2·92	3·06
C_2H_4	0·361	1·180	2·86	3·11
H_2S	0·910	1·390	3·54	3·82
H_2O	1·000	1·329	4·71	4·90

Es zeigt sich im Allgemeinen eine gute Uebereinstimmung zwischen den Werthen, die aus dem gasförmigen und jenen, die aus dem flüssigen Zustande abgeleitet wurden, in den meisten Fällen sind letztere etwas grösser, d. h. es ist die Raumerfüllung im Molekül im flüssigen Zustande eine etwas vollständigere. Uebrigens können die Zahlen auf grosse Genauigkeit nicht Anspruch machen, da die Brechungsexponenten der verschiedenen Flüssigkeiten nicht alle für dieselbe Lichtart angegeben sind, keiner aber für Strahlen von sehr grosser Wellenlänge, wie es eigentlich die Berechnung erfordern würde; umsomehr wird man zugeben müssen, dass die Voraussetzungen, unter denen die Zahlen abgeleitet wurden, nicht allzu hypothetischer Natur sind.

Da man, wie eben angedeutet wurde, auch aus den physikalischen Constanten der Flüssigkeiten deren wahres specifisches Gewicht bestimmen kann, so ist es naheliegend, dies wenigstens für einige besonders bemerkenswerthe Repräsentanten der Kohlenwasserstoffe zu thun, für welche ja durchwegs die Grössen n und d genau ermittelt sind; man kann die so an den Flüssigkeiten erhaltenen Werthe dann mit jenen vergleichen, die nach der Constitutionsformel aus dem Atomvolumen und dem wahren specifischen Gewichte der Constituenten berechnet werden. Als Beispiel mögen hier die beiden ausgezeichneten Isolatoren Benzol und Terpentinöl dienen.

		Benzol		Terpentinöl
	Formel	C_6H_6	Formel	$C_{10}H_{16}$
	n	1·490	n	1·466
	d	0·885	d	0·887
W. sp. G.	aus n, d	3·1	W. sp. G. aus n, d	3·2
W. sp. G.	aus Formel	3·2	W. sp. G. aus Formel	3·0

Es scheint also bei diesen Körpern die Raumerfüllung im Moleküle keine wesentlich günstigere oder ungünstigere zu sein als bei den Constituenten.

Ein besonderes Interesse dürfte vielleicht die Untersuchung isomerer Reihen bieten, weil man hier erwarten darf, durch Unterschiede im wahren specifischen Gewichte auf das Vorhandensein von Unterschieden in der Raumerfüllung, d. h. auf eine verschiedene Anordnung im Molekül geführt zu werden. Ich theile im Folgenden als Beispiel eine solche Reihe mit.

Substanz	Formel	n[1])	d[1])	Wahres spec. Gewicht berechnet aus Formel	aus n, d
Aceton . . .	$C_3 H_6 O$	1·357	0·792	3·36	3·65
Allylalkohol . .	„	1·410	0·854	3·36	3·45
Propylaldehyd .	„	1·361	0·807	3·36	3·63
Amylformiat . .	$C_6 H_{12} O_2$	1·396	0·880	3·36	3·62
Iso-Capronsäure .	„	1·412	0·924	3·36	3·69
Methylvalerat .	„	1·393	0·879	3·36	3·67

Man ersieht aus diesen Zahlen, dass bei vorstehenden Körpern die Raumerfüllung durchwegs eine bessere ist als in den Constituenten, denn das beobachtete wahre specifische Gewicht ist grösser als das berechnete; ersteres ist auffallend gleich bei fünf Substanzen der Reihe, nur Allylalkohol zeigt einen beträchtlich niedrigeren Werth, woraus man schliessen kann, dass die räumliche Anordnung der Masse im Molekül bei ihm mehr von der Kugelform abweicht als bei den übrigen, wenngleich noch immer weniger als bei den Constituenten.

Inwieweit man unsere Darstellungsweise auch auf schlechtere Isolatoren im festen und flüssigen Zustande übertragen darf, lässt sich im vorhinein durchaus nicht bestimmen, doch ist bei unserer vollständigen Ungewissheit über die wahren specifischen Gewichte jeder Werth, wenn er auch mit beträchtlichen Fehlern behaftet wäre, von Interesse; man kann nun, von den an gasförmigen Substanzen gewonnenen Werthen ausgehend, durch passende Auswahl chemischer Verbindungen, deren Dichten und Brechungsexponenten bekannt sind unter Berücksichtigung der Molekulargewichte die wahren specifischen Gewichte noch für eine Reihe von Grundstoffen wenigstens angenähert bestimmen, und es finden sich dieselben, nebst den direct bestimmten, in der folgenden Tabelle.

---

[1]) Nach Landolt's Tabellen.

Substanz	Wahres spec. Gewicht	bestimmt aus	Zur Berechnung als richtig angenommen das w. sp. Gew. von
H	1·02	Gas	—
C	1·05	CS_2	S
C	3·51	CCl_4	Cl
C	3·78	CH_3J	H, J
C	3·84	CO	O
C	4·61	$CHCl_3$	H, Cl
C	5·15	$C_2H_4Br_2$	H, Br
C	5·58	fest	—
P	3·45	„	—
P	3·52	flüssig	—
P	3·91	PCl_3	Cl
P	6·16	Gas	—
P	6·3	„	—
S	3·67	S_2Cl_2	Cl
S	5·32	Gas	—
S	7·8	„	—
S	8·2	SO_3	O
Cl	6·26	Gas	—
N	6·30	„	—
O	7·89	„	—
J	8·0	„	—
J	8·1	JK	K
Br	9·0	flüssig	—
Si	5·9	$SiCl_4$	Cl
Se	6·09	fest	—
K	9·0	BrK	Br
K	9·5	JK	J
Na	8·9	NaCl	Cl
Na	10·0	$NaCl + H_2O$	Cl, H, O
B	8·0	$Na_2B_4O_7$	B, O
As	7·37	$AsCl_3$	Cl
Sb	9·13	$SbCl_5$	Cl
Sn	10·7	$SnCl_4$	Cl
Zn	9·5	$ZnCl_2 + H_2O$	Cl, H, O
Cu	9·5	Cu_2O	O
Ag	13·7	AgBr	Br
Ag	14·7	AgCl	Cl
Ag	16·3	AgJ	J
Hg	24·3	Gas	—

Die Zahlen dieser Tabelle zeigen dass für manche Substanzen sehr verschiedene Werthe je nach der Verbindung aus welcher berechnet werden, ergeben; so namentlich bei Kohlenstoff und es de dies im Sinne unserer Darstellungsweise aussagen dass die küle der untersuchten Kohlenstoffverbindungen in sehr verschie-

tener Weise an der [illegible] anwenden. Bei anderen Grundstoffen findet sich dieser Unterschied nicht oder doch im weitern nicht in dem Maasse; so zeigt z. B. Jod denselben Werth in direct als Gas gemessener oder aus der Verbindung JH berechneter. Desgleichen liegen die Werthe für NaCl im festen oder gelösten Zustande sehr nahe aneinander, so dass dieses Molekül durch die Lösung keine wesentliche Formveränderung zu erleiden scheint. Auffallend ist beim Phosphor der doppelt so grosse Werth im gasförmigen wie im festen oder flüssigen Zustande.

Was [illegible] [illegible] zur Bestimmung des wahren specifischen Gewichtes anlangt, so hat uns Maxwell einen solchen durch die Berechnung des von der Materie eines Gases wirklich occupirten Raumes aus dem Molekulardurchmesser und der Anzahl der Moleküle in der Volumeinheit gemacht. Letztere ergibt sich aus dem Querschnitte eines Moleküls und aus der Querschnittssumme, für welche Grössen die kinetische Gastheorie einen Ausdruck liefert. Auf diesem Wege wurde das wahre specifische Gewicht für Luft ungefähr = 7 gefunden (H_2O = 1), was mit unserem Werthe 7·55 in genügender Übereinstimmung steht.

Da Maxwell's Methode die Kenntniss der Molekulargrösse voraussetzt, so ist dieselbe nur auf gasförmige Medien anwendbar; auch basiren ihre Resultate auf einer genauen Bestimmung der mittleren Weglänge. Wir wenden uns nun zu einer dritten Folgerung aus unserer Formel für die Raumerfüllung.

Die Grösse v, die durch den Ausdruck $\frac{K-1}{K+2}$ oder $\frac{n^2-1}{n^2+2}$ charakterisirt ist, drückt das Verhältniss des von einer bestimmten Menge eines Körpers wirklich occupirten Raumes zu deren scheinbaren Volumen aus. Wird der Körper comprimirt, z. B. bis seine Dichte d den doppelten Werth erreicht hat, so ist klar, dass auch die Raumerfüllung v auf das Doppelte gestiegen ist; beide Grössen gehen einander proportional, aus welcher Ursache auch immer eine derartige Compression oder Dilatation resultire. Es folgt somit die Gleichung

$$\frac{K-1}{K+2}\cdot\frac{1}{d} = \frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = \text{Constante.}$$

Was eine solche Relation zwischen den Brechungsexponenten und der Dichte anlangt, so ist bekannt, dass dieselben schon seit Newton's Zeiten gesucht, aber nicht in befriedigender Weise gefunden wurde.

Newton selbst setzt (vom Standpunkte der Emanationstheorie ausgehend) $\frac{n^2-1}{d}$ = Constante und nennt diese Grösse das specifische

Brechungsvermögen der betreffenden Substanz. Es hat sich der Ausdruck in dieser Form sehr lange erhalten, weil er für Gase durch die Untersuchungen von Biot und Arago[1]) sowie von Dulong[2]) experimentell vollkommen bestätigt wurde. Doch lässt sich leicht zeigen, dass der Newton'sche Ausdruck in seiner Anwendung auf Gase nur ein specieller Fall der vorstehenden allgemeinen Formel ist. Für Gase ist nämlich der Brechungsexponent stets eine nur wenig von der Einheit abweichende Grösse, für n^2+2 kann man daher für alle Gase mit grosser Annäherung die Zahl 3 setzen. Die allgemeine Formel übergeht somit in $\frac{1}{3}\frac{n^2-1}{d} =$ Constante oder $\frac{n^2-1}{d} =$ Constante wie bei Newton.

Versucht man die Formel Newton's auch auf flüssige oder feste Körper anzuwenden, so stösst man sofort auf Widersprüche mit den Thatsachen; man hat daher versucht, auf empirischem Wege andere Relationen zwischen n und d aufzustellen, welche der Bedingung der Constanz genügen sollen. So wurde die Formel $\frac{n-1}{d} =$ Constante als eine rein empirische eingeführt und an einem sehr umfangreichen Beobachtungsmateriale auch angenähert bestätigt gefunden. Für Gase trifft diese Bestätigung selbstverständlich am schärfsten zu, da wegen der geringen Abweichung der n von der Einheit die Grössen $n-1$ und n^2-1 einander proportional sind.

In neuerer Zeit haben zahlreiche Untersuchungen über diesen Gegenstand ein sehr umfangreiches Beobachtungsmateriale zu Tage gefördert und es hat sich durchwegs die Formel $\frac{n^2-1}{n^2+2}\cdot\frac{1}{d} = C$ als die beste herausgestellt; namentlich ist dies auch von Lorenz mit Rücksicht auf das Wasser bei Temperaturen unter 4°, wo man bisher eine Anomalie zu finden glaubte, durchgeführt worden.

Aber ganz abgesehen von der besseren Uebereinstimmung dieser Formel mit den Thatsachen, ist es überhaupt höchst wünschenswerth, derartige Untersuchungen nicht nach empirischen Formeln durchzuführen, sondern womöglich nach solchen denen eine bestimmte physikalische Bedeutung zukommt; nur auf diese Weise wird es möglich sein, in der Erkenntniss der Constitution der Materie einen Schritt vorwärts zu thun.

[1]) Mem. d. Inst. vol. VII (1807).
[2]) Ann. d. Ch. et d. Ph. vol. XXXI.

II. THEIL.

Galvanismus.

Einleitung.

Alle Erscheinungen die wir bisher betrachtet haben, beziehen sich auf die Wirkungen relativ ruhender elektrischer Massen: ein ganz neues Gebiet eröffnet sich wenn man von diesen zur strömenden Elektricität übergeht: Erscheinungen treten auf welche ihrem äusseren Anscheine nach mit den bisher untersuchten nicht das Geringste gemein haben, und die in früheren Zeiten auch deshalb zu dem leicht begreiflichen Irrthum geführt haben dass man es im galvanischen Strome mit einem ganz anderen Agens zu thun habe als jenes ist, welches die elektrostatischen Phänomene hervorruft. Die Frucht zahlloser Untersuchungen ist es, dass wir heutigen Tages diesen Irrthum erkennen und wissen dass das Agens in beiden Erscheinungsformen dasselbe ist, dass der Unterschied nur durch den relativen Bewegungszustand gegen die Materie erzeugt wird. Wir wissen dass die Elektricitätsmenge mit welcher ein Conductor statisch geladen ist, sobald wir ihn entladen, in der Entladungsbahn einen, wenn auch kurz andauernden elektrischen Strom bildet, der alle Eigenschaften deren ein galvanischer Strom überhaupt fähig ist, besitzt und in Folge dessen von einem solchen in keinerlei Weise unterschieden werden kann.

Das Gebiet der Erscheinungen welche die strömende Elektricität bietet ist ein ungeheuer grosses, und wir werden nur einen kleinen Theil desselben zu berühren Gelegenheit haben; nichtsdestoweniger zeigt sich auch auf diesem ein grosser Unterschied in den Erscheinungen je nach der Art der Bewegung die die elektrischen Massen befolgen. Wir können das ganze Gebiet passend in zwei Theile zerlegen, deren einer jene Phänomene umfasst die von Elektricität in

nicht stationärer Strömung hervorgebracht werden, während der zweite sich ausschliesslich mit den Phänomenen der stationären Strömung beschäftigt. Dabei verstehen wir unter stationärer Strömung eine solche bei welcher an jedem Punkte des Raumes das Potential im Laufe der Zeit constant bleibt, oder, wenn wir mit t die Zeit bezeichnen, für welche die Gleichung gilt:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Diese zweite Art der Strömung ist in ihren Gesetzen und Erscheinungen bei weitem besser studirt und gekannt als die erste, namentlich auch deshalb weil sich auf dieselbe, eben wegen der Constanz des V mit der Zeit, in vielen Fällen unmittelbar die Gesetze der Elektrostatik anwenden lassen; die Erscheinungen der inconstanten Strömung sind zwar auch nach allen Richtungen experimentell erforscht, allein die positiven Resultate dieser Forschung sind verhältnissmässig geringe, was mit den bei schnell verlaufenden Processen in der Natur der Sache liegenden Schwierigkeiten des Experimentes zusammenhängt.

Wir wollen im Folgenden zunächst die Erscheinungen der inconstanten Ströme, wenigstens in ihren Hauptzügen, betrachten.

XV. Capitel.

Nicht stationäre elektrische Strömung.

§ 56. Zerstreuung der Elektricität in Gasen.

Es ist bekannt dass kein statisch geladener Conductor seine Ladung eine unbegrenzt lange Zeit hindurch zu erhalten vermag, wir sehen vielmehr ausnahmslos dass Ladung und Potential continuirlich sinken, in den meisten Fällen freilich sehr langsam aber immer mindestens im Laufe von Stunden bemerkbar.

Die nächstliegende Erklärung dieser Erscheinung wird man wohl in der Mangelhaftigkeit der Isolation suchen und in den meisten Fällen wohl auch mit Recht; da es nicht möglich ist den Conductor wirklich allseitig mit den besten Isolatoren, nämlich Gasen, zu umgeben so muss er wenigstens an einigen Punkten mit minder vollkommenen Dielektricis wie Schellack u. dgl. in Berührung stehen, und diese wirken auf seine Ladung in zweierlei Weise ein. Einmal direct durch Leitung, denn auch die besten der festen Isolatoren be-

kommen, wenn sie lange der Luft ausgesetzt sind, eine theilweise leitende Oberfläche, und dann durch die sogenannte Absorption. Es dringt nämlich durch den im geringen Grade stets vorhandenen Process der inneren Leitung, den wir früher schon theoretisch betrachtet haben, allmälig eine gewisse Menge der Ladung in den festen (oder flüssigen) Isolator ein, verschwindet also am Conductor. Eine solche in das Innere eines Dielektricums eingedrungene Elektricitätsmenge haftet mit grosser Intensität an demselben und kann nur durch Umschmelzen desselben oder durch sehr langes ruhiges Stehen entfernt werden.

Aber diese beiden Gründe sind nicht die einzigen für die erwähnte Erscheinung; ein jeder geladene Conductor erleidet per Flächeneinheit einen Zug normal nach aussen dessen Grösse gleich $2\pi\mu^2$ ist und der direct auf die Elektricitätsmenge μ wirkt. Diese steht somit unter dem Einflusse einer elektromotorischen Kraft d. h. einer Kraft welche sie zu bewegen strebt, und es sei hier nochmals daran erinnert dass eine jede Potentialdifferenz im Raume auch eine solche elektromotorische Kraft im Sinne des abnehmenden Potentials zur Folge hat. Die Ladung des Conductors wird somit beständig gegen die umgebende Luft getrieben und es scheint dass der Widerstand welchen diese einer Bewegung der Ladung entgegenzusetzen vermag, kein unbegrenzt grosser ist denn es lässt sich nachweisen, dass das allmälige Verschwinden dieser Ladung zum grossen Theil auch durch Ausströmen in die Luft erfolgen muss.

Man kann den Nachweis dafür auf zweierlei Weise erbringen: erstens beobachtet man dass eine Verdoppelung der isolirenden festen Stützen, vorausgesetzt dass diese sehr sorgfältig construirt sind, keine wesentliche Verstärkung des Elektricitätsverlustes am Conductor bewirkt, dieser somit, wenigstens nicht ausschliesslich, durch die Stützen hervorgebracht sein kann; zweitens beweist den directen Uebergang in die Luft der folgende Versuch: stellt man dem Conductor einen zweiten ebenfalls geladenen gegenüber so beobachtet man einen grösseren Elektricitätsverlust wenn beide Conductoren die entgegengesetzte Ladung haben als wenn sie gleichnamig elektrisirt sind. Eine einfache Ueberlegung lehrt, dass wenn die Stützen die Hauptursache wären, gerade in letzterem Falle ein stärkerer Verlust hätte eintreten müssen, während für das Ausströmen in die Luft der erste Fall der günstigere ist.

In welcher Form aber dieses Ausströmen erfolgt das ist bis jetzt eine noch keineswegs klargestellte Sache, so viel ist jedoch

gewiss dass man es hier nicht mit einem der Leitung in Metallen analogen Process zu thun hat. Alle Erscheinungen sprechen dafür dass diese Zerstreuung hauptsächlich durch eine mechanische Convection erzeugt wird, wobei insbesondere wieder die in der Luft vorhandenen Staubtheilchen in hervorragender Weise betheiligt sind. Es zeigt sich wenigstens in durch Filtriren über Baumwolle u. dgl. gereinigter Luft eine entschieden kleinere Zerstreuung als unter gleichen Umständen in gewöhnlicher.

Aber auch den Molekülen des Gases selbst scheint dabei eine Rolle zuzufallen, denn die Zerstreuung ist in Gasen mit grösserer Weglänge auffallend grösser so z. B. der Reihe nach abnehmend in Wasserstoff, Luft, Kohlensäure.

Bei den ausserordentlichen Unregelmässigkeiten und Schwierigkeiten denen derartige Versuche ausgesetzt sind, konnte eine genauere Kenntniss der Gesetze bei diesen Vorgängen bisher nicht erhalten werden; man muss sich hier mit dem Verlaufe der Erscheinungen im Allgemeinen begnügen.

Das Vorstehende bezieht sich auf Gase bei gewöhnlicher Temperatur. Ist die geladene Conductoroberfläche merklich erwärmt so treten die berührten Erscheinungen noch lebhafter auf und ein glühender Conductor entladet sich in kürzester Zeit an die umgebende Luft.

Dabei tritt die auffallende Thatsache zu Tage dass diese Entladung immer schneller vor sich geht wenn der Conductor negativ geladen ist als im entgegengesetzten Falle, für welchen Unterschied man gegenwärtig wohl keine Erklärung hat, der aber offenbar mit den später noch zu erwähnenden sogenannten Artunterschieden der Elektricität identisch ist.

Man kann mit Hilfe eines glühenden Körpers in kurzer Zeit sehr bedeutende Elektricitätsmengen in die Luft entladen so z. B. wenn man einen dünnen Platindraht mit Hilfe einiger gut isolirter galvanischer Elemente zum Glühen bringt und mit dem einen Pole einer andererseits abgeleiteten Elektrisirmaschine verbindet. Dabei kann man die auffallende Bemerkung machen dass der Druck des umgebenden Gases nicht nachweisbar steigt wenn die Entladungen in einem geschlossenen Glasgefäss vor sich gehen, und man den Druck an einem sehr empfindlichen Membranmanometer mit Scala und Fernrohr abliest. Man muss daraus schliessen, dass von der ausgeströmten Ladung in jedem Momente nur ein sehr kleiner Theil an den Gasmolekülen selbst haftet und der weitaus grösste Theil sofort an die Gefässwände abgegeben wird.

Zum Entweichen der Ladung von einer Conductorfläche ist es nicht einmal nöthig dieselbe zu erhitzen, es genügt dazu schon eine Bestrahlung derselben durch eine intensive Lichtquelle, wobei man wieder bemerkt dass eine negative Ladung ungleich leichter entweicht als eine positive. Es tritt aber dabei die merkwürdige Thatsache hervor dass nicht die ultrarothen, die sogenannten Wärmestrahlen, die wirksamsten sind sondern im Gegentheile die ultravioletten, und dass man in Folge dessen durch Einschieben eines diese Strahlen absorbirenden Mediums wie z. B. Glas in den Gang derselben auch ihre Wirksamkeit vernichten kann. Durch Quarz dagegen geht die Wirkung fast ungeschwächt hindurch. Die Natur der Lichtquelle scheint dabei weiter keine Rolle zu spielen wenn letztere nur überhaupt ultraviolette Strahlen aussendet; mit einer elektrischen Bogenlampe z. B. lassen sich die Versuche sehr gut anstellen.

Man wird wohl nicht annehmen wollen dass man es hier mit der Umwandlung von Elektricität in eine andere Energieform zu thun hat und dass die Ladung des Conductors wirklich verschwindet; viel näher liegt die Annahme dass durch die Bestrahlung an der Oberfläche des Körpers eine Art Verdampfung der dort condensirten Gasschichten eintritt und in Folge dieser eine Abnahme der Ladung. Die Frage liesse sich vielleicht dadurch entscheiden dass man die Oberfläche des Conductors luftdicht mit einer isolirenden Substanz bedeckt die die Wirkung der Strahlen nicht aufhält, es würde dadurch die Verdampfung gehindert und das Entweichen der Ladung vermieden werden. Es spricht für die Richtigkeit dieser Ansicht auch der Umstand dass der Versuch nur gelingt wenn die Metalloberflächen vollkommen blank sind, andernfalls scheinen die Oxydschichten das Entweichen der Ladung zu hindern, obwohl bei ihrer sehr geringen Dicke eine wesentliche Absorption der ultravioletten Strahlen kaum zu erwarten ist.

§ 57. Funkenentladung der Elektricität.

Die Zerstreuung der Elektricität in Gasen bewirkt unter gewöhnlichen Umständen immer nur eine sehr allmälige Abnahme der Ladung, so dass sie bei den meisten elektrostatischen Versuchen ganz ausser Acht gelassen werden kann; sie ist auch von keinerlei äusserlich wahrnehmbaren Erscheinungen begleitet. Anders gestaltet sich die Sache wenn man die Ladung eines Conductors über eine gewisse Grenze hinaus zu steigern versucht; es wächst dabei der elektro-

statische Druck $2\pi\mu^2$ und wird schliesslich immer gross genug um das durch die Isolation der Umgebung einer Elektricitätsbewegung entgegenstehende Hinderniss zu überwinden und das Entweichen der Ladung zu veranlassen. Da, wie wir später sehen werden, ein Strömen der Elektricität immer eine Erwärmung der Strömungsbahn zur Folge hat, und zwar eine um so beträchtlichere je grösser ihr Widerstand ist, so tritt bei diesem plötzlichen Entweichen der Conductorladung ein Glühen des Isolators, z. B. der umgebenden Luft, ein, das wir mit dem Namen des elektrischen Funkens bezeichnen.

Die äussere Erscheinung dieses Funkens ist vollständig durch die Natur des umgebenden Isolators bedingt und ändert sich in besonders auffallender Weise mit der Dichte desselben.

Nähert man einem geladenen Conductor allmälig einen anderen zur Erde abgeleiteten, so steigt auf ersterem der Werth $2\pi\mu^2$ durch die Induction an jenen Punkten die dem angenäherten zugekehrt sind; bei einer bestimmten Distanz beider muss schliesslich der elektrostatische Druck hinreichen um die isolirende Zwischenschichte von der Conductorladung durchbrechen zu lassen, und diese Distanz bezeichnen wir als die Schlagweite; es ist leicht einzusehen dass dieselbe bei gegebener Ladung, oder auch bei gegebenen Potentialen, ganz von der geometrischen Gestalt der Conductoren abhängen muss, sowie dass unter übrigens gleichen Umständen die Natur des Dielektricums dieselbe wesentlich beeinflusst.

Es ist vielleicht nicht überflüssig hier zu bemerken dass bei der Annäherung eines auf constanter Ladung gehaltenen Conductors an einen zur Erde abgeleiteten, die Potentialdifferenz beider sinkt, der elektrostatische Druck $2\pi\mu^2$ aber trotzdem steigt; es lässt sich dies leicht aus den Veränderungen die bei der Annäherung im elektrischen Felde vor sich gehen, erklären.

Da die Flächendichte μ an jenen Punkten eines Conductors am grössten ist wo die Krümmung am stärksten, so werden auch im Allgemeinen die Entladungen von diesen Punkten ausgehen; für eine Spitze wird $\mu = \infty$ und es könnte sich an einer solchen, vorausgesetzt dass sie von idealer Schärfe ist, überhaupt keine Ladung erhalten. Es ist ja bekannt um wie viel leichter die Elektricität aus Spitzen ausströmt als aus abgerundeten Flächen, und dass man eben deshalb bei Construction elektrischer Apparate Spitzen und Kanten möglichst vermeidet.

Die Entladungen aus einer Spitze unterscheiden sich schon ihrem Ansehen nach von gewöhnlichen Funken wie solche aus ab-

gerundeten Conductoren gezogen werden; die Spitzenentladung geht für das Auge continuirlich vor sich, dafür aber mit einer bei weitem geringeren Intensität an Lichtentwicklung, so dass sie bei Tage nicht sichtbar wohl aber durch das zischende Geräusch, das sie verursacht, wahrnehmbar ist.

Man kann die räumliche Ausbreitung einer solchen Spitzenentladung auf folgende Weise gut studiren: man verbindet den einen Pol einer Elektrisirmaschine mit einer horizontalen Metallplatte von circa 20 cm Durchmesser die mit Lycopodiumsamen leicht bestreut wird; den anderen Pol leitet man zu einer feinen Spitze etwa zu einer Nähnadel die sich in einigen Centimetern über der Platte, mit der Spitze nach abwärts gerichtet, befindet.

Während die Entladungen zwischen Spitze und Platte stattfinden bemerkt man keinerlei Veränderung, versucht man aber nach Unterbrechung derselben den Lycopodiumsamen von der Platte durch leises Aufklopfen derselben oder durch Blasen zu entfernen, so bemerkt man dass ein scharf begrenzter runder Fleck darauf fest haftet, der eben dem Entladungskegel entspricht. Es scheint dass das Lycopodium dort wo es von der Entladung getroffen wird, sich elektrisirt und darum später noch an der Platte haftet. Bemerkenswerth ist dabei die ausserordentliche Schärfe mit welcher der Entladungskegel begrenzt ist; entfernt man die Spitze weiter von der Platte so erhält man successive immer grössere Kreise. Auch hier zeigt sich wieder ein scheinbarer Unterschied beider Elektricitätsarten, indem es für das gute Gelingen der Figuren nicht gleichgiltig ist welcher Pol der Maschine mit der Spitze in Verbindung steht.

Die Erscheinung der elektrischen Funken wie sie aus abgerundeten Conductoren bei zu starker Ladung entweichen, ist allgemein bekannt; erfolgt die Entladung bei gewöhnlichem Druck, so pflanzt sie sich in einer ungetheilten oder auch verästelten Bahn, wie sie uns der Blitz im grössten Maassstabe zeigt, fort.

Untersucht man das dabei auftretende Licht spectral, so überzeugt man sich bald dass dasselbe nicht etwa mit der Elektricität selbst in einem besonderen Zusammenhange steht; es zeigt vielmehr in jedem Falle das dem Conductormetalle entsprechende Spectrum, ein Beweis dass das was leuchtet, die durch die grosse Hitze des Funkens glühend gemachten Metalldämpfe sind. Man hat dementsprechend auch bisher in keinem Funkenspectrum Linien entdeckt die nicht als den betreffenden Metalldämpfen eigenthümlich schon bekannt gewesen wären, dagegen zeigt das Spectrum der Blitze und

das des Nordlichtes — offenbar auch einer Form elektrischer Entladung — allerdings gewisse Linien die anderweitig bisher noch nicht beobachtet werden konnten, und die sehr wahrscheinlicher Weise den atmosphärischen Gasen unter den speciellen Bedingungen eigenthümlich sind.

Die Zickzack-Form, sowie die häufig auftretende Verästelung der Funken hat ihren Grund aller Wahrscheinlichkeit nach darin, dass die Luft in Richtung der Funkenbahn durch die Erwärmung sehr bedeutende Dichtigkeitsänderungen erleidet und dass der Funke sich dann, den geänderten Leitungsverhältnissen entsprechend, eine neue Bahn sucht.

Betrachtet man das Bild eines kräftigen Funkens, wie ihn etwa eine Leydnerflasche liefert, in einem schnell rotirenden Spiegel, wodurch die zeitlich aufeinanderfolgenden Zustände desselben Ortes räumlich getrennt dargestellt werden, so findet man dass die Entladung nicht auf einmal vor sich geht sondern dass der Funke aus einer mehr oder minder grossen Anzahl sogenannter Partialfunken besteht, die in ausserordentlich geringer Zeitdistanz denselben Weg durchlaufen und darum für gewöhnlich den Eindruck eines einzelnen Funkens hervorbringen.

Man hat auch die Leuchtdauer des Funkens im Ganzen bestimmt, und dieselbe von mancherlei Umständen, wie Schlagweite, Natur des Dielektricums, Flaschenzahl der Leydnerbatterie u. s. w. abhängig gefunden; die Methoden nach welchen diese Bestimmungen vorgenommen wurden, basiren darauf dass im finstern Zimmer eine rasch rotirende, mit Theilstrichen versehene Scheibe durch den Funken beleuchtet wird und man die Winkelgrösse bestimmt um welche die Scheibe während der Beleuchtung sich dreht. Die folgenden, in einem speciellen Falle gefundenen Zahlen geben eine Vorstellung von der in Rede stehenden Grösse.

Zahl der Flaschen:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Dauer des Funkens:	7·5	11·8	16·0	19·3	21·5	23·8	25·8	27·5	28·6

Die Einheit der Zeit ist dabei ein Milliontel Secunde; die Schlagweite betrug 2·29 mm, der Funke sprang zwischen Kugeln aus Zink von 11 mm Durchmesser über. Dass hier die Dauer des Leuchtens mit der Flaschenzahl wächst, hat seinen Grund offenbar darin dass beim Uebergang einer grösseren Elektricitätsmenge die entwickelte Wärme und damit auch die Leuchtdauer der Gase eine grössere ist.

Die folgenden Zahlen geben ein Beispiel für die Abhängigkeit der Funkendauer von der Schlagweite bei constanter Flaschenzahl.

Schlagweite:	2	4	6	8	11	14	18	22	mm
Funkendauer:	8·9	15·8	21·8	25·0	29·4	32·4	33·5	35·6	10^{-6} Sec.

Die Funken sprangen zwischen Platinkugeln von 7 mm Durchmesser über. Auch hier ist die grössere Leuchtdauer der grösseren Wärmeentwicklung zuzuschreiben.

Es ist eine sehr bemerkenswerthe Erscheinung dass trotz der geringen Dauer des ganzen Funkens doch die einzelnen Partialentladungen als solche sichtbar werden, weil dies zeigt in wie kurzer Zeit das glühende Gas sich bis zur Dunkelheit abkühlt und wieder bis zur Gluth erwärmt. Allerdings treten, wie vorauszusehen, die Partialentladungen mit grösserer Deutlichkeit hervor, wenn man durch Einschaltung eines grossen Widerstandes, z. B. einer nassen Schnur, die Gesammtentladung verzögert.

In schlecht leitenden Flüssigkeiten, z. B. Oelen, ist die Schlagweite im Allgemeinen kleiner als in Luft und die Entladungen gehen explosionsartig vor sich, was mit der durch die hohe Temperatur des Funkens erzeugten Verdampfung der Flüssigkeit zusammenhängt. Lässt man den Funken zwischen zwei Spitzen oder Kugeln übergehen, von denen die eine sich in Luft und die andere sich unterhalb der Flüssigkeit befindet, doch so dass ihre Verbindungslinie die Flüssigkeitsoberfläche schief trifft, so schlägt der Funken nicht in gerader Linie über sondern erleidet eine Art Brechung; er geht in der Flüssigkeit normal zur Oberfläche, wenn diese schlechter leitet als Luft, und dafür in letzterer eine längere Strecke. Doch lassen derartige Versuche ein genaues Studium nicht zu, da die Funkenbahnen durch die kleinsten Inhomogenitäten der Medien alterirt werden. Interessant und von constanterer Erscheinung ist der Funkendurchgang durch krystallinische Substanzen. Setzt man z. B. die beiden Elektroden auf die beiden Seitenflächen einer Steinsalzplatte von 1—2 cm Dicke und zwar so dass ihre Verbindungslinie schief die Platte durchschneidet, so geht der Funke nicht in dieser Geraden sondern in einer im Allgemeinen zweimal geknickten Linie, von welcher je ein Stück in eine der drei auf einander rechtwinkligen ausgezeichneten Spaltungsebenen fällt; innerhalb einer jeden Spaltungsebene ist die Funkenbahn vollkommen gerade und durch eine trübe Linie in dem klaren Krystall leicht sichtbar.

Es scheint demnach der Widerstand eines Körpers gegen den Funken enge mit seinen Cohäsionsverhältnissen zusammenzuhängen.

Die Abhängigkeit der Schlagweite vom Potential des Conductors, von seiner Form, von der Natur des begrenzenden Dielektricums, von der Temperatur u. s. w. ist eine jedenfalls sehr complicirte; um einigermassen einen Einblick in den Process der Entladung zu

bekommen, wollen wir uns an einen möglichst einfachen, von W. Thomson experimentell genau studirten Fall halten. Thomson bestimmte für zwei Condensatorplatten aus Messing die Potentialdifferenzen die zum Ueberspringen eines Funkens, wenn sich Luft zwischen den Platten befand, bei verschiedenen Distanzen nothwendig waren. Ich gebe im Folgenden die betreffenden Zahlen, wobei die Distanzen δ in Millimetern, die Potentialdifferenzen V in einem willkürlichen Maasse gemessen sind.

δ	V	$\frac{V}{\delta}$	$R = 2\pi\mu^2$	$A = \frac{V^2}{8\pi\delta}$	
				beobachtet	berechnet
0·0254	1·353	53·3	112·9	2·86	2·86*
0·1016	2·740	27·0	29·0	2·95	3·09
0·2032	3·960	19·5	15·1	3·06	3·41
0·4064	6·149	15·1	9·1	3·69	4·03
0·7493	9·80	13·1	6·8	5·09	5·09*
1·0414	13·01	12·5	6·2	6·45	5·99
1·2192	14·70	12·1	5·8	7·13	6·54
1·3970	16·27	11·7	5·4	7·54	7·08
1·5240	17·68	11·6	5·35	8·15	7·47

Bei Durchsicht dieser Zahlen fällt zunächst auf dass das Verhältniss $\frac{V}{\delta}$ nicht constant ist sondern dass bei kleinen Schlagweiten eine verhältnissmässig viel grössere Potentialdifferenz zur Funkenerzeugung erforderlich ist als bei grossen; dasselbe gilt für den elektrostatischen Druck R, wie er im Momente der Entladung an der Conductoroberfläche herrscht. Man kann daraus den Schluss ziehen dass zum Zustandekommen so riesiger Schlagweiten wie beim Blitz, nicht so enorme Potentialdifferenzen erforderlich sind, wie man nach Analogie mit den Elektrisirmaschinen auf den ersten Blick anzunehmen geneigt wäre.

Warum die Schlagweite schneller wächst als die Potentialdifferenz das lässt sich mit einiger Wahrscheinlichkeit aus den letzten Spalten der vorstehenden Tabelle entnehmen; bei jedem Uebergang eines Funkens entladet sich der Condensator und dabei wird eine Arbeit A geleistet die nach der allgemeinen Formel gleich $\frac{1}{2} M V$ oder in unserem speciellen Falle per Flächeneinheit des Condensators gleich $\frac{V^2}{8\pi\delta}$ ist. Diese Arbeit erscheint vollständig in der Funken-

strecke, da wir den Widerstand der übrigen Leitung vernachlässigen können, und tritt hier allem Anscheine nach als Wärme auf. Würde jedoch diese Arbeit ganz auf der Funkenstrecke selbst geleistet so müsste sie auch der Schlagweite proportional sein, was aber auch nicht angenähert der Fall ist. Es scheint vielmehr dass diese Arbeit aus zwei Theilen besteht: aus einer constanten Arbeit die beim Uebergang der Elektricität aus dem Conductor in die Luft geleistet wird und aus einer zweiten, der Schlagweite proportionalen die in der Erwärmung der Funkenbahn besteht. Wir könnten dann, wenn a und b Constante bezeichnen, die folgende Gleichung ansetzen:

$$A = a + b \cdot z.$$

Die beobachteten und berechneten Werthe von A in der vorangegangenen Tabelle zeigen durch ihre wenigstens angenäherte Uebereinstimmung dass unsere Voraussetzung nicht zu weit von der Wirklichkeit abweicht. Zur Berechnung der Constanten a und b wurden die mit * bezeichneten Werthe als richtig angenommen. Die Constanten der Formel haben dann folgende Grössen:

$$a = 2{\cdot}782;\ b = 3{\cdot}08.$$

In welcher Weise die Arbeit a geleistet wird, ist ganz unbekannt: wahrscheinlich besteht sie in einer mechanischen Arbeit durch Zerstäubung des Metalles, oder in der Ueberwindung eines Uebergangswiderstandes der durch die oberflächlichen Oxyd- respective Gasschichten erzeugt wird. Die Constante b drückt die Arbeit des Funkens per Millimeter seiner Bahn aus, und die Zahlen zeigen dass im vorliegenden Falle die Arbeit beim Uebergang der Elektricität aus dem Metalle in die Luft nahezu ebenso gross war wie im Funken für 1 mm.

Ganz analoge Verhältnisse wie hier beim Funken treten beim Ueberströmen grosser Elektricitätsmengen zwischen Kohlenelektroden, beim elektrischen Bogenlicht, auf; auch hier wächst die Länge des Lichtbogens bedeutend schneller als die Potentialdifferenz der Elektroden, und es lässt sich der Vorgang in gleicher Weise durch eine lineare Gleichung darstellen.

Auch für den Uebergang des Funkens zwischen zwei Spitzen ist die Abhängigkeit der Schlagweite von der Potentialdifferenz bestimmt worden, und zwar mit Hilfe einer Batterie von 8000 galvanischen Elementen (Warren de la Rue's Chlorsilberbatterie). Es ergaben sich dabei die folgenden Zahlen:

Anzahl der Elemente	Schlagweite in Millimetern
1000	0·13
2000	0·51
3000	1·32
4000	2·79
5000	4·47
6000	6·22
7000	8·18
8000	10·16

Die elektromotorische Kraft eines Elementes war dabei 1·03 Volt, oder nahezu 1 Daniell. Von 3000 Elementen an wächst die Schlagweite proportional der Elementenzahl, doch ist der Fall nicht so wie der vorhergehende einer Berechnung fähig da die Dichte, und damit auch der elektrostatische Druck, an den Spitzen ganz von der unbekannten Form derselben abhängt.

§ 58. Elektricitätsbewegung in verdünnten Gasen.

Ganz abweichend von der Erscheinung des gewöhnlichen Funkens ist die Entladungsform in verdünnten Gasen; wiederholt man den schon früher beschriebenen Versuch des Ausströmens der Elektricität aus einer Spitze gegen eine mit Lycopodium bestreute Platte in verdünnter Luft, so bemerkt man eine wesentliche Vergrösserung des Ausströmungskegels. Diese räumliche Ausbreitung ist charakteristisch für alle Entladungen in verdünnten Gasen.

Am besten lassen sich die betreffenden Erscheinungen an den nach ihrem ersten Verfertiger so genannten Geissler'schen Röhren studiren; diese bestehen aus einer allseitig geschlossenen, bis auf einige Millimeter Quecksilberdruck evacuirten Glasröhre in deren Inneres zwei eingeschmolzene Drähte, meistens aus Platin, ragen. Verbindet man diese mit den Polen einer Elektrisirmaschine oder eines Inductionsapparates, so erfolgen im Innern der Röhre die bekannten Entladungen. Wenn man während des Versuches die Röhre mit der Luftpumpe in Verbindung lässt und den Druck allmälig vermindert so bemerkt man bald, z. B. mit Hilfe eines in die Leitung geschalteten Galvanometers, dass die in gewisser Zeit überströmende Elektricitätsmenge vom Drucke abhängig ist: sie steigt zuerst mit abnehmendem Druck um dann von einem gewissen Punkte an wieder abzunehmen, und bei bester Evacuirung auf Null zu sinken.

Die Drucke bei welchen der Elektricitätsübergang am leichtesten erfolgt, sind für verschiedene Gase verschieden, wie die folgenden Zahlen zeigen:

Gas	Druck in Millimetern	λ in Milliontel Millimetern	c in Metern
Wasserstoff	2·8	16·9	1844
Kohlenoxyd	1·6	—	—
Sauerstoff	0·6	9·6	461
Stickstoff	0·1	8·9	492
Kohlensäure	0·08	6·2	393

Die Zahlen scheinen mit der mittleren Weglänge λ der Moleküle, und der Molekulargeschwindigkeit *c* in Zusammenhang zu stehen, welche Werthe der Vergleichung halber oben beigesetzt sind: man kann daraus mit einiger Wahrscheinlichkeit schliessen dass die Elektricität durch einen Process mechanischer Convection von einer Elektrode zur anderen zugeführt wird. Von einer Leitung der Gase, etwa wie bei Metallen, kann aber nicht die Rede sein. schon deshalb nicht weil zum Uebergang immer eine sehr grosse Potentialdifferenz erforderlich ist. Es zeigt sich nämlich — durch Beleuchtung rotirender Speichenräder mittelst Geissler'scher Röhren — dass die Entladungen stets discontinuirlich sind. d. h. es wird durch jeden Funken der in die Röhre übergeht, der Elektricitätsquelle so viel entzogen dass ihre Potentialdifferenz unter das nothwendige Minimum sinkt und der Elektricitätsübergang aufhört. Erst durch weitere Ansammlung von Elektricität an den Polen der Maschine wird wieder die nöthige Potentialdifferenz erreicht, ein zweiter Funken springt über u. s. f.

Die Elektrodendistanz ist bei Geissler'schen Röhren ziemlich gleichgiltig d. h. es gehört keine wesentlich höhere Potentialdifferenz dazu um den Funken zwischen entfernten Elektroden überspringen zu lassen als zwischen benachbarten; es tritt hier wieder, nur in noch auffallenderer Weise der schon früher besprochene Umstand zu Tage dass die Schlagweite schneller wächst als die zugehörige Potentialdifferenz.

Die Funken in Geissler'schen Röhren sind stets von einem Leuchten des Gases begleitet, das, spectral untersucht, sowohl die für das Gas als auch die für die Elektrodensubstanz charakteristischen Linien zeigt: obwohl also einzelne Partikeln eine jedenfalls sehr hohe mperatur haben, ist doch die Durchschnittstemperatur der ganzen nasse eine auffallend niedrige und bleibt, wie specielle Messungen igt haben, in Röhren ohne capillare Verengerung unter 100° C.,

daher eine solche Röhre sich auch nach längerem Gebrauch nur mässig warm anfühlt.

Es spricht dieses Verhalten wieder dafür dass hier nur von einer Convection durch einzelne Partikeln nicht aber von einer metallischen Leitung der ganzen Masse die Rede sein kann.

Man kann in einem allseitig geschlossenen und stark evacuirten Glasrohr die Gasmasse auch ohne Elektroden zum Leuchten bringen, lediglich durch Induction, indem man der Röhre einen stark elektrisirten Körper plötzlich nähert; es scheint dieser, übrigens wenig studirte Vorgang von dem in Geissler'schen Röhren principiell verschieden zu sein, denn der Versuch gelingt auch bei den niedrigsten Drucken welche zu erreichen sind, bei denen im Rohr, aber zwischen Metallelektroden, überhaupt kein Elektricitätsübergang mehr zu erzielen ist. Es ist möglich dass man es hier mit einer directen Wirkung der dielektrischen Verschiebung im isolirenden Raume zu thun hat, und eine solche müsste allerdings mit abnehmendem Gasgehalte immer deutlicher hervortreten.

Noch eine dritte, nach ihrem Entdecker Crooks benannte Art der Entladung in verdünnten Gasen soll hier erwähnt werden, die nur bei sehr niedrigen Drucken — circa 0·01 mm — auftritt.

Wendet man bei diesen Drucken einen sehr kräftigen Inductionsapparat an so geht von der negativen Metallelektrode im Rohr eine eigenthümliche Strahlung aus die sich vor Allem durch zwei Eigenschaften kennzeichnet: erstens verlässt sie die Oberfläche der Elektrode, wie immer diese geformt sei, in normaler Richtung und zweitens pflanzt sie sich geradlinig fort, bis sie auf ein körperliches Hinderniss z. B. die Röhrenwand stösst. Aus diesen beiden Eigenschaften geht schon der merkwürdige Umstand hervor dass es für diese sogenannte Elektrodenstrahlung ganz gleichgiltig ist wo in der Röhre sich die zweite Elektrode befindet.

Diese Strahlung hat in hohem Maasse die Eigenschaft, Fluorescenz zu erregen, so dass die von ihr getroffenen Glaswände in einem zumeist grünlichen Lichte lebhaft leuchten; dieser Umstand gestattet auch die vollständige Undurchlässigkeit aller Körper, ob durchsichtig oder nicht, für diese Art Strahlung zu constatiren, indem der Schatten eines solchen, der im Innern des Rohres in den Gang der Strahlen gebracht wird, an der Rückwand deutlich begrenzt erscheint.

Für die Erklärung dieser Strahlung ist noch ein Umstand von Bedeutung; ist eine Crooks'sche Röhre längere Zeit in Gebrauch,

so tritt eine auffallende Schwärzung oder Trübung der Glaswände ein, mitunter überziehen sich dieselben auch vollständig mit einem Metallspiegel, und eine Untersuchung dieses Spiegels zeigt dass er immer aus der Substanz der Elektroden besteht. Es scheint also dass das Elektrodenmetall mechanisch zerstäubt und die einzelnen Partikeln, den elektrostatischen Kräften folgend, fortgeschleudert werden bis sie an eine Wand treffen. Eine Ausnahme davon scheint nur das Aluminium zu machen, sei es dass das Metall wirklich nicht zerstäubt, oder dass nur sein Niederschlag auf den Glaswänden nicht sichtbar wird, allein die Röhren bewahren ihr blankes Aussehen nach beliebig langem Gebrauch. Man wird wohl auch hier ein Zerstäuben des Metalles annehmen müssen, da sonst die lebhaft auftretende Fluorescenz schwer zu erklären wäre.

Dass Metalle und Kohle schon bei viel niedrigeren elektrostatischen Drucken lebhaft zerstäuben, beweisen die Erfahrungen die man mit Glühlampen gemacht hat, bei denen sich bekanntlich die Glocke immer mit der Zeit schwärzt. Auch benutzt man dieses Zerstäuben der Elektroden mit Vortheil zur Herstellung von Metallspiegeln aus Substanzen die sich anderweitig schwer oder gar nicht auf Glas fixiren lassen.

Man hat versucht auf optischem Wege eine Vorstellung über die Geschwindigkeit dieser Strahlung zu gewinnen, indem man das Spectrum der leuchtenden Theilchen untersuchte, einmal wenn sie sich gerade gegen den Beobachter zu und ein zweites Mal wenn sie sich senkrecht gegen die Visirlinie bewegten; nach dem Doppler-schen Principe hätten die Spectrallinien in beiden Fällen eine von der Geschwindigkeit der Theilchen abhängige Verschiebung zeigen müssen, allein es konnte eine solche bisher nicht constatirt werden und man muss aus der Versuchsanordnung schliessen, dass die Geschwindigkeit der fortgeschleuderten Partikeln jedenfalls kleiner als 7 Km per Secunde ist.

§ 59. Die sogenannten Artunterschiede der Elektricität.

Beim Uebergang der Elektricität in Geissler'schen Röhren beobachtet man gewöhnlich eine eigenthümliche Asymmetrie der Erscheinung, indem das Leuchten des Gases an der Ein- und Austrittsstelle des Funkens einen wesentlich verschiedenen Charakter zeigt: die negative Elektrode ist ihrer ganzen Ausdehnung nach von einem nicht leuchtenden, dem sogenannten dunklen Raume umgeben, hinter welchem erst das Leuchten beginnt und bis an die positive Elektrode

reicht. Dabei treten die bekannten, bisher unerklärten Schichtenbildungen in der Gasmasse auf so dass letztere, so weit sie leuchtet, quer gestreift erscheint. Man überzeugt sich leicht dass die Asymmetrie nur dann zu beobachten ist, wenn keine alternirenden Entladungen durch die Röhre gehen, also z. B. mit Hilfe einer Elektrisirmaschine, oder eines Inductionsapparates mit eingeschalteter Funkenstrecke, wodurch die Schliessungsfunken abgeblendet werden; wechselt man die Strömungsrichtung so wechselt auch die Erscheinung und geht, wie bei alternirenden Entladungen, dieser Wechsel sehr schnell vor sich so entsteht durch Superposition eine beiderseits symmetrische Entladungsform.

Man hat, namentlich in früherer Zeit, in diesem Unterschiede der Entladungsform eine wesentliche Stütze für die Annahme zweier Elektricitätsarten erblickt, aber sehr mit Unrecht, denn auch die unitarische Theorie gestattet nicht nur, sondern fordert geradezu einen derartigen Antagonismus, indem man unmöglich dieselbe Erscheinungsform erwarten kann wenn die Elektricität aus dem Elektrodendraht in das Gas oder umgekehrt strömt; mit demselben Rechte mit welchem die dualistische Theorie von einem Unterschiede beider Fluida spricht, kann die unitarische von einem Unterschiede in der Strömungsrichtung des allein vorhandenen sprechen.

Dieser Unterschied tritt bei allen Entladungen mit räumlich unsymmetrischer Anordnung auf; so z. B. beim Funken zwischen einer Spitze und einer Platte in welchem Falle bei grosser Distanz die Strömung in einer Richtung noch hindurchgeht, in der anderen aber nicht mehr, so auch bei den sogenannten Lichtenberg'schen Figuren die man erhält wenn man Elektricität aus einer Spitze gegen eine mit Mennige und Schwefelpulver bestreute Platte aus Harz ausströmen lässt. Es sind in diesem Falle die Figuren die man erhält verschieden geformt, je nachdem die Spitze positiv oder negativ geladen war. Auch die Poggendorff'sche Trichterröhre wäre hier zu erwähnen, ein Geissler'sches Rohr das durch trichterförmige Scheidewände mit enger Oeffnung in mehrere Abtheilungen getheilt ist, und bei welchem die Entladung je nach der Strömungsrichtung leichter im Sinne der Trichter als diesen entgegen erfolgt. Alle diese Erscheinungen lassen sich leicht auf Strömungsvorgänge an Stelle der beiden Elektricitätsarten zurückführen, wozu schon die Analogie mit Wasserströmungen unter ähnlichen Umständen herausfordert.

Lässt man den Strom einer Elektrisirmaschine zwischen zwei gleichen Kugeln übergehen und untersucht das elektrische Feld, so

findet man in der Mitte der Verbindungslinie ein Potential welches nicht der halben Potentialdifferenz zwischen beiden Kugeln entspricht wie man nach der Symmetrie der Anordnung erwarten sollte; der Grund davon liegt wieder nicht in einem Artunterschiede beider Elektricitäten sondern darin, dass das Feld zwar geometrisch aber nicht physikalisch symmetrisch ist, indem das Potential an der positiven Elektrode einen, wahrscheinlich durch einen Uebergangswiderstand bedingten plötzlichen Abfall erleidet. In Folge davon rückt der fragliche Punkt aus der Mitte gegen die positive Elektrode zu, ein Verhalten das sich auch im galvanischen Lichtbogen wieder findet.

Zieht man ein weiteres Glasrohr in seiner mittleren Partie bis auf 2—3 mm aus und führt beiderseits durch Korke Drähte symmetrisch so in dasselbe, dass ihre Spitzen bis zum Beginn der Verengerung reichen (in 2—3 cm Distanz) und lässt man nun den Strom einer Elektrisirmaschine hindurchgehen so beginnt eine Saugwirkung der negativen Elektrode auf die umgebende Luft, die sich durch passend angebrachte Manometer leicht nachweisen lässt. Je nach den Versuchsbedingungen kann man auf diese Weise Druckdifferenzen bis zu mehreren Centimetern Wasser erhalten und man wird dabei unwillkürlich an die Wirkung der Wasserstrahlpumpen erinnert, nach deren Analogie man auf eine Strömungsrichtung der Elektricität vom negativen zum positiven Pol schliessen müsste.

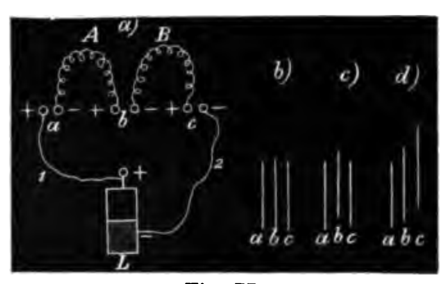


Fig. 77.

Die grösste Stütze fand die dualistische Theorie seinerzeit in dem Resultate des Wheatstone'schen Spiegelversuches; dieser wurde vor mehr als fünfzig Jahren zu dem Zwecke unternommen die Geschwindigkeit der Elektricität in langen Drähten zu ermitteln, hat aber nebstbei noch zu einem Resultate geführt das uns hier besonders interessirt.

Fig. 77 zeigt in vereinfachter schematischer Darstellung die Anordnung dieses Versuches; L ist eine Leydnerflasche, 1, 2 . . . 6 sind Metallkugeln zwischen denen die Entladung vor sich geht, A und B sind sehr lange Kupferdrähte für welche eben die Fortpflanzungsgeschwindigkeit bestimmt werden sollte. Beim Annähern der Ausladekugel bei a springen die drei Funken in a, b und c für das Auge ganz gleichzeitig über, braucht die Elektricität aber eine gewisse Zeit

um von *a* nach *b* und *c* zu gelangen so müsste sich zwischen den Funken doch eine Zeitdifferenz einstellen.

Wheatstone hat diese auf sehr sinnreiche Weise dadurch zu bestimmen gesucht, dass er das Bild der drei Funken in einem Spiegel beobachtete, der mit ausserordentlicher Geschwindigkeit um eine zu *a b c* parallele Axe rotirte. Ein jeder Funke wird dann seiner Zeitdauer entsprechend in eine Linie ausgezogen erscheinen wie es Fig. 77 *b* zeigt, und die Anfangspunkte dieser drei Linien müssten zu *a b c* parallel liegen, falls alle Funken in demselben Momente entstehen. Letzteres bestätigte sich jedoch nicht, der Versuch ergab ein Funkenbild wie in Fig. 77 *c* und aus diesem folgt jedenfalls ein gleichzeitiges Ueberspringen der Funken *a* und *c*, während die Verrückung von *b* im Sinne einer Verspätung dieses Funkens stattfand.

Aus diesem Umstande haben die Anhänger der dualistischen Theorie geschlossen dass es wirklich zwei Elektricitäten geben müsse die bei der Funkenbildung gleichzeitig von beiden Belegungen der Leydnerflasche ausgehen, und daher gleichzeitig in *a* und *c* ankommen während der Funke *b*, wegen des langen Weges der Elektricität in den Drähten *A* und *B*, erst später zu Stande kommt; man hat geglaubt dass bei Annahme nur einer Elektricitätsart das Funkenbild die Gestalt von Fig. 77 *d* hätte zeigen müssen, entsprechend einer fortschreitenden Verspätung des Funkens von *a* nach *c*.

Diese Schlussfolgerung ist jedoch nicht richtig; dem Ueberspringen des Funkens bei *a* geht ein Polarisationszustand des ganzen Schliessungskreises voraus der in Fig. 77 *a* durch die + und — Zeichen angedeutet ist.

Im Momente wo der Funke bei *a* überspringt, steigt auch die Potentialdifferenz zwischen den Kugeln bei *c* plötzlich an, und wenn die Zuleitungsdrähte 1 und 2 kurz sind, wie es bei Wheatstone's Versuch der Fall war, so muss der Funke *c* gleichzeitig mit dem bei *a* erscheinen. Der Funke *b* erscheint verspätet und zwar um die Zeit, welche zur Ausgleichung des Polarisationszustandes in den langen Drähten *A* und *B* erforderlich ist.

Es wäre von grossem Interesse, den Versuch mit Rücksicht auf diese Umstände unter Variation der Zuleitungsdrähte respective der Erdleitung, wenn eine solche vorhanden, zu wiederholen.

Man kann als Illustration zu Vorstehendem den folgenden Versuch machen: man nähert die mit einer Leydnerflasche oder Elektrisirmaschine verbundene Entladungskugel dem Ende *a* eines länglichen, isolirten Conductors (Fig. 78), dessen anderes Ende, *b*, mit

einer Spitze versehen ist; befindet sich dieser gegenüber in sehr kleiner Distanz eine zur Erde abgeleitete Kugel so beobachtet man früher einen kleinen Funken bei *b*, bevor noch die Entladung bei *a* vor sich gegangen ist. Es zeigt dies deutlich den Effect der der Entladung vorhergehenden Induction und der Art der Versuchsanordnung.

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit sich aus dem Wheatstone'schen Versuche ein Schluss auf die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Elektricität ziehen lässt. Ist die Rotationsgeschwindigkeit des Spiegels bekannt und die Winkelverschiebung des mittleren Funkenbildes, so lässt sich daraus direct die Zeitdifferenz beider Funken berechnen; aus dieser und der eingeschalteten Drahtlänge hat Wheatstone die Geschwindigkeit der Elektricität (in Kupferdraht) gleich 420.000 Km in der Secunde gefunden. Es fragt sich nun ob diesem Werthe wirklich eine bestimmte Bedeutung zukommt.

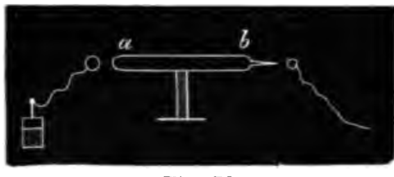


Fig. 78.

Wir untersuchen zu diesem Zwecke, wenigstens im Allgemeinen, den Verlauf einer solchen nicht stationären Strömung in einem cylindrischen Draht. Seien S_1 und S_2 zwei sehr benachbarte Querschnitte, so wird das Potential zwischen denselben im Laufe der Zeit sich ändern und zwar entsprechend dem Zu- und Abströmen von Elektricität durch S_1 und S_2. Die Elektricitätsmenge q_1 welche durch S_1 in der Zeit dt einströmt, können wir der Kraft $-\frac{dV}{dx}$, dem Querschnitte S_1', der Zeit dt und dem reciproken Werthe des Leitungswiderstandes ω proportional setzen und schreiben

$$q_1 = -\frac{S_1}{\omega}\frac{dV}{dx}\cdot dt.$$

Gleicher Weise erhalten wir für die ausströmende Menge q_2:

$$q_2 = -\frac{S_2}{\omega}\left(\frac{dV}{dx} + \frac{d^2V}{dx^2}\,dx\right)dt.$$

Da für einen cylindrischen Draht $S_1 = S_2$ und ausserdem der Widerstand ω als constant vorausgesetzt ist, so ergibt sich ein Elektricitätszuwachs $q_1 - q_2$:

$$q_1 - q_2 = \frac{S_1}{\omega}\frac{d^2V}{dx^2}\,dx\cdot dt$$

oder für die Längeneinheit in der Zeiteinheit:

$$\frac{S_1}{\omega}\frac{d^2V}{dx^2}.$$

Setzen wir noch den Querschnitt des Drahtes = 1 so wird der Elektricitätszuwachs gleich $\frac{1}{\omega}\frac{d^2 V}{d x^2}$ und diese Elektricitätsmenge wird zur Steigerung des Potentials verwendet. Ist die Capacität des Drahtes per Längeneinheit gleich c, so ist $c \cdot \frac{d V}{d t}$ die zugeführte Ladung und man hat die Gleichung:

$$\frac{1}{\omega}\frac{d^2 V}{d x^2} = c\frac{d V}{d t} \text{ oder } \frac{d^2 V}{d x^2} - \omega \cdot c \cdot \frac{d V}{d t} = 0.$$

Es ist das dieselbe Gleichung welche Fourier für die Wärmeleitung in einem Drahte gegeben hat, und in der That decken sich die beiden Vorgänge vollständig, wenn man Potential und Temperatur, elektrisches und thermisches Leitungsvermögen vertauscht.

Die Discussion dieser allgemeinen Gleichung ist sehr schwierig und gestattet nur unter gewissen Voraussetzungen eine directe Anwendung.

So ergibt sich z. B. für einen sehr langen Draht (Kabel), dessen Ende zur Erde geleitet, dessen Anfang aber mit einer Elektricitätsquelle von constantem Potential verbunden wird, dass die Zeit die nöthig ist um irgend einen Punkt desselben auf einen bestimmten Bruchtheil seines schliesslichen Potentials zu bringen, dem Quadrate der Drahtlänge, dem Widerstand und der Capacität des Drahtes per Längeneinheit proportional ist.

Es folgt daraus dass bei derartigen Entladungserscheinungen von einer bestimmten Geschwindigkeit der Elektricität nicht gesprochen werden kann, dass es überhaupt eine solche nicht gibt die für die verschiedenen Substanzen eine charakteristische Constante wäre, wie etwa die Geschwindigkeit des Lichtes; die Zeit die zur Herstellung eines bestimmten elektrischen Zustandes an einem entfernten Orte erforderlich ist, hängt nicht nur von der Natur des diesen Zustand übermittelnden Mediums sondern ganz wesentlich auch von dessen räumlicher Anordnung ab. Es ist daher durchaus nicht gerechtfertigt, wenn man immer noch aus dem Wheatstone'schen Spiegelversuch eine bestimmte Geschwindigkeit der Elektricität in Kupfer (dem Material der Drähte) ableitet und ebenso wenig ist derselbe eine wirkliche Stütze für die dualistische Theorie gegenüber der unitarischen.

Es kann nach dem Vorstehenden nicht wundern, wenn die Angaben über die sogenannte Geschwindigkeit der Elektricität, je nach der Versuchsanordnung ganz ausserordentlich variiren; in der folgen-

den Tabelle finden sich einige der nach der Wheatstone'schen oder nach ähnlichen Methoden erhaltenen Resultate.

Beobachter	Substanz des Drahtes	Geschwindigkeit
Felici	Cu	484.000 Km
Wheatstone	Cu	420.000 „
Fizeau	Cu	180.000 „
Obs. in Greenwich	Cu	12.000 „
„ „ „	Cu	4.500 „
Faraday	Cu	1.200 „
Felici	Fe	250.000 „
Siemens	Fe	245.000 „
Fizeau	Fe	100.000 „
Mitchell	Fe	45.600 „
Walker	Fe	30.000 „
Siemens	H_2O	5.600 „

Diese Zahlen sprechen deutlich genug gegen eine bestimmte Geschwindigkeit der Elektricität als einer Constante des Materials im gewöhnlichen Sinne des Wortes; eine jede von ihnen ist nur für die specielle Versuchsanordnung von Giltigkeit und damit verlieren dieselben auch einen grossen Theil des Interesses, das man ihnen seinerzeit in Folge der ersten gelungenen Versuche Wheatstone's entgegengebracht hat.

XVI. Capitel.

Stationäre elektrische Strömung.

§ 60. Allgemeine Gesetze der stationären elektrischen Strömung.

Im Gegensatze zu den bisher betrachteten Erscheinungen bewegter Elektricität sollen im Folgenden ausschliesslich solche Fälle behandelt werden, bei denen die Strömung eine stationäre ist; das Charakteristische einer solchen Strömung ist die für jeden Punkt der Leitungsbahn geltende Constanz des Potentials mit der Zeit, oder die Gleichung:

$$\frac{dV}{dt} = 0.$$

Eine stationäre Strömung setzt aus leicht begreiflichen Gründen immer eine in sich geschlossene Leitungsbahn voraus; desgleichen

erfordert die Strömung eine die Elektricität treibende Kraft, eine sogenannte elektromotorische Kraft, und diese ist, wie wir schon wissen, immer dort vorhanden wo sich eine Potentialdifferenz vorfindet. Da nun längs der ganzen Leitungsbahn die Elektricität in Bewegung ist, so müssen sich auch längs der ganzen Bahn solche elektromotorische Kräfte finden; seien V_1 und V_2 die Potentiale zweier beliebiger Punkte der Bahn, so sagen wir dass zwischen ihnen die elektromotorische Kraft $\varepsilon = V_1 - V_2$ thätig sei. In diesem Sinne ist die elektromotorische Kraft durch die Arbeit gemessen welche die Einheit der Elektricität leistet wenn sie sich von dem Punkte 1 nach 2 bewegt.

Da der Werth von V für einen jeden Punkt constant bleibt so folgt daraus schon dass nirgends eine Anhäufung von Elektricität stattfindet, es wird also auch z. B. in dem Stromkreise eines geschlossenen galvanischen Elementes keine Elektricität erzeugt, sondern nur die vorhandene bewegt.

Die elektromotorischen Kräfte oder Potentialdifferenzen müssen ihren Grund in der Anwesenheit fixer, also elektrostatischer Ladungen haben; sind diese gegeben so ist damit aber auch der Zustand des elektrischen Feldes das sie erzeugen, mag dieses nun zum Theil von Isolatoren oder von Leitern erfüllt sein, gegeben und zwar nach den elektrostatischen Gesetzen die wir im ersten Theile kennen gelernt haben. Es sind damit auch die Kräfte gegeben die auf die vorhandene Elektricität wirken und diese, so weit das Feld von leitender Substanz erfüllt ist, in Bewegung setzen. Man sieht daraus dass wir die Resultate der elektrostatischen Untersuchungen unmittelbar auf die Elektricitätsströmung werden anwenden können, indem die Begriffe der Kraftströmung und der Elektricitätsströmung sich decken; letztere tritt eben thatsächlich ein wenn das elektrische Feld leitende Substanzen enthält d. h. solche welche es der Elektricität gestatten der vorhandenenen Kraftströmung zu folgen.

Unter der Intensität J der Strömung die durch eine Fläche geht, verstehen wir die Elektricitätsmenge welche dieselbe in der Zeiteinheit passirt, und diese muss dem eben Gesagten zufolge der Kraftströmung proportional sein. Wir erhalten demnach die Gleichung

$$J = c \int F_n \, dS$$

wo c eine von der Natur des Mediums abhängige Constante und F_n die auf die Fläche S senkrechte Kraftcomponente bedeutet. Wir wollen nun sehen welche Schlüsse sich zunächst auf die stationäre Strömung im Allgemeinen ziehen lassen.

Wir denken uns im Innern eines Körpers durch welchen eine stationäre Strömung geht, um irgend einen Punkt eine geschlossene Fläche geschlagen; da im Innern derselben keine Anhäufung von Elektricität stattfinden soll, so muss durch diese Fläche ebensoviel zu- als abströmen d. h. es muss $\int F_n \, dS = 0$ sein.

Nach dem Gauss'schen Satze ist dies aber auch gleich $4\pi m$ wo m die Elektricitätsmenge innerhalb der geschlossenen Fläche bedeutet, es ist also auch $m = 0$, oder die Raumdichte $\rho = 0$; es besagt dies, dass im Innern eines Leiters mit constanter Strömung die Raumdichte der Elektricität dieselbe ist wie in einem unelektrischen Körper, also, nach dem gewöhnlichen Sprachgebrauch, gleich Null.

Es folgt daraus auch, dass für das ganze Innere des Leiters die Laplace'sche Gleichung Giltigkeit hat:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = \Delta V = 0.$$

Dieselbe gilt aber für die Oberfläche desselben natürlich nicht mehr, da sich an dieser eine von Punkt zu Punkt variable statische Ladung vorfinden muss; denn es variirt das Potential in der Richtung der Normale von der Oberfläche gegen den umgebenden Isolator und daraus ergibt sich eben eine Oberflächenladung des Leiters längs seiner ganzen Ausdehnung.

Die Constante c in der allgemeinen Formel für die Strömungsintensität haben wir als von der Natur des Mediums abhängig bezeichnet; besteht nun der Leiter aus verschiedenen Substanzen so muss für die Trennungsflächen derselben eine Continuitätsgleichung bestehen die sich aus Folgendem leicht ergibt. Da an dieser Fläche keine Anhäufung von Elektricität stattfinden darf, so muss gleichzeitig auf einer Seite ebensoviel zufliessen wie auf der anderen abfliesst d. h. es muss, wenn wir die Kräfte beiderseits von der Fläche weg positiv zählen, die Gleichung bestehen:

$$c_1 \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + c_2 \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = 0.$$

Die Analogie dieser Gleichung mit der für die Inductionsströmung in Dielektricis gefundenen:

$$K_1 \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 + K_2 \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = 0$$

ist augenfällig und es zeigt sich hier deutlich, wie man die Probleme der Elektrostatik unmittelbar auf die stationäre Strömung anwenden kann wenn man die Dielektricitätsconstanten K durch die Constanten c ersetzt. Diese letzteren bezeichnen das, was wir das Leitungsvermögen der Substanzen nennen.

Trifft die elektrische Strömung schief auf die Trennungsfläche zweier Leiter, so tritt eine Brechung derselben ein, deren Gesetz wir auch unmittelbar dem entsprechenden elektrostatischen Probleme von der Brechung der Kraftströmung entnehmen können. Bezeichnen α_1 α_2 den Einfalls- und Brechungswinkel der Strömung, so ist:

$$\frac{\operatorname{tang} \alpha_1}{\operatorname{tang} \alpha_2} = \frac{K_1}{K_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

Dieses Tangentengesetz wurde auch von Kirchhoff für stationäre Ströme experimentell bestätigt.

Sowie wir bei der Kraftströmung von Kraftlinien und Niveauflächen sprachen, so werden wir auch bei der stationären Elektricitätsströmung von Strömungslinien und Niveauflächen sprechen können; erstere sind die Richtungen in denen sich innerhalb des Leiters die Elektricität bewegt, letztere sind alle Flächen die auf diesen senkrecht stehen, und ihre Gleichung ist wieder $V =$ Const. Alle Gesetze die für Kraftlinien gelten, gelten auch für die Strömungslinien, so z. B. dass sich nicht zwei derselben schneiden können, dass sie parallel verlaufen wenn die Kraft constant bleibt, convergiren oder divergiren wenn dieselbe zu- oder abnimmt u. s. w. Aus diesem Parallelismus beider Erscheinungen wird man bei Beurtheilung galvanischer Probleme oft Nutzen ziehen können, wenn man sich die betreffenden elektrostatischen vergegenwärtigt.

Aus der Natur der Niveauflächen folgt, dass in der Richtung derselben keine elektromotorische Kraft im Leiter wirkt, sondern nur senkrecht zu denselben; was ihre Lage anlangt so lässt sich im Allgemeinen nur sagen, dass sie alle die Oberfläche des Leiters senkrecht treffen müssen, denn es ist klar dass bei stationärer Strömung keine Elektricitätsbewegung senkrecht gegen die Grenzfläche des Leiters auftreten kann, vorausgesetzt natürlich dass derselbe von einem vollkommenen Isolator umgeben ist. Aus diesem Verlaufe der Niveauflächen an der Grenze folgt auch, was übrigens selbstverständlich ist, dass die äussersten Strömungslinien in der Oberfläche verlaufen, wie immer dieselbe gestaltet sein mag.

§ 61. Specielle Fälle stationärer Strömung in unendlichen, körperlichen Leitern.

Eine jede elektrische Strömung muss aus der Elektricitätsquelle in den Leiter durch eine Eintrittsstelle geführt werden; diese nennen wir die Elektrode und bemerken dass deren im Allgemeinen beliebig viele sein können. Wir zählen eine Strömung als positiv wenn dieselbe aus der Elektrode in den Leiter geht, andernfalls negativ. Schlagen wir um eine der Elektroden eine geschlossene Fläche S die alle anderen ausschliesst, so ist die Intensität der durch sie hindurchgehenden Strömung J:

$$J = c\int F_n\, d\,S = -c\int \frac{d\,V}{d\,n}\cdot d\,S.$$

Wir betrachten zunächst den Fall eines allseitig unendlich ausgedehnten Leiters von dem Leitungsvermögen c; in demselben befinde sich eine beliebige Anzahl von Elektroden deren Gestalt wir der Einfachheit wegen als kugelförmig annehmen wollen. Die Potentiale und Radien dieser Elektroden seien $V_1\, V_2 \ldots . r_1\, r_2 \ldots$ und es sollen diese Potentiale durch passend angebrachte Elektricitätsquellen, trotz der Strömung, auf ihren ursprünglichen Werthen erhalten bleiben; das setzt natürlich voraus dass die Elektricität aus den Quellen mit einer gegen den Abfluss im Leiter unendlich grossen Geschwindigkeit nachgeliefert wird was für die Praxis mit einer genügenden Annäherung erreicht wird, wenn man die Zuleitungen aus Metall den Leiter aber z. B. aus einer Flüssigkeit wählt.

Weiter wollen wir noch die vereinfachende Voraussetzung machen dass die kugelförmigen Elektroden alle so weit von einander entfernt sind dass die Vertheilung der Elektricität auf ihnen als gleichmässig angenommen werden kann. Es ist dann der Werth der Kraft F_n an allen Punkten einer Elektrode derselbe, und gleich $\frac{m}{r^2}$ wenn m die Ladung derselben bezeichnet; die Oberfläche selbst ist gleich $4\,r^2\pi$ und somit wird die ganze Strömung die aus derselben austritt:

$$J = c\int F_n\, d\,S = c\cdot 4\,\pi\, m.$$

Die Quantität m der Ladung hängt von dem Potentiale V der Kugel, und dem Potentiale φ des umgebenden Raumes ab und ist durch die Gleichung bestimmt:

$$V - \varphi = \frac{m}{r}.$$

Man hat somit

$$J = 4\pi c r\ (V - \varphi).$$

Ist der Leiter unendlich gross, so ist φ jedenfalls gleich Null und wir haben für diesen hier betrachteten Fall:

$$J = 4\pi c r \cdot V.$$

Es ist also die Intensität der Strömung der vorhandenen Potentialdifferenz $(V - \varphi)$ oder V proportional eine Beziehung die, wie sich von selbst ergibt, für alle Arten stationärer elektrischer Strömung giltig ist.

Die Proportionalitätsconstante bezeichnen wir als das Leitungsvermögen L des betreffenden Leiters und ihren reciproken Werth als den Widerstand W. Die vorhandene Potentialdifferenz bezeichnen wir als elektromotorische Kraft ε. Es ist also allgemein:

$$J = L \cdot \varepsilon = \frac{\varepsilon}{W}$$

und in unserem speciellen Falle wird $W = \frac{1}{4\pi c r}$.

Es ist also der Widerstand eines solchen unendlichen Leiters mit nur einer Elektrode lediglich von deren Radius r und von den specifischen Eigenschaften der Leitersubstanz (c) abhängig.

Befinden sich nun im Raume mehrere Elektroden, so geht von einer jeden von ihnen eine analoge (positive oder negative) Strömung aus und wir haben;

$$\Sigma J = J_1 + J_2 + \ldots. = 4\pi c\ (V_1 r_1 + V_2 r_2 + \ldots.).$$

Machen wir die weitere Annahme dass alle Elektroden gleiche Grösse haben so wird

$$r_1 = r_2 = \ldots. = r$$

und

$$\Sigma J = 4\pi c r\ (V_1 + V_2 + \ldots).$$

Diese Strömung ΣJ geht durch eine beliebige geschlossene Fläche hindurch welche alle Elektroden einschliesst; da die Vorzeichen von V positiv oder negativ sein können, so kann diese Summe alle möglichen Werthe annehmen. Wir beschränken uns nun auf den in der Praxis fast ausschliesslich vorkommenden Fall nur zweier Elektroden, und erhalten:

$$\Sigma J = 4\pi c r\ (V_1 + V_2).$$

Hier ist wieder der Specialfall von besonderem Interesse wo die beiden Elektroden gleiche aber entgegengesetzte Potentiale haben, wo also $V_1 = -V_2$ ist; die Gleichung liefert dann für die Intensität:

$$\Sigma J = 0.$$

Dieser Ausdruck besagt dass in Bezug auf eine um beide Elektroden gelegte geschlossene Fläche die Strömung gleich Null ist, d. h. dass alle Strömung welche durch dieselbe von innen nach aussen geht auch wieder von aussen zurückkommen muss, und da der Zustand ein stationärer sein soll, also nirgends eine Anhäufung stattfinden darf, so muss alle Elektricität welche bei einer Elektrode einströmt, durch die andere wieder ausströmen.

Die Intensität dieser Strömung und damit auch der Widerstand des Leiters lässt sich leicht angeben; durch die Oberfläche der ersten Elektrode, und damit auch durch jeden Querschnitt des Leiters der beide Elektroden von einander trennt, fliesst die Menge

$$J_1 = - J_2 = 4 \pi c V_1 r$$

oder da $V_1 = - V_2 = \frac{V_1 - V_2}{2}$ ist:

$$J_1 = 2 \pi c r . (V_1 - V_2).$$

Im Falle zweier Elektroden die die Strömung ein- respective ausleiten, ist somit der Widerstand des unendlichen Leiters

$$W = \frac{1}{2 \pi c r}.$$

Könnte man die beiden Elektroden A und B auf entgegengesetzten aber numerisch ungleichen Potentialen halten so dass z. B. $V_1 > V_2$ ist so würde nur ein Theil der von A ausgehenden Strömungslinien nach B verlaufen der Rest aber ins Unendliche; wäre dagegen $V_1 < V_2$ so würden nicht nur alle von A ausgehenden Stromlinien nach B gelangen sondern dorthin würde auch noch aus dem Unendlichen Elektricität zuströmen.

Die Zeichnungen für die elektrischen Felder zweier gleich oder ungleich stark positiv oder negativ geladener Punkte geben ein deutliches Bild der entsprechenden Strömungserscheinungen.

Man kann die vorstehend besprochenen Verhältnisse auch experimentell bestätigen, wenigstens mit einer gewissen Annäherung die dadurch bedingt ist, dass man beim Experimente nicht wirklich einen unendlich grossen Leiter zur Verfügung hat.

In dem Ausdrucke für den Widerstand $W = \frac{1}{2 \pi c r}$ kommt die Distanz beider Elektroden nicht vor es ist somit der Widerstand von dieser Distanz ganz unabhängig was sich leicht daraus erklärt, dass der grösste Theil desselben offenbar in die unmittelbare Nähe der Elektroden fällt wo die Strombahn einen verhältnissmässig geringen

Querschnitt hat. Deshalb ist auch W ausser von c noch von r abhängig und diesem umgekehrt proportional.

Leitet man den Strom eines grossen Daniell'schen Elementes durch zwei gleiche Kupferkugeln in ein Gefäss mit einer grösseren Quantität Kupfervitriollösung (diese Substanzen sind zur Vermeidung der galvanischen Polarisation gewählt) und schaltet in den Stromkreis ein Galvanometer mit einer Rolle aus dickem Drahte ein, so beobachtet man einen (je nach der Quantität der Lösung mehr oder minder) constanten Ausschlag des Galvanometers gleichgiltig wie gross die Distanz der Elektroden sei. Nur dürfen diese nicht zu nahe aneinander und auch nicht zu nahe an die Gefässwand gebracht werden. Ersetzt man aber die Elektroden durch Kugeln von grösserem oder kleinerem Radius so zeigt das Galvanometer auch die der Formel für W entsprechende Aenderung der Intensität an.

Bei diesem Versuche ist jedoch in Bezug auf die Theorie noch ein Punkt zu erwähnen.

Es sei D (Fig. 79) das Element, A und B die beiden Elektroden und es sei, wie dies gewöhnlich der Fall zu sein pflegt, eine davon bei T zur Erde geleitet also dauernd auf dem Potentiale Null.

Wird zuerst nur A in die Flüssigkeit getaucht so nimmt auch diese das Potential Null an und B hat ein um 1 D höheres, und wenn wir jetzt auch B einsenken so beginnt eine Strömung bei B, nicht aber bei A. Die Elektricität die bei B ausströmt verbreitet sich im ersten Momente also ganz so wie wenn nur eine einzige Elektrode in einer unendlichen Flüssigkeit vorhanden wäre. Da die Flüssigkeit aber nicht unendlich, und übrigens isolirt ist so verbreitet sich die bei B eingeströmte Ladung zunächst über die ganze Begrenzungsfläche derselben und erzeugt dadurch im Innern ein Potential φ. Sind V_1 und V_2 die Potentiale von A und B so herrschen im nächsten Momente an diesen die Potentialdifferenzen $V_1 - \varphi$ und $\varphi - V_2$ und es tritt jetzt auch bei A eine Strömung J_1 auf; diese, sowie die Strömung J_2 bei B sind durch die folgenden Gleichungen gegeben:

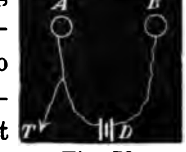


Fig. 79.

$$J_1 = 4\pi c r\,(V_1 - \varphi) \qquad J_2 = 4\pi c r\,(\varphi - V_2).$$

Das Potential φ steigt von Moment zu Moment und damit wächst J_1 während J_2 abnimmt und es ist klar dass von dem Momente an eine stationäre Strömung längs der ganzen Leitungsbahn eintritt wo $J_1 = J_2$ wird. Für diesen Zustand hat man also:

$$V_1 - \varphi = \varphi - V_2 \text{ oder } \varphi = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Die Intensität der stationären Strömung wird somit

$$J_1 = -J_2 = 4\pi c r\left(V_1 - \frac{V_1 + V_2}{2}\right) = 2\pi c r (V_1 - V_2).$$

Der Widerstand ist also wie früher

$$W = \frac{1}{2\pi c r}.$$

Man sieht somit dass es für den Versuch gleichgiltig ist, wie Anfangs die Potentiale vertheilt sind respective wo sich die Erdleitung befindet, indem die Intensität des Stromes nicht von den absoluten Werthen sondern von der Differenz $V_1 - V_2$ abhängt.

Die Unabhängigkeit des Widerstandes von der Distanz der Elektroden in einem unendlichen Leiter tritt in einem concreten Falle sehr deutlich zu Tage, nämlich bei den Erdleitungen der Telegraphenlinien; für diese ist thatsächlich ihre Distanz ohne Einfluss auf die Intensität des in der Linie circulirenden Stromes.

Man kann in diesem Falle die Erde als ein unendlich grosses Reservoir auffassen in welches einerseits ebensoviel Elektricität einströmt wie andererseits daraus entnommen wird; wäre die Erde zwischen beiden Elektroden durch eine isolirende Ebene in zwei Theile zertheilt so würde auch dies an dem Verlaufe des Stromes absolut nichts ändern, vorausgesetzt dass beide Theile noch eine unendliche Capacität besitzen.

Erstreckt sich der Leiter nur einerseits ins Unendliche und ist andererseits durch eine unendliche Ebene begrenzt in welcher die kugelförmigen Elektroden mit ihren Centren liegen, so wird die Intensität der stationären Strömung nur die Hälfte der früheren d. h. der Widerstand steigt auf das Doppelte. Es ist nämlich:

$$J = c \cdot \frac{m}{r^2}\int dS = c\frac{m}{r^2} \cdot 2 r^2 \pi = 2 c m \pi$$

und daraus folgt durch eine der früheren ganz analoge Betrachtungsweise:

$$J = \pi c r (V_1 - V_2) \text{ und } W = \frac{1}{\pi c r}.$$

Aber auch jetzt bleibt der Widerstand von der Distanz der Elektroden unabhängig und umgekehrt proportional ihrem Radius. Man kann diese Verhältnisse gleichfalls durch das früher besprochene Experiment illustriren.

Wir betrachten jetzt noch den Fall einer unendlich ausgedehnten leitenden Ebene von der überall constanten aber sehr geringen Dicke δ und der Leitungsconstante c. Die beiden Elektroden seien Kreisscheiben gleichfalls von der Dicke δ und mit dem Radius r. Um die Strömungsintensität aus dem allgemeinen Ausdruck

$$J = c \int F_n \, d\, S$$

zu finden, müssen wir die Kraft F_n kennen; dieselbe lässt sich leicht finden, wenn wir wieder die Distanz der Elektroden von einander als so gross voraussetzen dass die Vertheilung ihrer Ladungen der normalen gleichgesetzt werden kann. Wir können dann die Elektroden als beiderseits normal mit Elektricität belegte Kreisscheiben auffassen und aus den schon bekannten Formeln die Kraft in Richtung des Radius berechnen.

Für die Flächendichte μ an einem um ρ vom Centrum abstehenden Punkte haben wir seinerzeit gefunden:

$$\mu = \frac{M}{4\pi r \sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

wo M die Ladung einer Fläche bedeutet. Das Potential der Elektrode kann in allen Punkten als constant vorausgesetzt werden und zwar mit um so geringerem Fehler je grösser der Widerstand der leitenden Ebene gegen den der Elektroden ist. Für das Centrum der letzteren erhalten wir das Potential $d\,V$ das von einem Ring der Fläche mit den Radien ρ und $\rho + d\,\rho$ herrührt:

$$d\,V = 2\pi\mu\, d\,\rho = \frac{M}{2\,r} \cdot \frac{d\,\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}}$$

und das ganze Potential wird, wenn wir berücksichtigen dass die Elektrodenscheibe beiderseits mit Elektricität belegt ist:

$$V = \frac{M}{r} \int_0^r \frac{d\,\rho}{\sqrt{r^2 - \rho^2}} = \frac{M}{r} \left(\text{arc. sin.}\ \frac{\rho}{r}\right)_0^r = \frac{M\pi}{2\,r}.$$

Als Ausdruck für die Ladung M, die Kraft F_n und die Fläche $\int d\,S$ erhalten wir somit:

$$M = \frac{2\,r}{\pi}\,V;\quad F_n = -\frac{d\,V}{d\,r} = \frac{M\pi}{2\,r^2};\quad \int d\,S = 2\,r\,\pi\,\delta.$$

Die Strömungsintensität J wird demnach:

$$J = c \cdot \frac{M\pi}{2\,r^2} \cdot 2\,r\,\pi\,\delta = c \cdot 2\,\pi\,\delta \cdot V.$$

Sind die Potentiale der beiden Elektroden V_1 und V_2 so haben wir wieder wie früher zu setzen:

$$V = \frac{V_1 - V_2}{2}$$

und erhalten:

$$J = c \pi \delta (V_1 - V_2)$$

und für den Widerstand der Ebene:

$$W = \frac{1}{c \pi \delta}.$$

Es tritt hier der interessante Fall auf dass der Widerstand weder von der Distanz der Elektroden noch von deren Grösse abhängig ist was sich daraus erklärt dass mit abnehmender Grösse derselben die Austrittsfläche der Strömung sich in demselben Maasse verkleinert wie die treibende Kraft wächst; von Einfluss auf den Widerstand erscheint nur das specifische Leitungsvermögen c und die Dicke δ der Platte.

Als letzten Fall eines unendlichen Leiters wollen wir schliesslich noch den ins Auge fassen wo einer kleinen kugelförmigen Elektrode als zweite eine unendliche Platte gegenübersteht; den Raum wollen wir uns wieder durch eine leitende Flüssigkeit erfüllt denken. Wie aus den Ausführungen des ersten Beispieles hervorgeht wird dann:

$$J = 4 \pi c r (V_1 - V_2) \text{ und } W = \frac{1}{4 \pi c r}$$

wenn r wieder den Radius der kugelförmigen Elektrode bedeutet.

Der Fall ist vollkommen analog dem seinerzeit betrachteten Probleme über die Induction eines Punktes in einer unendlichen leitenden Ebene, und es deckt sich der Verlauf der Stromlinien hier ganz mit dem der Kraftlinien dort. Die ganze von der kleinen Kugel ausgehende Strömung gelangt zur ableitenden Platte, erreicht diese aber an den verschiedenen Punkten mit verschiedener Dichte; wie wir an dem Problem der Induction gesehen haben ist die an irgend einem Orte in der Platte inducirte Dichte durch den Ausdruck gegeben:

$$\mu = p \cdot \frac{1}{\rho^3}$$

wo ρ den Abstand dieses Ortes vom inducirenden Punkte, und p eine von der übrigen Versuchsanordnung abhängige Constante bedeutet. Es wird also auch in unserem Falle die Strömungsintensität an jedem Punkte der Platte ρ^3 umgekehrt proportional sein, und dies bestätigt sich experimentell durch die sogenannten Nobili'schen Ringe.

Elektrolysirt man nämlich eine Salzlösung, am besten essigsaures Blei, zwischen einer Messingplatte und einer kleinen Kugel so dass sich das ausgeschiedene Metall auf der Platte niederschlägt, so erhält man keinen gleichmässigen Ueberzug derselben sondern ein Ringsystem dessen Centrum unterhalb der Kugel liegt. Es ist nämlich die ausgeschiedene Metallmenge an jedem Punkte der Stromintensität proportional, und da diese nach obigem Gesetze variirt so thut dies auch die Dicke der niedergeschlagenen Metallschichte und gibt so zur Entstehung farbiger Ringe — Newton'scher Ringe — Veranlassung. Eine genaue Untersuchung derselben hat das angegebene Vertheilungsgesetz der Stromintensitäten bestätigt.

§ 62. Specielle Fälle stationärer Strömung in endlichen, körperlichen Leitern.

Wir untersuchen im Folgenden noch einige der in der Praxis häufiger vorkommenden Fälle einer stationären Strömung in räumlich begrenzten Leitern.

Als erstes Beispiel wählen wir die Strömung zwischen zwei concentrischen Kugelflächen vom Radius R und r mit den Potentialen V_1 und V_2 wenn der Zwischenraum durch eine Substanz von der Constante c erfüllt ist.

In dem Ausdrucke $J = c\int F_n\, d\, S$ wird $F_n = \frac{m}{r^2}$ wenn m die Ladung der inneren Kugel bedeutet und $\int d\, S = 4\, r^2 \pi$; auf der Innenseite der äusseren Kugel befindet sich nach dem Faraday'schen Theorem dann die Ladung $-m$ und der Potentialüberschuss der inneren gegen die äussere wird:

$$V_1 - V_2 = \frac{m}{r} - \frac{m}{R} = m\left(\frac{R-r}{R\cdot r}\right).$$

Als Ausdruck für die Intensität ergibt sich somit:

$$J = c\cdot\frac{m}{r^2}\cdot 4\, r^2\,\pi = c\cdot 4\,\pi\, m$$

und da nach Obigem $m = (V_1 - V_2)\cdot\frac{R\cdot r}{R-r}$ ist, so wird

$$J = c\cdot 4\,\pi\,\frac{R\cdot r}{R-r}\,(V_1 - V_2)$$

und der Widerstand des Leiters wird

$$W = \frac{1}{4\,\pi\, c}\cdot\frac{R-r}{R\cdot r}.$$

Es braucht wohl nicht besonders erwähnt zu werden dass die Strömungslinien in diesem Falle mit den Kugelradien identisch und daher gleichmässig im Raume vertheilt sind; es folgt daraus dass die Intensität in jedem vom Centrum aus gezogenen Raumkegel zwischen den beiden Kugelschalen dem Oeffnungswinkel ω proportional ist. Für einen solchen Kugelstutz wird somit der Widerstand allgemein:

$$W = \frac{1}{\omega \cdot c} \cdot \frac{R - r}{R \cdot r}.$$

Bilden die beiden Elektroden zwei concentrische Cylinder gleicher Höhe mit den Radien r_1 und r_2 so lässt sich in ähnlicher Weise die Intensität der Strömung angeben. Nach den früher schon über die Capacität eines solchen Systems aufgestellten Rechnungen ist das Potential V des inneren, wenn der äussere zur Erde geleitet ist, oder allgemein die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ beider gegeben durch:

$$V_1 - V_2 = \frac{2\,M}{L} \text{ log. nat. } \frac{r_2}{r_1}.$$

Hier bedeuten M und L die Ladung und die Länge des inneren Cylinders. Man erhält daraus die Kraft $F_n = -\frac{d\,V}{d\,r_1}$:

$$F_n = \frac{2\,M}{L\,r_1} = \frac{V_1 - V_2}{r_1 \text{ log. nat. } \frac{r_2}{r_1}}.$$

Die Fläche $\int d\,S$ ist gleich $2\,r_1\,\pi\,L$ und somit wird die Intensität J:

$$J = c \int F_n\,d\,S = c\,\frac{V_1 - V_2}{r_1 \text{ log. nat. } \frac{r_2}{r_1}} \cdot 2\,r_1\,\pi\,L$$

oder:

$$J = \frac{2\,\pi\,c\,L}{\text{log. nat. } \frac{r_2}{r_1}} (V_1 - V_2)$$

und der Widerstand W:

$$W = \frac{1}{2\,\pi\,c\,L} \cdot \text{log. nat. } \frac{r_2}{r_1}.$$

Die Strömungslinien sind auch hier auf die Elektroden senkrechte Gerade und symmetrisch zur Axe des Systems vertheilt; für

einen Keil vom Oeffnungswinkel ω würde daher der Widerstand das $\frac{2\pi}{\omega}$fache sein oder allgemein:

$$W = \frac{1}{\omega c L} \text{ log. nat. } \frac{r_2}{r_1}.$$

Die beiden vorstehenden Beispiele sind die Analoga zu den elektrostatischen Vorgängen beim Kugel- und Cylindercondensator; es möge schliesslich noch, dem ebenen Condensator entsprechend, die Strömung zwischen zwei parallelen Kreisplatten vom Radius r und der Distanz δ untersucht werden.

Die Kraft F_n wird, als sehr nahe an einer gleichförmig mit Elektricität belegten Fläche wirkend, gleich $4\pi\mu$, wobei die Dichte μ durch die Relation:

$$\mu = \frac{1}{4\pi} \frac{V_1 - V_2}{\delta}$$

gegeben ist. Die Fläche $\int d\,S$ ist gleich $r^2\pi$ und somit wird die Strömung:

$$J = c \cdot \int F_n\, d\,S = c \cdot 4\pi\mu \cdot r^2\pi$$

oder

$$J = c \cdot r^2\pi \cdot \frac{V_1 - V_2}{\delta}$$

und der Widerstand:

$$W = \frac{\delta}{c \cdot r^2\pi}.$$

§ 63. Stationäre Strömung in einem linearen Leiter.

Wir betrachten nun den für die Praxis weitaus wichtigsten Fall eines cylindrischen Leiters von überall gleichem Querschnitt, also den Fall eines Drahtes im weitesten Sinne des Wortes. Die Elektricität möge bei einem Querschnitt ein- bei einem anderen ausströmen und es seien V_1 V_2 die Potentiale dieser Flächen. Es wird bei der Lösung dieser Aufgabe vorausgesetzt dass diese Querschnitte Niveauflächen sind, ist das nicht der Fall, wird z. B. die Elektricität diesen Querschnitten durch punktförmige Elektroden zugeführt, so ist die Aufgabe allgemein nicht mehr lösbar, indem zu dem Widerstande des Leiters noch der an den beiden Elektroden hinzukommt; letzterer müsste je nach den Versuchsbedingungen nach einem der früheren Beispiele über

Strömung in körperlichen Leitern wenigstens angenähert berechnet werden.

Bei der Leitung durch Drähte ist jedoch dieser Fehler selbst bei ungünstiger Versuchsanordnung nur sehr klein, er kann aber nahezu in allen Fällen durch passende Stromzuleitung vollständig vermieden werden.

Wir bleiben daher bei der Voraussetzung dass die Potentiale V_1 und V_2 im Anfangs- und Endquerschnitt constant seien und daraus folgt dass die Strömungslinien parallele Gerade sind und zwar nicht nur in ihrer Nähe sondern längs des ganzen Leiters dessen Oberfläche selbst eine Stromröhre ist. Wählen wir nämlich die Längsrichtung des Cylinders als x-Axe so wird in unmittelbarer Nähe des Anfangsquerschnittes $\frac{dV}{dx} = \text{Const.}$ also $\frac{d^2 V}{dx^2} = 0$. Nun muss aber gemäss der Symmetrie des Systems auch $\frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{d^2 V}{dz^2}$ sein, und da ferner für jeden Punkt im Innern die Gleichung $\Delta V = 0$ gilt so folgt auch $\frac{d^2 V}{dy^2} = \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$ d. h. die Niveauflächen bleiben Ebenen, oder Querschnitte des Leiters.

Ebene Niveauflächen sind aber, wie wir wissen, immer äquidistant und daraus folgt dass die Kraft oder das Potentialgefälle längs des Cylinders constant bleibt.

Sind daher V_1 und V_2 die Potentiale zweier Querschnitte in der Distanz l, so ist die Kraft F_n:

$$F_n = \frac{V_1 - V_2}{l}$$

und wir erhalten für die Intensität der Strömung J den Ausdruck:

$$J = c \int F_n \, dS = c \cdot \frac{V_1 - V_2}{l} \cdot q$$

wenn wir den constanten Querschnitt des Leiters mit q bezeichnen.

Der Widerstand W erscheint dann ausgedrückt durch:

$$W = \frac{l}{c \cdot q}.$$

Diese beiden Formeln drücken das bekannte Gesetz von **Ohm** aus:

$$J = \frac{\varepsilon}{W}.$$

Aus dem linearen Potentialgefälle ergibt sich der Werth V_x in · Distanz x vom Anfangsquerschnitt unmittelbar.

Es ist:

$$V_x = V_1 - \frac{V_1 - V_2}{l} \cdot x.$$

Der Ausdruck für den Widerstand lehrt uns, dass derselbe bei em homogenen cylindrischen Leiter der Länge direct, dem Quer-nitte und der Leitungsconstante c verkehrt proportional ist. Die leutung dieser Constante geht dabei auch deutlich hervor, denn sen wir in der Formel für W die Grössen l und q gleich 1 werden, wird

$$W = \frac{1}{c}.$$

Es ist also c der reciproke Werth des Widerstandes, oder das tungsvermögen eines Cylinders von der Länge 1 und dem Quer-nitte 1; dieses sogenannte specifische Leitungsvermögen ist für betreffende Substanz eine Constante, deren Werthe wir später :h kennen lernen werden.

Das Potentialgefälle $\frac{V_1 - V_2}{l} = A$ in einem cylindrischen Leiter also ein constantes, solange der Querschnitt q und diese Grösse c ıstant bleibt; stossen aber z. B. zwei Leiter von derselben Substanz ır von verschiedenem Querschnitte aneinander so wird A in beiden :h einen verschiedenen Werth haben. Dasselbe gilt, wenn die beiden ter von gleichem Querschnitte aber aus verschiedenem Materiale (c) d, oder endlich wenn sowohl q als c variirt. Innerhalb eines en Leiters aber wird A einen bestimmten constanten Werth be-:en der sich bei dem Uebergang aus dem einen in den anderen lert. Die Potentialcurve wird dann eine gebrochene Gerade, wobei Knickung dem Verbindungspunkte der Leiter entspricht.

Da die Strömung stationär ist, so muss die Intensität J_1 im :en gleich der Intensität J_2 im zweiten Leiter sein; man hat somit

$$J_1 = J_2 = c_1 q_1 A_1 = c_2 q_2 A_2$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c_2 q_2}{c_1 q_1}.$$

Diese Gleichung drückt das Verhältniss der Potentialgefälle in ı beiden Leitern aus; für die speciellen Fälle wo $q_1 = q_2$ oder $= c_2$ ist, hat man:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{c_2}{c_1} \text{ oder } \frac{A_1}{A_2} = \frac{q_2}{q_1}.$$

Da die Widerstände ω_1 und ω_2 auf den Strecken mit den Gefällen A_1 und A_2 durch die Gleichung gegeben sind:

$$\omega_1 = \frac{1}{c_1\, q_1} \qquad \omega_2 = \frac{1}{c_2\, q_2}$$

so wird auch

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

d. h. die Potentialgefälle sind ganz allgemein den Widerständen per Längeneinheit proportional.

Das Ohm'sche Gesetz gehört unstreitig zu den experimentell am besten bestätigten der ganzen Physik; es ist geprüft für alle Arten von Leitern, sowohl flüssige als feste, und innerhalb der denkbar weitesten Grenzen in Bezug auf die Widerstände und elektromotorischen Kräfte. So wurden z. B. auf Vorschlag Maxwell's in dem Ausdrucke $W = \frac{\varepsilon}{J}$ die Grössen ε und J so viel als möglich variirt, ohne dass sich dabei der Werth von W um mehr als den 10^{12} Theil geändert hätte. Scheinbare Ausnahmen von diesem Gesetze die in einzelnen Fällen beobachtet wurden, haben sich stets auf ihre Fehlerquellen zurückführen lassen respective auf den Umstand dass die Bedingungen, unter denen das Ohm'sche Gesetz gilt, nicht erfüllt waren. So scheint z. B. der Widerstand in einem verdünnten Gase durchaus nicht der Länge der Gassäule proportional zu sein, es ist aber auch mehr als zweifelhaft, dass man es hier mit einer stationären Strömung zu thun hat.

Den Verlauf des Potentialgefälles längs eines Drahtes kann man in seiner Abhängigkeit vom Querschnitte und vom Leitungsvermögen der Substanz, falls der Draht aus mehreren Stücken zusammengesetzt ist, sehr gut mit Hilfe des Elektrometers verfolgen. Man verbindet z. B. das eine Ende des zu untersuchenden Leiters mit einem Pole einer Batterie vom Potentiale V deren anderer Pol sowie das zweite Ende des Drahtes zur Erde geleitet sind. Tastet man nun mit dem Ende der zum Elektrometer führenden Leitung den Draht der Länge nach ab, so zeigt das Elektrometer Potentialwerthe die zwischen V und 0 liegen und deren Abfall mit der durchlaufenen Leiterstrecke eben nach dem Ohm'schen Gesetze in Zusammenhang steht. Es lässt sich dann leicht zeigen, dass die Potentialdifferenzen je zweier Querschnitte den zwischen ihnen liegenden Widerständen direct proportional sind.

Auch für flüssige Leiter lässt sich die Demonstration nach demselben Principe ausführen, wenn man die Flüssigkeit in einen länglichen parallelepipedischen Glastrog füllt und den Strom durch zwei den Querschnitt ganz ausfüllende Metallplatten ein- und ausleitet. Eine mit dem Elektrometer verbundene Tastelektrode, die bis auf ihre Spitze mit einer isolirenden Substanz überzogen ist, gestattet dann das Potential an allen Punkten zu prüfen, wobei man auch den Nachweis liefern kann, dass dasselbe innerhalb eines Querschnittes nicht variirt. Um den störenden Einfluss der galvanischen Polarisation zu vermeiden, wird man alle Elektroden aus Zink, und als Flüssigkeit Zinkvitriollösung wählen, oder Kupfer und Kupfervitriollösung.

Auch ohne Elektrometer lässt sich mit Hilfe einer Boussole die Richtigkeit des Ohm'schen Gesetzes zeigen; man leitet den einen Pol einer Batterie aus mehreren Elementen (*B* Fig. 80) direct, den anderen durch den Untersuchungsdraht *L* zur Erde. Das Potential sinkt dann längs desselben von *V* auf 0 ab. Man nimmt nun ein einzelnes Daniell'sches Element *D*, leitet dessen einen Pol ebenfalls zur Erde den anderen durch die Boussole *g* zu einem beweglichen Contact; mit diesem sucht man nun auf *L* jenen Punkt *a* auf, bei dessen Berührung kein Strom durch die Boussole geht, wobei man dann weiss, dass das Potential in *a* gleich 1 Daniell ist. Schaltet man nun an Stelle des einen Daniell deren zwei, drei u. s. w. ein, so werden die entsprechenden Punkte *b*, *c* u. s. w. dem Ohm'schen Gesetze zufolge äquidistant liegen müssen wenn der Draht gleichförmig ist; durch eine einfache Längenmessung kann man sich so von der Richtigkeit des Gesetzes überzeugen.



Fig. 80.

§ 64. Dimension der Leitungsfähigkeit.

Der im Ohm'schen Gesetze

$$J = \frac{\varepsilon}{W} = \varepsilon \cdot L$$

vorkommende Begriff der Leitungsfähigkeit *L* hat eine ganz bestimmte physikalische Bedeutung, die sich aus der Betrachtung der übrigen in der Formel vorkommenden Grössen folgendermassen ergibt. Die Intensität *J* haben wir als jene Elektricitätsmenge definirt welche in der

Zeiteinheit durch den Querschnitt fliesst, es ist also, wenn m eine elektrische Quantität und t eine Zeit bezeichnet:

$$J = \frac{m}{t}.$$

Die elektromotorische Kraft ε ist als Potentialdifferenz durch den Ausdruck darstellbar:

$$\varepsilon = \frac{m}{l}$$

wo l eine Länge bedeutet. Man hat somit für das Leitungsvermögen L:

$$L = \frac{J}{\varepsilon} = \frac{l}{t}.$$

Dieses Verhältniss von Länge zur Zeit ist aber nichts anderes als eine Geschwindigkeit, und als solche stellt sich somit die Leitungsfähigkeit eines Körpers dar.

Um dies an einem bestimmten Beispiele anschaulich zu machen, betrachten wir den folgenden Fall. Es sei eine leitende Kugel mit dem Radius ρ und der statischen Ladung m gegeben; ihr Potential ist dann

$$V = \frac{m}{\rho}$$

wobei selbstverständlich vorausgesetzt ist dass sich andere elektrische Massen nicht in der Nähe befinden. Man denke sich nun diese Kugel durch einen Draht vom Leitungsvermögen L mit der Erde verbunden, so wird je nach der Geschwindigkeit mit welcher die Ladung abströmt, das Potential sinken. Wir lassen nun die Kugel sich gleichzeitig contrahiren und zwar soll dies mit einer solchen Geschwindigkeit geschehen dass trotz des Abströmens ihr Potential constant bleibt.

Strömt in der Zeit $d\,t$ die Menge $d\,m$ ab und verkleinert sich gleichzeitig der Radius um $d\,\rho$, so ist nach Verlauf von $d\,t$ das Potential:

$$V = \frac{m}{\rho} = \frac{m - d\,m}{\rho - d\,\rho}$$

und daraus ergibt sich

$$m\,d\,\rho = \rho\,d\,m \text{ oder } \frac{m}{\rho} = \frac{d\,m}{d\,\rho} = V.$$

Nach dem Ohm'schen Gesetze ist aber die Elektricitätsmenge welche in der Zeit $d t$ abfliesst:

$$d m = V \cdot L \cdot d t = \frac{d m}{d \rho} L \cdot d t$$

und daraus folgt:

$$d \rho = L \cdot d t \text{ oder } L = \frac{d \rho}{d t}.$$

Die Leitungsfähigkeit L des Drahtes ist somit die Geschwindigkeit mit welcher sich der Kugelradius verkleinern müsste, damit das Potential der Kugel trotz der Ableitung zur Erde constant bleibt.

XVII. Capitel.

Wirkungen des galvanischen Stromes; Messung der Intensität.

§ 65. Erwärmung der Leitungsbahn durch den Strom.

Der elektrische Strom hat nur eine einzige Eigenschaft: seine Intensität, und alle Wirkungen welche er nach aussen auszuüben vermag, hängen allein von dieser ab. Circuliren durch zwei beliebige Leiter zwei Ströme ganz verschiedener Provenienz aber von gleicher Intensität, so sind ihre Wirkungen nach aussen unter allen Umständen identisch und lassen kein Unterscheidungszeichen für beide Ströme zu. Man darf sich in Bezug auf diesen Satz nicht durch scheinbare Ausnahmen irre machen lassen wie z. B. die ist, dass von zwei Strömen gleicher Intensität der eine im Stande sein kann, Wasser zu zersetzen (wenn seine elektromotorische Kraft genügend gross ist) der andere nicht. In diesem Falle führen wir durch den Wasserzersetzungsapparat eine neue elektromotorische Kraft (Polarisation) in den Stromkreis ein d. h. wir fügen zu jedem der beiden primären Ströme noch je einen in entgegengesetzter Richtung hinzu; diese letzteren sind aber von ungleicher Intensität da die Widerstände der beiden Kreise verschieden sein müssen, und es läuft somit die ganze Operation darauf hinaus dass wir zu den ursprünglich gleichen Strömen je einen entgegengesetzten hinzufügen; da letztere ungleiche Intensität besitzen so müssen natürlich auch die resultirenden Ströme verschieden ausfallen, wobei die Intensität des einen bis Null absinken kann. In diesem Falle vergleichen wir eben nicht mehr die ursprünglichen Ströme, sondern das Resultat einer ganz neuen Stromcombination.

Nichtsdestoweniger ist es in vielen Fällen doch von hohem Interesse die beiden anderen Grössen des Ohm'schen Gesetzes ε und W

nicht nur in ihrem Verhältniss zu einander als J, sondern auch ihrem absoluten Werthe nach zu kennen, respective in ihrem Verhältniss zu den gewählten Einheiten der elektromotorischen Kraft und des Widerstandes. Diese Maassbestimmungen sind der Natur der Sache nach nur möglich, indem wir die Wirkungen der Ströme untersuchen und diese mit der Intensität derselben in eine Relation zu setzen trachten.

Als erste dieser Wirkungen betrachten wir die Wärmeentwicklung welche ein Strom in seiner Bahn hervorruft.

Ist die Intensität des Stromes J so heisst das, es fliesst durch jeden Querschnitt des Leiters in der Zeiteinheit die Elektricitätsmenge J, in der Zeit t somit die Menge $J \cdot t$. Betrachten wir ein Leiterstück welches zwischen den Querschnitten mit den Potentialen V_1 und V_2 liegt, an dessen Enden somit die elektromotorische Kraft $\varepsilon = V_1 - V_2$ wirkt; die Arbeit welche die Einheit der Elektricität leistet wenn sie vom Potential V_1 auf das Potential V_2 gebracht wird ist bekanntlich gleich $(V_1 - V_2)$ oder gleich ε. Nun kommt aber in unserem Falle in der Zeit t nicht die Einheit sondern die Elektricitätsmenge $J \cdot t$ von V_1 auf V_2 und somit ist die geleistete Arbeit A:

$$A = J(V_1 - V_2)\, t = J \cdot \varepsilon \cdot t$$

und wenn wir noch für ε die Grössen des Ohm'schen Gesetzes einführen:

$$A = J \cdot \varepsilon \cdot t = J^2 \cdot W \cdot t.$$

Diese Arbeit erscheint als Wärme im Schliessungskreis und man kann, mit Hinweglassung einer Proportionalitätsconstante die von den gewählten Einheiten abhängt, schreiben:

$$Q = J^2 \cdot W \cdot t$$

wo Q die in der Zeit t in einem Leiter vom Widerstande W durch die Intensität J erzeugte Wärmemenge bedeutet. In dieser Form wurde das Gesetz zuerst von Joule ausgesprochen dessen Namen es auch trägt.

Es folgt aus der vorstehenden Formel dass in zwei Stücken eines Leiters durch welche derselbe Strom geht, sich die erzeugten Wärmemengen wie die Widerstände verhalten; davon überzeugt man sich, wenigstens qualitativ, in sehr augenfälliger Weise wenn man den Strom durch abwechselnd aneinandergeknüpfte Stücke von Kupfer- und Platindraht von annähernd gleicher Stärke gehen lässt. Da Platin viel schlechter leitet als Kupfer so beobachtet man bei genügender Stromstärke ein helles Glühen, ja sogar Abschmelzen der Platinstücke während die Kupfertheile noch ganz dunkel bleiben. Auf demselben

Umstande beruht bekanntlich das elektrische Glühlicht, wo gleichfalls nur in einem kleinen Theile der Leitung (Kohlenbügel) wegen des grossen Widerstandes eine beträchtliche Wärmeentwicklung stattfindet. Im elektrischen Bogenlicht, sowie in allen Funkenerscheinungen treten uns analoge Fälle entgegen.

Wir haben somit in der Erwärmung eines Leiters von bestimmtem Widerstand ein Mittel an der Hand zwei Stromstärken mit einander zu vergleichen, es ist aber einleuchtend dass bei der Schwierigkeit Wärmemengen zu messen dieses Mittel ein sehr umständliches und unzulängliches sein wird; dessenungeachtet wurde es in früheren Zeiten öfters verwendet, hat aber gegenwärtig wohl kein praktisches Interesse mehr.

§ 66. Wechselwirkung zwischen Strömen.

Elektrische Ströme üben auf einander eine Fernwirkung aus, deren Charakter ein wesentlich anderer als der der elektrostatischen Kräfte ist; da diese sogenannten elektrodynamischen Kräfte auch von den Intensitäten abhängen und zugleich einer genauen Messung zugänglich sind, so liefern sie eines der besten Hilfsmittel für Intensitätsmessungen überhaupt und es ist daher nothwendig dass wir ihre Wirkungsweise wenigstens in den äussersten Umrissen, soweit es zum Verständniss der Maassmethoden nothwendig ist, betrachten.

Sind im Raume zwei beliebige lineare Stromelemente vorhanden von den Längen dS und dS', sind die Ströme welche sie durchfliessen J und J', ihre Distanz r, die Winkel zwischen r und den Elementen ϑ und ϑ' und ist schliesslich der Winkel welchen beide Elemente mit einander bilden α, so üben diese Elemente auf einander eine Kraft F aus, die durch die folgende Relation bestimmt ist:

$$F = \frac{J \cdot J' \cdot dS \cdot dS'}{r^2}\left(\cos\alpha - \frac{3}{2}\cos\vartheta \cdot \cos\vartheta'\right).$$

Diese Kraft ist eine Anziehung wenn beide Ströme in Bezug auf den Winkel den sie mit einander bilden dieselbe Richtung haben, andernfalls ist sie eine Abstossung. Wie aus der Formel selbst hervorgeht wird F seinen grössten Werth erreichen wenn $\vartheta = \vartheta' = 90^\circ$ und $\alpha = 0^\circ$ wird d. h. wenn die Ströme parallel verlaufen.

Da nun eine jede fernwirkende Kraft die Tendenz hat das System zwischen welchem sie wirkt auf ein Minimum der Energie zu bringen, so werden je zwei Ströme, wenn sie beweglich und sich selbst überlassen sind, sich parallel zu einander stellen.

Die obige Formel, welche zuerst von Ampère aufgestellt wurde, ist einer directen Prüfung nicht zugänglich, da wir niemals mit einzelnen Leiterstücken operiren können, sondern immer nur mit vollständig geschlossenen Stromkreisen; leitet man aber aus derselben die Wirkung solcher geschlossener Ströme auf einander ab, so kommt man allerdings zu Resultaten die mit der Erfahrung in Einklang stehen, wobei jedoch bemerkt werden muss dass man dazu auch kommt, wenn man von etwas anderen Voraussetzungen ausgeht wie Ampère.

Zwei geschlossene, z. B. kreisförmige Strombahnen haben gleichfalls die Tendenz sich mit ihren Ebenen parallel zu stellen; da für die Praxis aber stets eine Zu- und Ableitung des Stromes erforderlich ist, so gibt man ihnen die in Fig. 81 veranschaulichte Gestalt, wobei die geradlinigen, möglichst nahe aneinanderliegenden Stromenden in



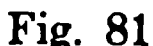


Fig. 81.

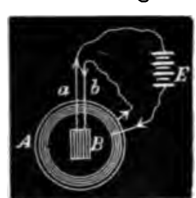


Fig. 82.

ihrer Wirkung nach aussen sich aufheben, indem sie von gleichen Strömen aber mit entgegengesetztem Vorzeichen durchflossen werden.

Um eine solche Anordnung nun für die Intensitätsmessung praktisch zu gestalten wird man die Anzahl der Windungen, und damit auch die Grösse der Kraft thunlichst vermehren d. h. anstatt einzelner Drahtwindungen ganze Spulen verwenden. Fig. 82 zeigt das Schema des von Weber zuerst construirten Elektrodynamometers.

A und B sind zwei Spulen, A ist fix, B an den Drahtenden a, b bifilar aufgehängt; der zu messende Strom der Quelle E durchfliesst beide Spulen hinter einander, so dass also $J = J'$ wird. Die Ebenen von A und B stehen ursprünglich auf einander senkrecht und die Wirkung der elektrodynamischen Kräfte geht dahin B parallel zu A zu richten.

Dabei ist aber das Torsionsmoment von B zu überwinden und da dieses mit der Grösse des Drehungswinkels α wächst, die Kraft dagegen abnimmt, so gibt es für jedes J eine stabile Gleichgewichtslage. Diese wird mit Spiegel und Scala beobachtet und man hat für dieselbe die Bedingungsgleichungen:

$$F = p \cdot J^2 \cdot \cos \alpha = p' D \cdot \sin \alpha$$

wo p, p' Constante und D das statische Directionsmoment der beweglichen Spule, also gleichfalls eine Constante, bedeutet.

Es ergibt sich somit:

$$J^2 = p \cdot \text{tang}\, \alpha$$

d. h. die jeweilige Stromstärke ist der Wurzel aus der Tangente des Ablenkungswinkels proportional. Lässt man hinter einander zwei Ströme J und J' durch den Apparat passiren und beobachtet die beiden Ablenkungen α und α' so ergibt sich das gesuchte Intensitätsverhältniss aus:

$$\frac{J^2}{J'^2} = \frac{\text{tang}\, \alpha}{\text{tang}\, \alpha'}.$$

Dieser Apparat hat einen Vorzug den keiner der später noch zu besprechenden besitzt, nämlich die Unabhängigkeit des Ausschlages von der Stromrichtung; in Folge dessen kann er auch mit Vortheil zur Messung alternirender Ströme verwendet werden.

§ 67. Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten.

Hängt man eine von einem Strome durchflossene Drahtspule, ein sogenanntes Solenoid, möglichst frei beweglich auf, so zeigt dieses ganz das Verhalten eines mit zwei Polen versehenen permanenten Magneten dessen Axe mit der Axe des Solenoids zusammenfällt. Es stellt sich von selbst in den magnetischen Meridian, es wird von einem Magnete gerade so beeinflusst wie ein anderer beweglicher Magnet, es wirken zwei Solenoide mit ihren scheinbaren Polen so auf einander wie zwei Magnete, es zeigt endlich ein solches nach aussen genau die Kraftlinien wie wir sie bei einem Magneten mittelst der Eisenfeilspäne darstellen können. Dieses Verhalten hat Ampère dazu geführt die Magnete selbst als Solenoide aufzufassen, wobei jedes Eisenmolekül als von einem dauernden Strom durchflossen gedacht wird. Sind die Ebenen dieser Strombahnen beliebig im Raume gelegen so ist ihre Wirkung nach aussen gleich Null, werden sie aber alle durch irgend ein Hilfsmittel parallel gestellt z. B. durch Bestreichen des Stahls mit einem Magnete oder durch die Einwirkung eines kräftigen Stromes, so resultirt ein Solenoid das das eine Mal als permanenter Magnet das andere Mal als Elektromagnet erscheint.

Wir können demnach im Weber'schen Elektrodynamometer die bewegliche Spule auch durch einen permanenten Magneten ersetzen und erhalten so den Typus des Galvanometers, wobei jedoch zu bemerken ist, dass bei einem etwaigen Stromwechsel in der äusseren

Spule jetzt das Solenoid innen ungeändert bleibt, ein Stromwechsel also auch mit einer Richtungsänderung des Ausschlages verbunden ist.

Sind die Ablenkungswinkel klein, wie dies immer der Fall zu sein pflegt wenn man mit Fernrohr und Scala beobachtet, so wird die Intensität einfach den Ablenkungen proportional.

Die Richtung nach welcher der Magnet im Centrum des Stromkreises abgelenkt wird ist durch die bekannte Regel von Ampère gegeben: denkt man sich selbst in die Strombahn verlegt, mit dem Kopfe im Sinne des Stromes und mit dem Gesichte gegen den Magneten, so wird der Nordpol desselben zur linken Hand abgelenkt.

Die Galvanometer sind gewöhnlich auf grosse Empfindlichkeit berechnet und daher nur zur Messung sehr schwacher Ströme verwendbar; sollen stärkere Ströme in Bezug auf ihre Intensitäten mit einander verglichen werden, so bedient man sich der sogenannten Tangenten- oder Sinusboussolen. Dieselben bestehen aus einer Declinationsnadel mit Theilkreis um welche als Centrum eine flache Drahtspule von 20—30 cm Durchmesser gelegt ist. Die Ebene der Spule steht vertical und ist um eine durch die Nadel gehende verticale Axe drehbar. Will man den Apparat als Tangentenboussole benützen so stellt man die Ebene der Spule in den magnetischen Meridian MM' (Fig. 83). Leitet man nun einen Strom durch dieselbe so erfolgt eine dauernde Ablenkung der Nadel Sn um den Winkel α. Dabei wirken folgende Kräfte auf jeden Pol: die Kraft J senkrecht zur Ebene der Spule und proportional der Stromstärke J, und zweitens die Kraft H parallel zum magnetischen Meridian, herrührend von der Horizontalcomponente des Erdmagnetismus H und dieser gleichfalls proportional. In die mögliche Bewegungsrichtung des Poles fallen von diesen Kräften die Componenten p und q: $p = K \cdot J \cdot \cos\alpha$, $q = K' H \cdot \sin\alpha$ wo K und K' Constante des Apparates bezeichnen. Soll Gleichgewicht herrschen so muss mithin sein:



Fig. 83.

$$K \cdot J \cdot \cos\alpha = K' \cdot H \cdot \sin\alpha$$

oder

$$J = \gamma \cdot \tan\alpha$$

wo γ eine für den betreffenden Apparat und Beobachtungsort constante Grösse vorstellt.

Die Kraft J ist strenge genommen nur innerhalb sehr kleiner Abweichungen des Magnetpoles aus der Ebene der Spule der Stromintensität proportional, es gilt daher das Tangentengesetz auch nicht

strenge wenn nicht die Nadel eine sehr geringe Länge hat. In der Praxis wird es als genügend angesehen wenn der Durchmesser der Spule das 10—12fache der Nadellänge beträgt.

Dreht man, während die Nadel abgelenkt wird, die Spule um ihre Axe so zwar dass schliesslich die Nadel wieder in der Spulenebene liegt so ist man von diesem Fehler ganz frei, und die ablenkende Kraft J des Stromes fällt nun ganz in die Bewegungsrichtung des Poles, oder es wird $p = J$. Als Gleichgewichtsbedingung hat man folglich:

$$J = K' \cdot H \cdot \sin \alpha \quad \text{oder} \quad J = \beta \cdot \sin \alpha$$

wo β wieder eine Constante ist solange die Intensität des Erdmagnetismus sich nicht verändert, und α den Winkel bedeutet um welchen die Spulenebene aus dem magnetischen Meridian gedreht werden musste, um wieder mit der Nadelrichtung zusammenzufallen.

§ 68. Chemische Wirkungen des Stromes.

Es wurde schon erwähnt dass man einen strengen qualitativen Unterschied zwischen Leitern und Isolatoren nicht machen kann, indem ein jeder Körper, selbst die Gase, bis zu einem gewissen Grade ein Entweichen der Elektricität gestatten; in Folge der Polarisation und Absorption erscheinen auch die besten Isolatoren mit einer gewissen Leitungsfähigkeit begabt und es erscheint daher nothwendig eine bestimmte Grenze zwischen Leitern und Isolatoren festzusetzen. Wenn wir im Folgenden von Leitern sprechen so sind darunter immer Substanzen gemeint bei welchen sich deutlich eine stationäre, also dem Ohm'schen Gesetze folgende Strömung nachweisen lässt; Substanzen in welchen eine solche nicht zu Stande kommt, nennen wir Isolatoren.

Ein galvanischer Strom bringt in dem von ihm durchflossenen Leiter stets eine bestimmte physikalische Veränderung hervor, nämlich die Erwärmung nach dem Joule'schen Gesetze; es ist von mehreren Seiten behauptet worden dass ausser dieser Veränderung noch eine andere eintritt, nämlich eine von der erzeugten Wärme unabhängige, direct durch die Einwirkung der Elektricität hervorgerufene Volumvermehrung des Leiters. Diese Ansicht hat sich als eine irrige herausgestellt, die Volumsänderung ist immer nur secundär d. h. durch die Joule'sche Wärme bedingt, und ganz unabhängig davon wie diese Wärme im Leiter entwickelt wird, ob auf elektrischem oder auf irgend einem anderen Wege.

Dagegen können unter Umständen in einem Leiter nebst der Erwärmung auch noch chemische Veränderungen durch den Strom hervorgerufen werden, auf deren Gesetze wir im Folgenden näher eingehen wollen.

Besteht der Leiter aus einem Grundstoff, also aus einer chemisch einfachen Substanz, so erleidet er durch den Durchgang des Stromes keinerlei chemische Veränderung, und das ist der gewöhnliche Fall bei festen Leitern; ist er aber chemisch zusammengesetzt, so tritt der äusserst merkwürdige Fall ein, dass ein Stromdurchgang auch immer mit einem Zerfall der chemischen Verbindung in ihre Bestandtheile, die sogenannten Ionen, verbunden ist. Es hat sich bisher trotz der sorgfältigsten Untersuchungen eine sogenannte metallische Leitung in chemisch zusammengesetzten Körpern, d. h. eine Leitung ohne chemische Zersetzung, in keinem Falle nachweisen lassen.

Aber nicht jeder chemisch zusammengesetzte Körper ist ein Leiter; viele davon sind Isolatoren und es scheint das Leitungsvermögen umsomehr abzunehmen, je complicirter die Moleküle constituirt sind.

Chemische Verbindungen welche leiten, nennen wir Elektrolyte und den Process der mit der Leitung verbundenen chemischen Zersetzung die Elektrolyse; in den meisten Fällen sind die Elektrolyte Flüssigkeiten oder Lösungen fester Körper, wir kennen aber auch feste Elektrolyte wie z. B. das Halbschwefelkupfer, das Glas etc. Auch bei Gasen scheint durch die Entladungen starker Elektricitätsquellen eine Art Elektrolyse aufzutreten und damit ein Zerfall in ihre chemischen Bestandtheile, es ist aber schwer zu entscheiden wie viel davon etwa durch Dissociation in Folge der hohen Temperatur bewirkt wird.

Die Leitungsvermögen der Grundstoffe liegen innerhalb ausserordentlich weiter Grenzen: setzen wir das Leitungsvermögen des Quecksilbers $= 1$ so ist dasjenige für den besten Leiter, nämlich Silber, gleich 160 und das für den schlechtesten, Brom, gleich 10^{-13}; ähnlich sind die Grenzen für die Elektrolyte: Salpetersäure $= 10^{-4}$ und die fetten Oele $= 10^{-17}$.

Isolatoren finden wir sowohl unter den Grundstoffen (Schwefel) als unter den chemischen Verbindungen (Paraffin), sowohl unter den festen als unter den flüssigen und gasförmigen Körpern, so dass sich ein bestimmter Schluss aus den physikalischen und chemischen Constanten einer Substanz auf ihr eventuelles Leitungsvermögen absolut nicht ziehen lässt.

Der Vorgang der Elektrolyse ist ein seinem Wesen nach bisher och völlig unaufgeklärter, so dass wir uns darauf beschränken müssen, ie empirisch gefundenen Gesetze desselben, die ihn allerdings sehr enau charakterisiren, wiederzugeben. Die vier folgenden Gesetze önnen als experimentell festgestellt angesehen werden:

1. Zur Zerlegung eines Elektrolyten genügt die geringste elektromotorische Kraft, d. h. herrscht im Inneren desselben nur die geringste nachweisbare Potentialdifferenz so tritt die Zerlegung der Substanz, und Circulation des Stromes ein.
2. Die von einem constanten Strom in verschiedenen Zeiten zersetzten Mengen eines Elektrolyten sind den Zeiten proportional.
3. Die von verschiedenen Strömen in gleichen Zeiten zersetzten Mengen desselben Elektrolyten sind den Stromstärken proportional.
4. Die von demselben Strom in der gleichen Zeit zersetzten Mengen verschiedener Elektrolyte sind unter einander chemisch äquivalente Mengen.

Wie in so vielen Fällen auf dem Gebiete der Elektricität, so rdanken wir auch hier Faraday die erste Aufstellung leitender esichtspunkte; speciell die beiden letzten Gesetze wurden von ihm erst ausgesprochen und sind bekannt als Faraday's elektrolyche Gesetze.

Wenn ein Elektrolyt, z. B. HCl, von einem Strom zerlegt wird erscheinen seine Bestandtheile, die Ionen H und Cl, getrennt an n beiden Elektroden von denen wir voraussetzen wollen dass sie cht chemisch auf dieselben reagiren. Da die Verbindung von H d Cl zu HCl eine gewisse Arbeit liefert — gemessen durch die rbindungswärme — so folgt dass auch zu ihrer dauernden Trennung m Strom eine gewisse Arbeit geleistet werden muss. In welcher rm dies geschieht wird aus der Theorie der galvanischen Polarition noch näher hervorgehen. Hier sei nur das Folgende bemerkt: ird das System der getrennten Ionen sich selbst überlassen so erfolgt ne Wiedervereinigung derselben, wobei die gewonnene Verbindungsbeit als elektromotorische Kraft (der Polarisation) erscheint. Diese irkt der Kraft des primären Stromes, ε, entgegen und erscheint, wie itürlich, nicht nur wenn derselbe unterbrochen wird sondern auch enn er circulirt. Bezeichnen wir dieselbe mit p so ist jetzt die Intenät des Gesammtstromes nicht mehr

$$J = \frac{\varepsilon}{w} \text{ sondern } J' = \frac{\varepsilon - p}{w}.$$

Der Strom erscheint also geschwächt und wird überhaupt erst eine von Null verschiedene Intensität annehmen wenn die Potentialdifferenz ε der Elektroden grösser als p wird.

Die Mehrleistung des Stromes, falls ein Theil der Schliessung aus einem Elektrolyten besteht, liegt also in der continuirlichen Ueberwindung der Gegenkraft p der Polarisation. Wie wir später sehen werden verhindert alles was eine Wiedervereinigung der Ionen hintanhält auch das Auftreten der Polarisation.

Der Vorgang der Elektrolyse lässt sich einigermassen begreifen wenn man an der Darstellung von Williamson und Clausius über die Constitution flüssiger chemischer Verbindungen festhält.

Danach hätte man sich das Molekül eines Elektrolyten (HCl) nicht als eine feste und dauernde Verbindung der Theilmoleküle (H, Cl) vorzustellen, sondern als in einem Zustande beständigen Zerfalles und beständiger Regeneration begriffen, wobei aber nicht immer dieselben Theilmoleküle sich wieder zu demselben Molekül zu vereinigen brauchen. Es ist klar dass ein solcher Zustand keine Arbeitsleistung erfordert und auch äusserlich nicht erkennbar sein wird; er unterscheidet sich von dem gewöhnlich angenommenen nur dadurch dass in jedem Momente in jeder Volumeinheit ausser einer gewissen Menge Moleküle auch noch eine bestimmte Anzahl freier Theilmoleküle vorausgesetzt wird. Diese letzteren verhalten sich nun ganz wie entgegengesetzt elektrisirte Körperchen; wirkt keine äussere Kraft auf dieselben so erfolgen in jedem Momente ebenso viel Wiedervereinigungen wie Trennungen, befinden sich dieselben aber in einem elektrischen Feld so werden sie nach entgegengesetzten Seiten getrieben, und dadurch muss an diesen sich je ein Ueberschuss der einen Art Theilmoleküle ergeben, und dieser Ueberschuss wird an den Elektroden als Ionen frei. Es lässt sich so das erste der oben aufgestellten Gesetze begreifen demzufolge schon der geringste Strom eine dauernde Elektrolyse zu unterhalten vermag.

Aus dem eben besprochenen Verhalten der Theilmoleküle geht mit viel Wahrscheinlichkeit hervor dass dieselben mit gleichen und entgegengesetzten elektrischen Ladungen versehen sind, und es scheint die elektrolytische Leitung geradezu in einem Transport dieser Ladungen von einer Elektrode zur anderen zu bestehen. Damit steht auch das dritte Gesetz im Einklang wonach die zersetzten Mengen den Stromstärken proportional sind. Ist dem so, dann folgt aber aus dem vierten Gesetze eine ausserordentlich wichtige Thatsache, nämlich die dass chemisch äquivalente Mengen verschiedener Substanzen auch mit

gleichen elektrischen Ladungen versehen sind, oder mit anderen Worten dass alle Quantitäten, welcher Substanz immer, wenn sie gleiche molekulare Ladungen besitzen einander chemisch äquivalent sind. Von diesem wichtigen Satze werden wir später noch Gebrauch machen.

Aus dem Vorstehenden ergibt sich mit Hilfe des dritten der aufgestellten Gesetze von selbst der Weg den man zu betreten hat um aus den chemischen Wirkungen einen Schluss auf die Stromintensitäten zu ziehen. Es handelt sich darum die Mengen des zersetzten Elektrolyten möglichst genau zu bestimmen wenn derselbe in den Zeiten $t_1\, t_2$ von den Stromstärken $J_1\, J_2$ durchflossen wird. Sind diese Mengen m_1 und m_2, so bestehen die Relationen:

$$m_1 = \gamma \cdot J_1\, t_1 \qquad m_2 = \gamma \cdot J_2\, t_2$$

wo γ eine Proportionalitätsconstante bedeutet, und daraus folgt:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{J_1\, t_1}{J_2\, t_2} \text{ oder } \frac{J_1}{J_2} = \frac{m_1}{m_2} \cdot \frac{t_2}{t_1}.$$

Es handelt sich darum den Apparaten in welchen man die Elektrolyse vornimmt, den sogenannten Voltametern, eine möglichst günstige Construction zu geben. Erfordern die Messungen keine grosse Genauigkeit so verwendet man als Elektrolyt Wasser das mit etwas Schwefelsäure behufs besserer Leitung angesäuert wird, und leitet den Strom durch Platinbleche ein und aus. Die Zersetzungsproducte sind Wasserstoff und Sauerstoff, welche in getheilten Röhren aufgefangen werden; dadurch wird die Genauigkeit der Messung einerseits erhöht, weil die Producte gasförmig also von relativ grossem Volumen sind, andererseits aber auch vermindert weil ein Theil der Gase vom Wasser absorbirt wird. Auch hat man dabei auf Druck und Temperatur sowie auf den Umstand Rücksicht zu nehmen dass an den Platinelektroden eine starke Polarisation auftritt. Wollte man aus der gemessenen Stromstärke auf jene die bei ausgeschaltetem Voltameter herrschen würde einen Schluss ziehen so müsste man die Grösse dieser Polarisation und den Widerstand im Voltameter nach dem Ohm'schen Gesetze in Rechnung ziehen.

Einer grösseren Genauigkeit fähig sind jene Voltameter bei welchen die ausgeschiedenen Ionen sich als feste Körper an den Elektroden niederschlagen und deren Menge daher durch Wägung bestimmt werden kann. Man verwendet dabei als Elektrolyte Salzlösungen im Wasser z. B. Kupfervitriollösung oder Silbernitratlösung und zwar zwischen Elektroden aus Kupfer, respective Silber, weil in diesem Falle die Polarisation gleich Null wird. Auch bleibt dabei die Zu-

sammensetzung der Lösung ungeändert, denn so viel Metall an einer Elektrode abgeschieden wird löst sich gleichzeitig durch den Process der Elektrolyse an der anderen wieder auf. Es nimmt also die eine Elektrode an Gewicht zu und die andere ebenso viel ab, vorausgesetzt dass die Elektrolyse sich ohne chemische Nebenprocesse abspielt, was allerdings nur innerhalb gewisser Stromstärken genau zutrifft. Solche Kupfer- oder Silbervoltameter lassen sehr exacte Strommessungen zu; sie haben auch noch den leicht zu übersehenden Vortheil dass sie keine Polarisation und einen für die meisten Fälle genügend kleinen Widerstand haben, um ihn vernachlässigen zu können.

Den Elektroden dieser Voltameter gibt man gewöhnlich die Form rechteckiger oder kreisrunder Platten und das hat einen eigenthümlichen Uebelstand zur Folge; es liegen nämlich dann die Strömungslinien an den Ecken und Kanten viel dichter als in den mittleren Partien der Platten, und in Folge dessen scheidet sich auch dort ungleich mehr Metall ab und wächst in den bekannten dendritischen Formen weiter. Dadurch wird der Niederschlag inhomogen, behält leicht Flüssigkeit eingeschlossen, und sogar Verluste an Substanz durch Abbröckeln können, namentlich leicht bei Silberelektroden, vorkommen. Es ist daher für genaue Messungen von Vortheil, das elektrische Feld in der Nähe der Elektroden so homogen als möglich zu machen und es bieten sich diesbezüglich die verschiedenen Formen des Condensators zur Nachahmung in Voltametern dar. Das Einfachste wäre die Anwendung eines Kugelcondensators, doch liefert hier sowohl die Construction, als auch für die Praxis der Umstand Schwierigkeiten dass die Distanz beider Elektroden, und somit auch der Widerstand nicht verändert werden kann; Cylindercondensatoren geben an ihren Rändern gleichfalls kein homogenes Feld, dagegen dürfte eine Nachahmung des Thomson'schen Schutzringcondensators als Schutzringvoltameter von den berührten Uebelständen gänzlich frei sein. Man müsste von zwei parallelen Elektrodenplatten die eine bis auf eine centrale Scheibe mit einer isolirenden Substanz z. B. Schellack überziehen oder, wenn man wegen der Wägung das Gewicht der Platte nicht unnöthig vermehren will, wirklich einen getrennten, gefirnissten und mit der Platte leitend verbundenen Schutzring um dieselbe anbringen; auf diese Weise wären die Strömungslinien durchaus parallele Gerade, also das Feld das denkbar homogenste. Zugleich hätte man die Variation des Voltameterwiderstandes vollkommen in der Hand.

XVIII. Capitel.

Messung elektromotorischer Kräfte und Widerstände.

§ 69. Messung elektromotorischer Kräfte.

Im Vorhergehenden haben wir vier, auf verschiedenen Principien beruhende Methoden die Stromstärken J zu messen kennen gelernt, nämlich: 1. durch die Erwärmung der Leitungsbahn, 2. durch die Wechselwirkung zweier Ströme auf einander, 3. durch die Wechselwirkung zwischen Strömen und Magneten und 4. durch die chemischen Wirkungen der Ströme.

Die Möglichkeit, Intensitäten zu messen oder mit einander zu vergleichen, setzt uns in den Stand, auch die Grösse E und W des Ohm'schen Gesetzes auf einfache Weise zu ermitteln; wir wollen zunächst die Principien jener Methoden betrachten, die zur Messung elektromotorischer Kräfte führen.

Jede zu messende Grösse setzt ein der Natur nach gleiches Maass als Einheit voraus; diese Einheit ist immer eine willkürlich gewählte. Speciell für Potentialdifferenzen oder elektromotorische Kräfte haben wir bisher als Einheit die Potentialdifferenz der beiden Pole eines Daniell'schen Elementes gewählt und wollen vorläufig auch diese Einheit beibehalten. Die folgenden 4 Methoden der Messung elektromotorischer Kräfte sind die gewöhnlich gebräuchlichen, und je nach den Versuchsbedingungen selbstverständlich zahlreicher Modificationen fähig.

1. Methode. In den Elektrometern haben wir Apparate kennen gelernt, die Potentialdifferenzen direct mit einander zu vergleichen gestatten; herrscht zwischen zwei Punkten (z. B. den Polen eines galvanischen Elementes) die Potentialdifferenz E und leiten wir einen der Punkte zur Erde, den anderen zum Elektrometer, so beobachten wir einen Ausschlag $\alpha = p \cdot E$. Verfahren wir gleicherweise mit der zweiten elektromotorischen Kraft E', so beobachten wir $\alpha' = p \cdot E'$ und haben somit die Relation:

$$\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'}.$$

Das ist die einfachste Methode zur Bestimmung der elektromotorischen Kräfte offener galvanischer Elemente; im Allgemeinen ist aber die Empfindlichkeit der Elektrometer eine geringere als die der Galvanometer, man wird daher, wo es auf sehr grosse Genauig-

keit ankommt, besser eine der folgenden galvanometrischen Methoden wählen.

2. Methode. Schliesst man ein Element von der elektromotorischen Kraft E und dem Widerstande w durch einen äusseren Widerstand W, so ist die Intensität des Stromes nach dem Ohm'schen Gesetze:

$$J = \frac{E}{W + w}.$$

Enthält die äussere Schliessung ein Galvanometer mit vielen Windungen, so ist es leicht W gegen w sehr gross zu machen, so dass letzteres ganz vernachlässigt werden kann; für zwei zu vergleichende Elemente erhält man dann:

$$J = \frac{E}{W} \text{ und } J_1 = \frac{E_1}{W} \text{ oder } \frac{J}{J_1} = \frac{E}{E_1}.$$

3. Methode. Schaltet man die beiden Elemente einmal in gleichem, das andere Mal in entgegengesetztem Sinne mit einem Galvanometer in dieselbe Schliessung, so ergeben sich die Gleichungen:

$$J = \frac{E + E_1}{W} \qquad J' = \frac{E - E_1}{W}$$

wenn W den Gesammtwiderstand bezeichnet; es ist weiter:

$$J \cdot W = E + E_1$$
$$J' W = E - E_1$$

und daraus erhält man durch Addition, respective Subtraction:

$$(J + J') W = 2 E$$
$$(J - J') W = 2 E_1$$

und schliesslich:

$$\frac{E}{E_1} = \frac{J + J'}{J - J'}.$$

Bei dieser Methode ist zu bemerken, dass der Strom des stärkeren Elementes das schwächere passirt, was unter Umständen eine Aenderung der elektromotorischen Kraft desselben zur Folge haben kann, so dass diese Methode nicht bestimmt definirte Werthe liefert.

4. Methode. In Fig. 84 ist das Schema einer Compensationsmethode dargestellt; $a b$ ist ein möglichst homogener und feiner Draht, dessen Widerstand so gross sei, dass dagegen die Widerstände des Elementes E_1 und seiner Zuleitungen vernachlässigt werden können. Das ganze Potentialgefälle E_1 fällt dann zwischen a und b und ist dem Ohm'schen Gesetze zufolge ein lineares. Der eine Pol des zu

vergleichenden Elementes E_2 ist ebenfalls mit a verbunden, der andere durch das Galvanometer G mit einem Schleifcontact c. Man sucht mit letzterem jenen Punkt auf $a\,b$ auf, bei dessen Berührung kein Strom durch das Galvanometer fliesst. Die Potentialdifferenz zwischen a und c ist dann offenbar gleich E_2 und man hat:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{a\,c}{a\,b}.$$

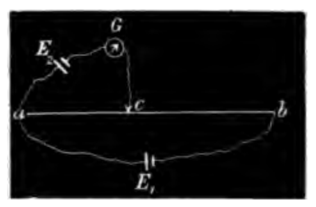


Fig. 84.

Es ist selbstverständlich, dass man die Elemente so schalten muss, dass ihre gleichnamigen Pole mit a verbunden sind und dass $E_1 > E_2$ ist. Diese Methode liefert die elektromotorische Kraft E_2 des offenen Elementes, verglichen mit E_1 des geschlossenen, wenn nicht der Widerstand von $a\,b$ so gross gemacht wird, dass er einem $W = \infty$ praktisch gleich kommt. Man wird letzteren deshalb möglichst gross wählen, was um so leichter angeht, als auch die Empfindlichkeit von G wegen der angewendeten Nullmethode sehr gross gemacht werden kann.

§ 70. Elektromotorische Kräfte galvanischer Elemente.

Die elektromotorische Kraft eines galvanischen Elementes ist ausschliesslich durch die Natur des chemischen Processes bestimmt, der sich in demselben abspielt; die Grösse des Elementes beeinflusst nur dessen Widerstand und somit auch die erzielte Stromstärke. Hat man vom gleichen Typus ein grosses und ein kleines Exemplar, und schliesst sie einzeln durch ein Galvanometer von kleinem (zu vernachlässigendem) Widerstande, so wird der vom grossen Elemente erzeugte Strom viel intensiver sein, da der Widerstand seiner Bahn geringer ist. Schaltet man aber beide Elemente gegen einander in denselben Kreis, so dass beide Ströme denselben Widerstand vorfinden, so resultirt eine Intensität Null, woraus hervorgeht, dass die beiden elektromotorischen Kräfte einander gleich sind.

Nicht ohne Einfluss auf die erzielte elektromotorische Kraft ist dagegen die Concentration der im Element verwendeten Lösungen sowie die Temperatur; manche Elemente wie z. B. das Daniell'sche haben einen ziemlich bedeutenden Temperaturcoëfficienten, und diesem Umstande im Verein mit dem Einfluss der verschiedenen Concentrationen ist es zuzuschreiben, dass die Werthe des Daniell bis zu 8% von einander differiren. Man kann daher auch die Verhältniss-

zahlen für die Kräfte verschiedener Elemente nur als ungefähre ansehen. In der folgenden Tabelle finden sich dieselben für die gebräuchlichsten Typen angegeben, wobei das Daniell als Einheit gesetzt ist.

Element	Zusammensetzung	Elektromotorische Kraft
Daniell	Zn, $ZnSO_4$ | $CuSO_4$, Cu	1·00
Grove	Zn, H_2SO_4 | HNO_3, Pt	1·71
Bunsen	Zn, H_2SO_4 | HNO_3, C	1·74
Latimer Clark . .	Zn, $ZnSO_4$, Hg_2SO_4, Hg	1·29
Leclanché	Zn, $ClNH_4$, MnO_2, C	1·08
Smee	Zn, H_2SO_4, Pt	0·71—1·20

Die Stromintensität welche mittelst eines Elementes erzeugt werden kann, hängt von der elektromotorischen Kraft desselben und dem Gesammtwiderstande des Schliessungskreises ab; letzteren pflegt man als die Summe des inneren und äusseren Widerstandes zu bezeichnen, d. h. als die Summe des Widerstandes w im Elemente selbst, und desjenigen W in der die beiden Pole verbindenden Schliessung.

Für die Stromstärke hat man somit den Ausdruck:

$$J = \frac{E}{W + w}.$$

Schaltet man n Elemente hintereinander, so hat man die n-fache elektromotorische Kraft, aber auch der innere Widerstand wächst auf das n-fache. Es ist dann

$$J_1 = \frac{nE}{W + n \cdot w}.$$

Ist w gegen W verschwindend klein, so wächst durch eine derartige Schaltung die Stromstärke proportional der Anzahl der Elemente; sie empfiehlt sich daher falls der äussere Widerstand W ein sehr bedeutender ist.

Schaltet man alle n Elemente nicht hintereinander, sondern nebeneinander, indem man alle gleichnamigen Pole miteinander verbindet, so erhält man eigentlich ein einziges Element von n-facher Oberfläche, daher von $\frac{1}{n}$fachem Widerstande. Die Stromstärke J_2 wird:

$$J_2 = \frac{E}{W + \frac{w}{n}} = \frac{nE}{nW + w}.$$

Man sieht aus dieser Formel unmittelbar, dass man im Falle eines grossen äusseren Widerstandes durch diese Schaltung nichts

an Stromstärke gewinnen würde, dagegen eignet sie sich für kleine äussere Widerstände, in welchem Falle dann die Stromstärke wieder der Elementenzahl proportional wächst.

Aber nach beiden Methoden kann J_1 und J_2 durch Vermehrung der Elemente ins Unendliche nicht unbegrenzt wachsen, denn die oben ausgesprochene Proportionalität zwischen Elementenzahl und Stromstärke gilt nur, so lange der eine Widerstand gegen den anderen gleich Null gesetzt werden kann. Da es nun thatsächlich weder ein Element noch einen Schliessungskreis mit dem Widerstand Null gibt, so können J_1 und J_2 im äussersten Fall, wenn wir $n = \infty$ setzen, nur die Grenzwerthe annehmen:

$$J_1 = \frac{E}{w} \text{ und } J_2 = \frac{E}{W}.$$

Es ist interessant, dass, was sich durch jede der beiden Schaltungsmethoden einzeln nicht erreichen lässt, wohl durch eine passende Combination derselben realisirbar ist, nämlich eine durch Vermehrung der Elemente unbegrenzt wachsende Stromstärke.

Verbinden wir von den n Elementen je x nebeneinander, so erhalten wir $\frac{n}{x}$ grosse Elemente vom Widerstande $\frac{w}{x}$; verbinden wir ferner diese $\frac{n}{x}$-Elementengruppen hintereinander, so wird die elektromotorische Kraft $\frac{n}{x} \cdot E$ und der Widerstand der Batterien $\frac{n}{x} \cdot \frac{w}{x}$ und somit die Stromstärke J_3:

$$J_3 = \frac{nE}{Wx + \frac{wn}{x}}.$$

Diese Grösse J_3 hat für jedes x einen anderen Werth, und erreicht für eine bestimmte Art die Elemente in Gruppen zu theilen ein Maximum. Dieses ergibt sich aus der Gleichung:

$$\frac{dJ}{dx} = -\frac{nE\left(W - \frac{wn}{x^2}\right)}{\left(Wx + \frac{wn}{x}\right)^2} = 0.$$

Wir erhalten, da n und E positive Grössen sind, ein Maximum für J_3 wenn:

$$W = \frac{wn}{x^2}$$

d. h. wenn die Elemente so angeordnet werden, dass der innere Widerstand dem äusseren gleich ist. Es muss zu diesem Zwecke x so gewählt werden, dass

$$x = \sqrt{n \cdot \frac{w}{W}}$$

wird.

Fragen wir nun nach der grössten mit dieser dritten Schaltungsmethode erreichbaren Stromstärke, so haben wir den vorstehenden Werth von x in unsere ursprüngliche Gleichung für J_3 einzusetzen und erhalten:

$$J_3 = \frac{n \cdot E}{W \cdot \sqrt{n \frac{w}{W}} + \frac{wn}{\sqrt{n \frac{w}{W}}}} = \frac{E}{2} \sqrt{\frac{n}{w \cdot W}}.$$

Da für eine bestimmte Batterie E, w und W Constante sind, so sieht man aus dieser Formel, dass durch Vermehrung der Elemente und passende Schaltung derselben die erzielte Stromstärke proportional mit $\sqrt{n}$ unbegrenzt wachsen kann.

§ 71. Gesetze der Stromverzweigung.

Das Ohm'sche Gesetz verbindet die Grössen J, E und W für den Fall einer unverzweigten Strombahn; zur Bestimmung der Leitungswiderstände sind aber vielfach solche Anordnungen erforderlich, wo der Strom sich auf einzelnen Strecken in mehrere Arme theilt, wo also sogenannte Verzweigungspunkte vorkommen. Wir werden daher zunächst die hauptsächlichsten Gesetze der Stromverzweigung, wie sie sich aus dem Ohm'schen Gesetze ergeben, betrachten.

Gesetzt, in einem Punkte P träfen beliebig viele Strombahnen zusammen, die aber alle von stationären Strömen durchflossen sind, so wird sich doch, eben wegen des stationären Zustandes, keine Anhäufung und keine Abnahme von Elektricität in P bemerkbar machen können. Seien die Intensitäten der einzelnen Ströme $J_1 J_2 J_3 \ldots$ und zählen wir dieselben positiv, wenn sie gegen P hin-, negativ, wenn sie von P weggerichtet sind, so ist unmittelbar klar, dass:

$$J_1 + J_2 + \ldots = \Sigma J = 0$$

sein muss, denn die Intensitäten sind mit den per Zeiteinheit zugeführten Elektricitätsmengen identisch.

Theilt sich also z. B. ein Strom J in mehrere Aeste mit den Intensitäten $i_1\, i_2\, i_3 \ldots$, so muss die Gleichung bestehen:

$$J = i_1 + i_2 + i_3 + \ldots.$$

da in diesem Falle nur J gegen den Verzweigungspunkt hin-, alle anderen Ströme von demselben weggerichtet sind.

Haben wir es mit einem unverzweigten geschlossenen Leitungskreis zu thun, in welchem ein Strom circulirt, so herrscht in allen Theilen ein gewisses Potentialgefälle, das aber nicht überall von derselben Grösse zu sein braucht. Gehen wir in diesem Kreis von einem bestimmten Punkt aus und durchlaufen die ganze Bahn bis zum Ausgangspunkte zurück, so ist offenbar die Summe aller Aenderungen des Potentials die wir durchgemacht gleich Null. Diese Aenderungen setzen sich aber aus zwei Theilen zusammen; da das Potentialgefälle überall dieselbe Richtung haben muss — denn es ist nicht möglich, dass Elektricität in einem unverzweigten Kreis constant nach entgegengesetzten Seiten fliesst — so folgt, dass mindestens an einem Punkte der Bahn, im Allgemeinen an beliebig vielen, ein Sprung der Potentialfunction in entgegengesetzter Richtung stattfinden und dauernd unterhalten werden muss. Solche Sprünge kommen z. B. bei Anwendung galvanischer Elemente an den Berührungsstellen von Metallen und Flüssigkeit vor und wir bezeichnen sie speciell als die thätigen elektromotorischen Kräfte E.

Da man beim Durchlaufen der ganzen Bahn wieder nothwendig auf denselben Werth des Potentials kommt, so folgt, dass ΣE, die Summe aller Potentialsprünge, der Summe aller Potentialgefälle gleich sein muss. Bezeichnen wir die Intensitäten und Widerstände aller Bahnstrecken zwischen je zwei elektromotorischen Kräften mit $i_1\, i_2 \ldots w_1\, w_2 \ldots$ so sind nach dem Ohm'schen Gesetze diese Potentialgefälle der Reihe nach gleich $i_1 w_1,\, i_2 w_2 \ldots.$ und ihre Summe gleich $\Sigma\, i\, w$.

Es folgt somit die Gleichung:

$$\Sigma\, i\, w = \Sigma\, E.$$

Die beiden Gesetze:

$$\Sigma\, J = 0$$

für einen beliebigen Verzweigungspunkt, und

$$\Sigma\, i\, w = \Sigma\, E$$

für einen beliebigen unverzweigten Stromkreis, wurden in dieser Form zuerst von G. Kirchhoff ausgesprochen und sind unter dem Namen der Kirchhoff'schen Gesetze bekannt.

Wir machen von diesen Gesetzen nun Anwendung um einige häufig vorkommende Aufgaben der Stromverzweigung zu lösen.

Es sei JJ (Fig. 85) eine Strombahn, die sich im Punkte a in zwei Theile theilt, welche sich in b wieder vereinigen; es fragt sich, wie hängen die Intensitäten i_1 i_2 in den Theilen von ihren Widerständen w_1 w_2 ab. Für den Punkt a gilt die Gleichung $\Sigma J = 0$ und daraus folgt

$$J = i_1 + i_2.$$

Gehen wir ferner von a durch den einen Zweig nach b und durch den anderen wieder zurück, so haben wir eine geschlossene Bahn durchlaufen, in welcher kein Potentialsprung vorkommt, für welche somit $\Sigma E = 0$ ist; dabei sind wir einmal im Sinne des Stromes, das andere Mal demselben entgegengesetzt gegangen, so dass wir bei der Summation die Potentialgefälle in beiden Zweigen mit verschiedenem



Fig. 85.

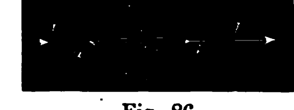


Fig. 86.

Vorzeichen zu nehmen haben. Diese Potentialgefälle sind aber dem Ohm'schen Gesetze zufolge die Grössen $i_1\, w_1$ und $i_2\, w_2$ und das zweite Kirchhoff'sche Gesetz liefert somit:

$$\Sigma\, i\, w = \Sigma\, E \text{ oder } i_1\, w_1 - i_2\, w_2 = 0$$

oder

$$\frac{i_1}{i_2} = \frac{w_2}{w_1}.$$

Diese Gleichung besagt, dass der Strom sich so theilt, dass die Intensitäten im umgekehrten Verhältniss der Widerstände stehen; wird der eine Widerstand unendlich gross, so wird der durch ihn gehende Stromantheil Null, d. h. der Leiter ist unverzweigt.

Sind zwischen den Punkten a und b nicht zwei, sondern beliebig viele Verbindungen, so gilt für je zwei derselben das obige Gesetz, wie sich von selbst ergibt; es ist aber auch von Interesse den Gesammtwiderstand zu kennen, den das zwischen a und b eingeschaltete System repräsentirt. Seien (Fig. 86) w_1 w_2 .... die Widerstände der einzelnen Leitungen, i_1 i_2 .... die Intensitäten in denselben, und bezeichnet E die Potentialdifferenz zwischen a und b, so ist

$$i_1 = \frac{E}{w_1};\; i_2 = \frac{E}{w_2};\; \ldots.$$

ferner ist

$$J = i_1 + i_2 + \ldots. = \frac{E}{w_1} + \frac{E}{w_2} + \ldots.$$

Bezeichnen wir den Gesammtwiderstand zwischen a und b mit W, so wird weiter:

$$J = \frac{E}{W} = E\left(\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots\right)$$

und somit

$$W = \frac{1}{\frac{1}{w_1} + \frac{1}{w_2} + \dots\dots}$$

Sind z. B. $w_1 = w_2 = \dots\dots w$ und sind n solcher Drähte nebeneinander geschaltet, so wird

$$W = \frac{w}{n}$$

d. h. es sinkt der Widerstand auf den n-ten Theil, ein Resultat das unmittelbar einzusehen ist, da das Nebeneinanderschalten von n gleichen Leitungen identisch ist mit der Vergrösserung des Querschnittes der einzelnen auf das n-fache.

§ 72. Messung von Widerständen.

Als Maass der Widerstände hat man sich verschiedener willkürlicher Einheiten bedient; in früheren Zeiten meistens der Jakobi'schen d. h. eines Kupferdrahtes von bestimmten Dimensionen, doch hat sich herausgestellt, dass das Kupfer für genauere Messungen nicht homogen genug herzustellen ist, indem schon die geringsten Mengen fremder Substanzen, demselben beigemengt, den Widerstand merklich beeinflussen. Gegenwärtig ist die gebräuchlichste und wohl auch zweckmässigste Einheit die zuerst von Siemens hergestellte, die sogenannte Quecksilbereinheit. Sie ist definirt durch den Widerstand einer Säule reinen Quecksilbers von 1 m Länge, 1 mm^2 Querschnitt und 0° Temperatur. Die allgemein im Handel vorkommenden, in Neusilberdraht ausgeführten Copien derselben, sowie die zu Widerstandssätzen angeordneten Multipla derselben aus gleichem Material sind, was Bequemlichkeit und Genauigkeit anlangt, wohl die besten Vergleichsobjecte bei Widerstandsmessungen.

Fast alle Methoden Widerstände mit einander zu vergleichen, basiren auf Intensitätsmessungen; es liegt in der Natur der Sache, dass diese Methoden eine etwas verschiedene Anwendung finden, je nachdem es sich um die Messung metallisch oder elektrolytisch leitender Substanzen handelt. Wir wollen zunächst ihre Anwendung auf die ersteren, wenigstens in drei principiell von einander verschiedenen Typen kennen lernen.

1. Methode. Man schaltet in den Kreis eines Elementes nebst dem zu messenden Widerstand noch ein Galvanometer oder eine Boussole, und beobachtet die Stromstärke; nun ersetzt man den Widerstand durch bekannte Vergleichswiderstände, z. B. durch Multipla der Siemens'schen Einheit, und schaltet von letzteren so viele ein, bis die Stromstärke ihren ursprünglichen Werth wieder erreicht hat. Die verwendeten Vergleichswiderstände ergeben dann direct den gesuchten Werth.

Diese Methode, die sogenannte Substitutionsmethode, hat bedeutende Mängel: sie setzt voraus, dass während des ganzen Versuches die elektromotorische Kraft des Elementes ungeändert bleibt, sie setzt weiters die genaue Bestimmung eines Boussolenausschlages voraus und endlich sind die Vergleichswiderstände meist nicht in beliebig kleinen Unterabtheilungen vorhanden. Aus diesen Gründen wird diese Methode nur mehr zu oberflächlichen Messungen verwendet, zu genauen dagegen fast allgemein die folgende.

2. Methode. Wheatstone's Brücke. Man verzweigt die Schliessung des Elementes E in den Punkten a und b (Fig. 87) so, dass der Strom sich in die Zweige I II und III IV theilt. In a sei das Potential V_1, in b V_2; an einem dazwischen liegenden Punkte c wird es einen Werth v haben, und es ist klar dass derselbe Werth sich irgendwo auf III IV gleichfalls finden muss, z. B. in d. Verbinden wir c mit d durch einen Draht, in welchen ein Galvanometer eingeschaltet ist, so wird dieses keinen Strom anzeigen, wenn die Punkte c und d richtig getroffen sind.

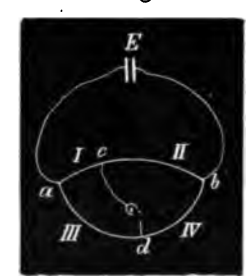


Fig. 87.

Es ist nun sehr leicht, wenn der eine Punkt, etwa d fixirt ist, durch Hin- und Herbewegung von c die Stellung zu treffen, wo kein Strom durch das Galvanometer fliesst. Ist diese Einstellung gefunden, so gelten die folgenden Relationen, wenn wir mit i_1 i_2 i_3 i_4 und w_1 w_2 w_3 w_4 die Intensitäten und Widerstände in den Zweigen I—IV bezeichnen.

Das Potentialgefälle in I und III ist $V_1 - v$, das in II und IV ist $v - V_2$, man hat somit:

$$V_1 - v = i_1 w_1 = i_3 w_3 \qquad v - V_2 = i_2 w_2 = i_4 w_4.$$

Ferner ist, da durch cd kein Strom fliesst:

$$i_1 = i_2 \text{ und } i_3 = i_4$$

$$i_1 w_1 = i_3 w_3$$

$$i_1 w_2 = i_3 w_4$$

und somit

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{w_3}{w_4}.$$

Schaltet man z. B. den zu bestimmenden Widerstand in den Zweig IV, den Vergleichswiderstand in III und vereinigt die Zweige I und II zu einem geraden homogenen Draht längs dessen der Schleifcontact c verschiebbar ist, so geben, für die Nullstellung des Galvanometers, die Längen von I und II direct das Verhältniss der in III und IV eingeschalteten Widerstände.

Diese Methode ist einer grossen Genauigkeit fähig, denn sie ist ganz unabhängig von etwaigen Veränderungen des Elementes, und da das Galvanometer nur in der Nullstellung gebraucht wird, so kann demselben eine grosse Empfindlichkeit gegeben werden. Die Intensitätsmessung ist hier durch eine Längenmessung ersetzt.

3. Methode. Handelt es sich um Messung sehr grosser Widerstände, z. B. des Jod, Brom etc., so sind die vorstehenden Methoden nicht anwendbar, da die erzielten Stromstärken selbst bei Anwendung der allerempfindlichsten Spiegelgalvanometer noch unmerklich sind. Man kann aber mit Hilfe des Elektrometers durch Bestimmung der Potentialgefälle auch die grössten Widerstände noch messen, indem man dieselben w_1, wie in Fig. 88, nebst dem Vergleichswiderstande w_2 hintereinander in den Kreis des Elementes E schaltet. Leitet man den Punkt a zur Erde und beobachtet nacheinander die Potentiale V_1 und V_2 in b und c, so gibt das Ohm'sche Gesetz direct:

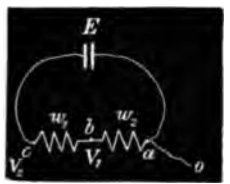


Fig. 88.

$$\frac{V_2 - V_1}{V_1} = \frac{w_1}{w_2}.$$

Selbstverständlich muss bei dieser Methode auf gute Isolirung der Widerstände Rücksicht genommen werden.

Mit viel grösseren Schwierigkeiten verbunden und nur mit viel geringerer Genauigkeit ausführbar ist die Widerstandsmessung bei elektrolytisch leitenden Substanzen. Durch den Strom werden an den Elektroden die Zersetzungsproducte ausgeschieden und erzeugen da im Allgemeinen nicht nur eine elektromotorische Gegenkraft, sondern auch einen, mitunter sehr beträchtlichen Uebergangswiderstand. Der letztere Umstand macht sich besonders störend geltend, wenn die Ionen in Gasform ausgeschieden werden, wobei sie die Elektroden mit einer mehr oder minder zusammenhängenden Schichte überziehen.

Wir betrachten die folgenden vier principiell sehr verschiedenen Methoden.

1. Methode. Die ältesten genaueren Messungen wurden von Horsford so angestellt, dass er in einen länglichen parallelepipedischen Trog die zu untersuchende Flüssigkeit zwischen Elektroden brachte, die den Querschnitt des Troges vollständig ausfüllten, und den Strom eines Elementes oder einer Batterie durch die Flüssigkeit und eine Boussole schloss; der Ausschlag der letzteren wurde abgelesen und dann die beiden Elektroden einander um eine bestimmte Länge in der Flüssigkeit genähert. Dadurch sinkt der Widerstand, und schaltet man nun in den Kreis noch so viel Widerstand zu, dass der Ausschlag wieder den ursprünglichen Werth erreicht, so hat man ohne Weiteres den gesuchten Widerstand. Diese Methode ist sehr einfach und einer relativ grossen Genauigkeit fähig, erfordert aber eine Galvanometerablesung.

2. Methode. Nach dem Vorgange Paalzow's kann man die zu untersuchende Flüssigkeit in ein enges Glasrohr füllen, dessen Enden in weite mit Zinkvitriollösung gefüllte Gläser tauchen; in diesen befinden sich zwei amalgamirte Zinke als Elektroden. Durch die Anwendung der letzteren wird die Polarisation und der Uebergangswiderstand vermieden, so dass man einen Strom durch ein derartiges System wie durch einen festen Leiter senden und den Widerstand nach einer der früher angegebenen Methoden z. B. mittelst der Wheatstone'schen Brücke bestimmen kann. Diese Methode hat neben ihren Vorzügen auch zwei Nachtheile: sie ist erstens nur auf in Wasser lösliche Substanzen, die auf $ZnSO_4$ nicht reagiren, anwendbar, und involvirt zweitens immer einen schwer in Rechnung zu ziehenden Fehler, der von dem Ausbreitungswiderstand beim Uebergang des Stromes aus dem engen Rohr in die weiten Zinkvitriolgefässe herrührt. Letzterer lässt sich allerdings ziemlich genau durch mehrfache Beobachtung mit verschieden langen Röhren ermitteln, dadurch verliert aber das ganze Verfahren an Einfachheit.

3. Methode. F. Kohlrausch ersetzt den continuirlichen Strom durch die in ihrer Richtung schnell wechselnden Ströme eines Inductionsapparates und erreicht damit ein fast vollständiges Verschwinden der Polarisation und des Uebergangswiderstandes, indem durch diesen Process an den Elektroden rasch hintereinander abwechselnd die entgegengesetzten Ionen ausgeschieden werden und sich sofort wieder zum ursprünglichen Elektrolyten vereinigen. Damit dies möglichst vollständig eintrete, ist es nothwendig, die Elektroden

sehr gross zu machen; im Uebrigen kann die Messung dann in üblicher Weise mit der Wheatstone'schen Brücke vorgenommen werden, wobei es nur mit Rücksicht auf die alternirenden Ströme nothwendig ist, das Galvanometer durch ein Elektrodynamometer oder durch ein Telephon zu ersetzen.

4. Methode. In vielen Fällen ist es nicht möglich Elektroden von grosser Oberfläche oder von variabler Distanz anzubringen, so z. B. wenn sich die Flüssigkeit in einer Glasröhre mit eingeschmolzenen Drähten befindet; man kann sich dann mit gutem Erfolge einer Methode bedienen, die zuerst v. Lang zur Widerstandsbestimmung des elektrischen Lichtbogens angewendet hat. Man stellt sich den zu messenden Widerstand in zwei annähernd gleichen Exemplaren dar und schaltet dieselben (I und II, Fig. 89) hintereinander in den Kreis der Batterie B. Der Punkt a in der Mitte der Batterie und der symmetrisch gelegene Punkt b werden gleiches Potential haben, wenn die Widerstände I und II vollkommen gleich sind; da dies niemals genau erfüllt sein wird, so macht man den Draht zwischen I und II von etwas grösserem Widerstande und sucht mittelst einer zwischen a' und b' eingeschalteten Boussole den Punkt b auf, der mit a gleiches Potential hat. Ist dieser gefunden, so kann man das ganze System mittelst a' und b' in eine Wheatstone'sche Brücke einschalten, da dadurch keine neuen Potentialdifferenzen in letztere eingeführt werden, und den Widerstand in der üblichen Weise bestimmen. Ist dieser w, so ist der Widerstand W eines jeden der Zweige I und II

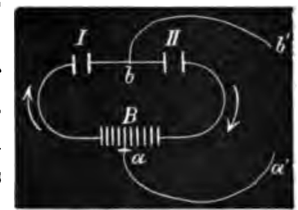


Fig. 89.

$$W = 2\,w$$

da diese Zweige parallel geschaltet sind.

Besondere Schwierigkeiten bietet die genaue Bestimmung der Widerstände galvanischer Elemente selbst, da deren elektromotorische Kraft sich durch das Hindurchleiten eines Stromes verändert. Am besten hilft man sich dadurch, dass man zwei möglichst gleiche Exemplare derselben Construction gegeneinander schaltet, wodurch die Combination stromlos wird, so dass man sie wie einen festen Leiter in der Wheatstone'schen Brücke messen kann. Die Widerstände der meisten galvanischen Elemente gewöhnlicher Grösse liegen zwischen 0·05 und 0·5 S. E. (Siemens'sche Einheiten).

In den folgenden Tabellen finden sich die Leitungsfähigkeiten einiger der häufig vorkommenden Substanzen angegeben, also die

reciproken Werthe ihrer Widerstände; dieselben sind natürlich auf gleiche Dimensionen reducirt und auf die Leitungsfähigkeit des Silbers gleich 100.

Leitungsvermögen fester und flüssiger Grundstoffe bei gewöhnlicher Temperatur:

Ag	100
Cu	77
Au	55
Na	37
Zn	27
Fe	14
Pt	10
Pb	7
Hg	1·6
C	0·04
Te	$77 \cdot 10^{-5}$
P	$12 \cdot 10^{-7}$
J	$18 \cdot 10^{-9}$
Br	$14 \cdot 10^{-14}$

Leitungsvermögen wässeriger Lösungen bei günstiger Concentration und gewöhnlicher Temperatur:

HNO_3	$93 \cdot 10^{-6}$
H_2SO_4	$88 \cdot$ „
$ClNa$	$31 \cdot$ „
$ZnSO_4$	$6 \cdot$ „
$CuSO_4$	$5 \cdot$ „

Leitungsvermögen der schlechtesten bisher gemessenen Elektrolyte:

H_2O (möglichst rein)	$1·1 \cdot 10^{-10}$
Maschinenöl	$0·2 \cdot 10^{-14}$
Ricinusöl	$0·5 \cdot 10^{-15}$
Terpentinöl	$0·2 \cdot 10^{-15}$

Einer besonderen Erwähnung bedarf noch die Frage, ob der leere Raum ein Leiter der Elektricität sei oder nicht; diese Frage lässt sich natürlich nur experimentell entscheiden und muss dahin beantwortet werden, dass, wenn man von einem Leitungsvermögen im gewöhnlichen Sinne des Wortes spricht, ein solches dem leeren Raum nicht zukommt. Es ist dies durch einen Versuch von Worthington vollkommen klar gestellt, welcher zeigte, dass die An-

ziehung zwischen zwei elektrisirten Kugeln auch im besten Vacuum ungeschwächt fortbesteht, während, wenn demselben ein Leitungsvermögen zukäme, dieselbe den bekannten elektrostatischen Gesetzen zufolge hätte verschwinden müssen. Auch neuere Versuche haben auf anderem Wege zu dem gleichen Resultate geführt. Eine in sich geschlossene vollkommen evacuirte Glasröhre müsste, wenn das Vacuum leitet, durch Induction Ströme liefern wie ein geschlossener Drahtkreis; es konnte jedoch die Existenz dieser Ströme bisher nicht nachgewiesen werden, obwohl sehr empfindliche Methoden angewendet wurden, so dass ein Leitungsvermögen des Vacuums, wenn es existirt, nach diesen Versuchen jedenfalls sehr klein sein müsste. Das zuerst angeführte Experiment Worthington's nöthigt jedoch direct zu der Annahme, dass das Vacuum ein Isolator sei.

§. 73. Veränderlichkeit des Leitungsvermögens.

Das Leitungsvermögen der Körper ist keine constante Grösse, sondern hängt von mancherlei äusseren Umständen ab; so übt z. B. die Temperatur einen wesentlichen Einfluss auf dasselbe und zwar in verschiedenem Sinne, je nachdem die Körper metallisch oder elektrolytisch leiten. Bei Metallen nimmt der Widerstand im Allgemeinen sehr regelmässig zu so dass man ihn durch die Formel:

$$W_t = W_o (1 + \alpha t)$$

wo t die Temperatur und α den Temperaturcoëfficienten bedeutet, mit grosser Annäherung darstellen kann. Dabei tritt die sehr auffallende Erscheinung zu Tage, dass für alle festen Metalle der Werth von α fast den gleichen Werth hat, nämlich $\alpha = 0{\cdot}0036$, und dass dieser Werth zugleich der Ausdehnungscoëfficient der Gase ist, also der reciproke Werth der absoluten Temperatur des Eispunktes: 273° C. Es würde daraus folgen, dass der Widerstand sämmtlicher Metalle sich mit abnehmender Temperatur gleichmässig dem Werthe Null nähert und in der That haben Messungen an Kupfer bei Temperaturen von ungefähr —200° schon einen verschwindenden Widerstand ergeben.

Dieser Einfluss der Temperatur scheint nur für feste Grundstoffe zu gelten; schon bei Quecksilber sinkt der Werth von α auf 0·0007 und übergeht bei Brom und geschmolzenem Jod ins Negative so dass diese Körper bei höherer Temperatur besser leiten als bei tiefer. Es sind die Leitungsvermögen λ (bezogen auf Hg) für Brom die folgenden:

t	λ
0°	$8{\cdot}6 \cdot 10^{-14}$
17°	$12 \cdot$ „
38·5	$25 \cdot$ „

und für geschmolzenes Jod:

t	λ
115°	$13 \cdot 10^{-9}$
143°	$17 \cdot$ „
166°	$21 \cdot$ „

Auch Kohle macht eine bekannte Ausnahme, indem sie bei höherer Temperatur besser leitend wird; es ist dies aber nur eine Folge der Ausdehnung derselben, wodurch zwischen den einzelnen Theilchen der porösen Substanz eine innigere Berührung eintritt. Aehnliche Verhältnisse zeigen sich bei stark krystallinischen Substanzen wie Tellur und Wismuth; werden diese erwärmt so sinkt gewöhnlich ihr Widerstand, kehrt aber bei Abkühlung nicht mehr auf den ursprünglichen Werth zurück sondern erreicht einen um so höheren je langsamer die Abkühlung d. h. je vollständiger die Krystallisation von statten ging.

Bei elektrolytisch leitenden Flüssigkeiten tritt ausnahmslos eine Verminderung des Widerstandes bei höherer Temperatur ein, was vermuthlich mit der leichteren Beweglichkeit der einzelnen Moleküle bei erhöhter Temperatur zusammenhängt. Die Temperatur-Coëfficienten sind hier aber von einer Substanz zur anderen verschieden und scheinen wesentlich von der physikalischen Natur derselben abzuhängen und zwar in erster Linie von der inneren Reibung. Das zeigt sich sowohl aus dem allgemeinen Verhalten, indem ein Zusammenhang zwischen innerer Reibung und Leitungsfähigkeit sich direct nachweisen lässt, als speciell aus der starken Zunahme der Leitungsfähigkeit mit der Temperatur bei solchen schlecht leitenden Flüssigkeiten, die bei gewöhnlicher Temperatur zähflüssig, bei erhöhter aber leichtflüssig werden, wie z. B. bei den Oelen. Im Folgenden sind dafür einige Zahlen gegeben, die die Leitungsfähigkeiten bei 19° und 100° ausdrücken.

Substanz	Leitungsfähigkeit bei 19°	100°
Maschinenöl	$0{\cdot}2 \cdot 10^{-14}$	$0{\cdot}3 \cdot 10^{-13}$
Ricinusöl	$0{\cdot}5 \cdot 10^{-15}$	$0{\cdot}5 \cdot 10^{-13}$
Terpentinöl	$0{\cdot}2 \cdot 10^{-15}$	$0{\cdot}5 \cdot 10^{-14}$

Am auffallendsten ist die Aenderung bei Ricinusöl (auf das Hundertfache) und gerade dieses zeigt auch am deutlichsten die Aenderung seiner Consistenz mit der Temperatur.

Den Einfluss der Temperatur auf den Widerstand fester oder flüssiger Leiter kann man leicht demonstriren wenn man in den Kreis eines Elementes nebst einer Boussole noch den zu untersuchenden Draht, respective in einem engen U-Rohr die zu untersuchende Flüssigkeit einschaltet. Erwärmt man den Draht so sinkt die Stromstärke, erwärmt man aber die Flüssigkeit so steigt dieselbe. Da zur Erzielung eines deutlichen Effectes die variablen Widerstände des Stromkreises gegen die übrigen gross sein müssen, so eignet sich zu diesem Versuche Platindraht, respective Kupfervitriollösung.

Bei Lösungen von Salzen oder Säuren in Wasser ist noch ein anderer Umstand von grossem Einfluss auf den Widerstand: die Concentration. Das Lösungsmittel, reines Wasser, leitet so gut wie gar nicht und es ist ein merkwürdiger Umstand dass auch die meisten Salze und Säuren in wasserfreiem Zustande nicht leiten, dagegen mit Wasser eine gut leitende Lösung geben. Es folgt aus diesem Verhalten unmittelbar dass der Widerstand für eine gewisse Concentration ein Minimum sein muss, indem er für die Concentration von 0% und 100% sich dem Werthe ∞ nähert.

Das folgende Beispiel zeigt diesen Einfluss der Concentration für eine der gebräuchlichsten Flüssigkeiten: $H_2SO_4 + H_2O$.

g SO_3 in 100 cm^3 H_2O	W
4	499
6	283
11	147
23	88
46	79
75	108
92	152
124	323
183	508

Der Widerstand W ist hier in einer willkürlichen Einheit angegeben; er ist ein Minimum für 46 g SO_3 in 100 cm^3 H_2O d. i. eine Lösung mit dem specifischen Gewichte 1·25.

Man hat geglaubt dass eine eventuelle Bewegung des Leiters in der Richtung des Stromes auf den Widerstand von Einfluss ist, diese Ansicht hat sich jedoch nicht bestätigt. Es wurden diesbezügliche Versuche zuerst an strömenden Flüssigkeiten mit festen Elek-

troden ausgeführt und da treten durch Reibung an den Wänden sowie an den Elektroden selbst elektromotorische Kräfte auf, die im Sinne einer scheinbaren Verringerung des Widerstandes in der Strömungsrichtung wirken; lässt man jedoch die kreisförmig gewickelten Leiter zugleich mit den Elektroden in sich selbst rotiren so verschwindet ein Unterschied des Widerstandes mit der Richtung vollständig. Dies hat sich bei einer Geschwindigkeit von 12·9 m in der Secunde sowohl bei metallischen als bei elektrolytischen Leitern ergeben. Ueberhaupt muss darauf aufmerksam gemacht werden dass eine von der Richtung abhängige Stromleitung sich bisher bei continuirlichen Strömen nicht hat nachweisen lassen.

Schliesslich soll noch auf einen merkwürdigen Zusammenhang aufmerksam gemacht werden, der zwischen der elektrischen und thermischen Leitungsfähigkeit besteht und, wie die neuesten Bestimmungen der Brechungsexponenten des Lichtes in Metallen wahrscheinlich machen, sich auch auf die Lichtgeschwindigkeit bezieht.

Die folgende Tabelle enthält einige diesbezügliche Zahlenangaben. Es bedeutet λ das elektrische, ϑ das thermische Leitungsvermögen und v die Lichtgeschwindigkeit: alle drei Grössen sind für Silber gleich 100 gesetzt.

Metall	λ	ϑ	v
Ag	100	100	100
Cu	77	73	60
Au	55	53	71
Fe	14	12	14·9
Pt	10	8·4	15·3

Eine grosse Uebereinstimmung ist der Natur der Messungen nach nicht zu erwarten, aber augenscheinlich zeigt sich bei allen drei Phänomenen derselbe Gang.

§ 74. Reduction der Grössen auf absolutes Maass.

Alles was geschieht, geschieht von der Materie im Raume und in der Zeit d. h. jeder physikalische Vorgang ist an eine räumliche und zeitliche Zustandsänderung einer bestimmten Masse gebunden; es liegt eben darin der Grund dass eine jede physikalische Grösse durch die Einheiten der Masse, der Zeit und des Raumes darstellbar ist. Diese Einheiten, die sogenannten absoluten Einheiten, sind die bekannten Grössen Gramm (g), Secunde (s) und Centimeter (cm) und das auf sie basirte absolute Maassystem wird kurz als das cm-g-s-System bezeichnet. Es ist einleuchtend, von welch grossem Vortheil es

sein muss, äusserlich ganz differente Phänomene, wie z. B. die elektrischen und thermischen auf ein gemeinsames Maass reduciren und so ihre Grössen direct vergleichen zu können.

Diese Reduction auf cm, g, s werden wir durch passend gewählte Definition der übrigens willkürlich festzusetzenden Einheit der zu messenden Grösse vornehmen; speciell für die elektrischen Grössen werden wir als Uebergangsglied zu Masse (M), Zeit (T) und Länge (L) den Begriff der Kraft und der Arbeit verwerthen.

Die Krafteinheit ist im cm-g-s-System diejenige Kraft welche der Masse 1 (1 g) in der Zeit 1 (1 s) die Geschwindigkeit 1 (1 cm) ertheilt; diese Kraft nennen wir 1 Dyn. Um eine Vorstellung von ihrer Grösse zu bekommen, brauchen wir uns nur daran zu erinnern dass die Erdschwere, welche auf die gleiche Masse wirkt, ihr in derselben Zeit die Geschwindigkeit 981 cm ertheilt, es ist somit:

$$1 \text{ Dyn} = \frac{1}{981} \text{ g-Gewicht.}$$

Die Arbeitseinheit ist folgemässig das Product aus 1 Dyn in 1 cm; wir nennen diese Arbeit 1 Erg.

Um nun von den elektrischen Fundamentalgrössen: Menge (M), Potential (V) und Capacität (C) zu den Einheiten des cm-g-s-Systems zu gelangen, bedienen wir uns des Ausdruckes für die Kraftwirkung. welche von elektrischen Massen ausgeht; je nachdem wir in Bezug auf letztere von den elektrostatischen Wirkungen zwischen ruhenden Elektricitätsmengen oder von den elektromagnetischen Wirkungen zwischen Strömen und Magneten ausgehen, gelangen wir zu den Definitionen und Einheiten des sogenannten elektrostatischen oder des elektromagnetischen absoluten Maasssystems.

Wir könnten auch die elektrodynamischen Wirkungen mit gleichem Rechte zur Begründung eines elektrodynamischen absoluten Systems benützen, doch hat letzteres keinen Eingang in die Praxis gefunden so dass wir uns mit einer genaueren Betrachtung der beiden ersten begnügen können.

I. Elektrostatisches System.

Wir definiren:

1. als Einheit der Elektricitätsmengen jene Menge welche auf eine gleiche in der Distanz 1 (1 cm) die Kraft 1 (1 Dyn) ausübt;
2. als Einheit des Potentials jene Potentialdifferenz welche von der Menge 1 durchlaufen werden muss, damit die Arbeit 1 (1 Erg) geleistet wird;

3. als Einheit der Capacität jene Grösse die sich nach den vorstehenden Definitionen aus der allgemeinen Gleichung $C = \frac{M}{V}$ ergibt; es ist das zugleich die Capacität einer Kugel vom Radius 1 (1 cm).

II. Elektromagnetisches System.

Wir definiren:

1. als Einheit der Menge jene Quantität welche in der Zeit 1 den Querschnitt passirend und in stationärer Strömung die Fläche 1 umkreisend in ihrem Centrum das magnetische Moment 1 erzeugt;
2. als Einheit des Potentials jene Potentialdifferenz welche von der Menge 1 unter Leistung der Arbeit 1 durchlaufen wird;
3. als Einheit der Capacität die durch die Gleichung $C = \frac{M}{V}$ bestimmte Grösse.

Die Einheiten dieser beiden Maasssysteme für die Elektricitätsmenge sind mit einander durch eine Proportionalitätsconstante v verknüpft, deren Bedeutung wir schon früher kennen gelernt haben; sie ist nach der Maxwell'schen Theorie des Lichtes nichts Anderes als die Lichtgeschwindigkeit im leeren Raume, und ihre experimentelle Bestimmung auf elektrischem Wege hat den Werth $v = 3 \cdot 10^{10} \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ geliefert, ein Werth der thatsächlich mit dem der Lichtgeschwindigkeit identisch ist. Bezeichnen wir die Einheiten des magnetischen Maasssystems durch die Indices m, die des statischen durch die Indices s so ergibt sich somit:

$$M_m = v \cdot M_s$$

$$V_m = \frac{1}{v} V_s$$

$$C_m = v^2 C_s$$

Die letztere Relation folgt aus den vorhergehenden unmittelbar denn es ist

$$C_m = \frac{M_m}{V_m} \qquad C_s = \frac{M_s}{V_s}$$

$$\frac{C_m}{C_s} = \frac{M_m}{V_m} \cdot \frac{V_s}{M_s} = \frac{v \cdot M_s \cdot V_s}{\frac{1}{v} V_s \cdot M_s} = v^2.$$

Für die Praxis sind die Einheiten der beiden elektrischen Maasssysteme nicht geeignet, sie sind theils zu klein, theils zu gross um

eine directe Vergleichung mit den gewöhnlich vorkommenden Grössen zu gestatten; man hat sich daher genöthigt gesehen, gewisse Multipla oder Submultipla derselben festzusetzen und nennt diese die praktischen Einheiten des absoluten Systems (cm-g-s-Systems). Sie sind sämmtlich aus den Einheiten des elektromagnetischen Systems gebildet und gegenwärtig allgemein in der Praxis angenommen. Mit Hilfe des Ohm'schen Gesetzes hat man die Definitionen auch auf die Grössen Stromstärke und Widerstand ausgedehnt und den so geschaffenen Einheiten specielle Namen und Zeichen gegeben. Die folgende Tabelle gestattet eine Vergleichung derselben mit den ursprünglichen absoluten Einheiten.

Praktische Einheit für			Gleich 1 absoluten elektromagnetischen Einheit multiplicirt mit
Elektricitätsmenge	Coulomb	Cb	10^{-1}
Widerstand	Ohm	Ω	10^{9}
Potentialdifferenz	Volt	V	10^{8}
Capacität	Farad	F	10^{-9}
	Mikrofarad	MF	10^{-15}
Stromstärke	Ampère	A	10^{-1}

Um diese Grössen mit den bisher von uns gebrauchten Einheiten z. B. der Daniell- und der Siemens'schen Einheit zu vergleichen, sei Folgendes bemerkt: es ist eine Siemens-Einheit (S. E.) gleich 0·953 Ohm soweit die Grösse des letzteren bisher überhaupt experimentell festgestellt ist. Nach vielen Messungen die diesbezüglich in der letzten Zeit ausgeführt wurden, schwankt der Werth des theoretischen Ohm, wenn man ihn durch den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 mm² Querschnitt und 0° C. ausdrückt, zwischen der Länge von 105·26 und 107·10 cm. Da man also den genauen Werth des Ohm gegenwärtig noch nicht kennt so nimmt man vorläufig ein sogenanntes legales Ohm an, repräsentirt durch den Widerstand einer Quecksilbersäule von 1 mm² Querschnitt, 106 cm Länge und 0° C.

Die Potentialdifferenz D an den Polen eines Daniell'schen Elementes ist, in praktischen Einheiten ausgedrückt, gleich 1·1 Volt, doch schwankt diese Zahl um 5% auf oder ab, je nach der Construction des Elementes; wenn es sich nur um oberflächliche Schätzungen handelt so kann man daher die Grössen Ohm und Volt auch durch die älteren S. E. und D. ersetzen.

Mit Hilfe des in § 42 beschriebenen absoluten Elektrometers kann man auch den Werth D direct in elektrostatischem Maasse be-

stimmen, wie dies zuerst W. Thomson gethan hat, und findet D = 0·00357; es sind also 0·00357 elektrostatische Einheiten = 1·1 V., woraus sich für die Verhältnisszahl v der beiden Maasssysteme der oben schon angeführte Werth $3 \cdot 10^{10}$ ergibt.

Die Capacität der Erde, diese als Kugel vorausgesetzt, ist in elektrostatischem Maasse gleich ihrem Radius also:

$$E_s = 7 \cdot 10^8 \text{ cm.}$$

Wollen wir dieselbe in elektromagnetischem Maasse, also in Farads ausdrücken so haben wir diese Zahl durch $v^2 = 9 \cdot 10^{20}$ zu dividiren und erhalten

$$E_m = \frac{7 \cdot 10^8}{9 \cdot 10^{20}} = \frac{8}{10^{13}}.$$

Nun ist aber 1 Farad gleich 10^{-9} und somit

$$E_m = \frac{8}{10^4} \text{ F.} = 800 \text{ MF.}$$

Es ist also 1 Farad mehr als die tausendfache Capacität der Erde, und dies ist der Grund warum man in der Praxis gewöhnlich nach Milliontel-Farad d. i. nach Mikrofarad rechnet.

Schliesslich sei noch erwähnt in welchem Zusammenhange die absoluten elektromagnetischen Maasse oder die praktischen Maasse mit den chemischen Wirkungen des Stromes stehen; ist die betreffende Verhältnisszahl ein- für allemal ermittelt so geben uns die Voltameter ein sehr einfaches Hilfsmittel an die Hand um Stromstärken auf absolutes Maass zu reduciren.

Wir nennen elektrochemisches Aequivalent einer Substanz jene Menge in Grammen, welche durch die elektromagnetische Stromeinheit in einer Secunde aus einem Elektrolyten ausgeschieden wird. Ist diese Zahl nur für eine Substanz bekannt so lässt sie sich nach dem Faraday'schen elektrolytischen Gesetze für jede andere durch Multiplication mit der chemischen Aequivalentzahl berechnen. Es ist nun für Silber diese Zahl in den letzten Jahren von zwei verschiedenen Forschern sehr genau bestimmt worden, und die gute Uebereinstimmung der beiderseitigen Resultate lässt keinen Zweifel an der Richtigkeit derselben. Es wurde gefunden:

von Lord Rayleigh . . . . 0·01118 g
„ F. Kohlrausch . . . . 0·011183 „

Wenn wir diese Zahlen auf die Stromstärke von 1 Ampère umrechnen und auch noch jene für Kupfer und Wasserstoff hinzufügen,

so ergibt sich als die Menge Substanz die in 1 s von 1 A. ausgeschieden wird:

Ag	1·118 mg
Cu	0·328 „
H_2	0·010 „
Knallgas . .	0·174 cm^3 von 0° und 760 mm Druck.

XIX. Capitel.

Zusammenhang zwischen chemischen und elektrischen Processen.

§ 75. Das galvanische Element.

Wir haben bisher die Gesetze der stationären elektrischen Strömung untersucht ohne nach der Quelle dieser Strömung zu fragen; es ist in der That für alle Wirkungen die ein Strom hervorzubringen im Stande ist, vollkommen gleichgiltig aus welcher Quelle er stammt, allein die Methoden, einen solchen zu erzeugen, sind theoretisch wie praktisch von solcher Wichtigkeit dass wir wenigstens eine derselben näher untersuchen wollen.

Wir kennen gegenwärtig eine Reihe von Methoden, Elektricität zu erzeugen: ausser der Reibung auch die elektrostatische Induction, die thermoelektrische Wirkung, die elektrodynamische und elektromagnetische Induction und endlich die Elektricitätserzeugung durch chemische Action wie sie in den galvanischen Elementen auftritt; von allen diesen wollen wir im Folgenden nur die letzte Art genauer untersuchen und dabei auf die Natur der Processe, welche ins Spiel treten, näher eingehen.

Wir gehen dabei von den folgenden experimentell unzweifelhaft festgelegten Thatsachen aus. Taucht man ein mit dem Elektrometer verbundenes, übrigens isolirtes Metall in eine gleichfalls isolirte Flüssigkeit so findet man fast ausnahmslos eine Elektricitätsentwicklung, in Folge deren das Metall und das mit ihm verbundene Elektrometer negativ, die Flüssigkeit aber positiv elektrisch wird.

Von dem Vorhandensein der letzteren Ladung kann man sich dadurch überzeugen dass man die Flüssigkeit, nach Entfernung des Metalles, auf einen mit dem Elektrometer verbundenen Leiter inducirend wirken lässt, wobei das Elektrometer + Elektricität anzeigt. Im ursprünglichen Zustande der Flüssigkeit ist dagegen diese Induction nicht vorhanden.

Die Beobachtung lehrt ferner dass die Ladungen von Metall und Flüssigkeit, wenn beide Körper isolirt sind, nur solange anwachsen

bis die Potentialdifferenz zwischen denselben, die wir durch das Zeichen M|F andeuten wollen, eine bestimmte Grösse erreicht hat die nicht überschritten wird, und die von der Natur der beiden Körper abhängt. Richtet man sein Augenmerk auf diese letztere, so bemerkt man bald dass die Intensität des Processes eine um so grössere d. h. die erreichte Potentialdifferenz eine um so beträchtlichere ist, je energischer die beiden Substanzen chemisch auf einander reagiren: wo eine solche Reaction gar nicht stattfindet, da unterbleibt auch jede Elektricitätsentwicklung.

Das ist z. B. der Fall bei reinem Platin oder natürlichem Graphit in H_2O, H_2SO_4, $CuSO_4 + H_2O$, $ZnSO_4 + H_2O$, $HCl + H_2O$ etc. In diesem Falle tritt auch zwischen beiden Körpern keine Potentialdifferenz auf, wovon man sich überzeugt wenn man aus denselben einen Condensator bildet, ihn schliesst und nach Unterbrechung der Verbindung wieder öffnet, wobei dann keine elektrischen Ladungen auf den Platten nachweisbar sind.

Es soll gleich hier erwähnt werden dass eine Elektricitätsentwicklung nicht nur bei der Verbindung von Metallen mit Flüssigkeiten auftritt, sondern bei einer jeden Combination die mit einer chemischen Wirkung verbunden ist, also z. B. auch zwischen zwei Flüssigkeiten von denen die eine eine Säure die andere eine Base ist; auch wenn keine chemische sondern nur eine physikalische Wirkung stattfindet, etwa eine Lösung, oder eine Concentrationsänderung so genügt dies zur Erzeugung von Elektricität.

Es ist natürlich für die Theorie der Elektricitätsentwicklung durch den chemischen Process von grösster Wichtigkeit, die Potentialdifferenzen zu kennen welche bei verschiedenen Combinationen auftreten; wir wollen vorläufig nur jene betrachten wo ein Metall und eine Flüssigkeit auf einander reagiren, es sind dies ja auch praktisch die wichtigsten Fälle.

Wir können die in Rede stehenden Potentialdifferenzen nach folgenden drei Methoden bestimmen:

1. Methode. Man verbindet das Metall mit dem Elektrometer und leitet die Flüssigkeit durch eine Substanz zur Erde die chemisch nicht auf dieselbe reagirt, z. B. durch Graphit; man erhält so direct die gesuchte Grösse, doch ist dabei zu beobachten dass die Combination vor der Messung nicht kurz geschlossen sein darf, weil sonst in Folge der Polarisation am Graphit die Messung fehlerhaft würde. Auch muss dabei für die äusserste Reinheit des Graphits gesorgt werden.

2. Methode. Man stellt einen Condensator her aus einer Graphit- oder Platinplatte und einer zweiten Platte aus der zu untersuchenden Flüssigkeit (z. B. durch Tränkung einer Scheibe Filtrirpapier mit derselben, die durch eine nasse Schnur mit dem Flüssigkeitsgefäss in Verbindung steht). In die Flüssigkeit taucht das zu untersuchende Metall; die Graphitplatte ist mit dem Elektrometer verbunden und das Metall zur Erde geleitet. Man beobachtet dann in gewöhnlicher Weise den Ausschlag beim Oeffnen des Condensators, wobei man zur Reducirung dieses Ausschlages in die Erdleitung des Metalles ein Daniell'sches Element einmal in der einen, das andere Mal in der anderen Richtung eingeschaltet hat; die Ausschläge sind dann den Werthen $M|F + D$ und $M|F - D$ proportional woraus man $M|F$, bezogen auf das Daniell als Einheit, entnimmt.

3. Methode. Schliesslich lässt sich der Werth $M|F$ nach der im § 43 angegebenen Methode der Tropfelektroden bestimmen, wenn man das Metall zur Erde ableitet und die Flüssigkeit mittelst einer nassen Schnur zu einem Hohlcylinder aus Filtrirpapier oder Glaswolle führt, der mit der gleichen Flüssigkeit getränkt ist und in dessen Innerem die mit dem Elektrometer verbundene Elektrode tropft; letztere kann passend aus einem capillaren Glasrohr gefertigt werden aus welchem Quecksilber in einem feinen Strahl ausströmt, doch muss man sich davon überzeugen dass keine Elektricitätsentwicklung durch Reibung stattfindet, oder dieselbe bestimmen wenn doch eine solche vorhanden wäre. Letzteres geschieht, indem man die Elektrode im Innern eines abgeleiteten Cylinders aus Graphit tropfen lässt; der dabei auftretende Ausschlag ist dann Folge der Reibung und kann bei den übrigen Messungen in Correctur genommen werden.

Die nach diesen drei verschiedenen Methoden gewonnenen Resultate stimmen bis auf circa 4% mit einander überein, wobei jedoch zu bemerken ist dass dieselben Abweichungen sich auch bei wiederholten Messungen nach ein und derselben Methode zeigen; es ist eben nicht möglich ein und dieselbe Combination zu verschiedenen Malen unter genau den gleichen Umständen herzustellen, ja es ist bekannt dass selbst das ausserordentlich constante Element von Daniell, je nach der Zusammenstellung, an den Elektroden Variationen der Potentialdifferenz von der hier erwähnten Grössenordnung aufweist.

In der folgenden Tabelle finden sich die für eine Reihe der gebräuchlichsten Combinationen gemessenen Potentialdifferenzen angeführt; dieselben sind auf das Daniell (Zn, $ZnSO_4 - CuSO_4$, Cu) als Einheit reducirt und drücken das Potential der Flüssigkeit aus,

wenn das des Metalles gleich Null gesetzt wird. Die Werthe können bis auf circa 0·02 D. genau angesehen werden.

H_2O dist.	H_2SO_4 Normale Lösung	HCl Normale Lösung	HNO_3 Normale Lösung
Na + 2·64	Na + 2·68	Mg + 2·00	Mg + 1·81
Mg + 1·65	Mg + 2·13	Al + 1·26	Zn + 1·33
Zn + 1·04—1·18	Zn + 1·35	Zn + 1·26	Cd + 0·94
Cd + 0·86	Al + 0·93	Cd + 0·95	Pb + 0·77
Al + 0·85	Cd + 0·91	Fe + 0·74	Fe + 0·75
Pb + 0·73	Bi + 0·87	Pb + 0·71	Al + 0·60
Sn + 0·69	Fe + 0·80	Cu + 0·33	Cu + 0·35
Fe + 0·59	Pb + 0·76	Bi + 0·33	C + 0·02
Cu + 0·31	Cu + 0·39	Ag + 0·18	Pt ± 0·00
Ag + 0·12	Ag + 0·12	C + 0·02	
C + 0·02	C + 0·01		
Pt ± 0·00	Pt + 0·01		
Au — 0·02			

HNO_3 concentrirt	Zn in	Cu in
Fe (frisch) + 0·34	(Na_2SO_4 + H_2O) + 1·29	(Na_2SO_4 + H_2O) + 0·34
Fe (passiv) — 0·35	($MgSO_4$ + H_2O) + 1·28	($MgSO_4$ + H_2O) + 0·36
C . . . . . — 0·46	($ZnSO_4$ + H_2O) + 1·30	($ZnSO_4$ + H_2O) + 0·35
Pt . . . . — 0·47		($CuSO_4$ + H_2O) + 0·35

Man ersieht aus der vorstehenden Tabelle ohne weiteres den engen Zusammenhang zwischen der Energie des chemischen Angriffes und der erzeugten Potentialdifferenz, desgleichen dass chemisch nicht reagirende Substanzen auch keine Elektricitätsentwicklung geben, und dass stets das Metall negativ, die Flüssigkeit positiv geladen erscheint. Die einzige Ausnahme hiervon macht Platin respective Graphit in concentrirter Salpetersäure, wobei letztere sich negativ ladet; doch kann es keinem Zweifel unterliegen dass auch hier Reactionen vor sich gehen und dass der bekannte in concentrirter Salpetersäure stets stattfindende Zerfall derselben in niedrigere Oxydationsstufen eine der wesentlichen Ursachen dieser Erscheinung ist. Aus den später noch ausführlicher zu besprechenden Reactionen im Grove'schen Elemente wird dieser Zusammenhang noch deutlicher hervorgehen.

Wir wollen nun die Processe, die bei der Einwirkung einer Flüssigkeit auf ein Metall vor sich gehen, in qualitativer und quantitativer Hinsicht noch genauer untersuchen.

Denken wir uns ein Stück Zink in angesäuertem Wasser. Bei der directen Auflösung des Zinks im Wasser ergibt sich Wärme, wählt man aber die Anordnung wie in einem galvanischen Elemente, so resultirt aus dem Verschwinden von chemischer Energie zunächst nicht Wärme, sondern Elektricität; es ist natürlich, dass diese nach Menge und Potential dieselbe Arbeit repräsentirt, wie die direct entwickelte Wärme. Der Process, der sich bei der Auflösung eines isolirten Stückes Zink in isolirtem Wasser abspielt, ist nun der folgende: die bei der Auflösung verlorene chemische Energie tritt zunächst in der Form zweier gleicher Mengen positiver und negativer Elektricität auf; von diesen geht erfahrungsgemäss die negative ins Zink, die positive ins Wasser, oder wenn wir an der Vorstellung von nur einer Elektricitätsart festhalten, es wird eine bestimmte Elektricitätsmenge aus dem einen Körper in den anderen durch die chemische Reaction hinübergerissen. Sind die beiden Massen des Zinks und des Wassers nicht unendlich gross, so muss dadurch das Potentialniveau in ersterem sinken, in letzterem steigen; da der chemische Angriff ungehindert fortdauert und damit auch die Entwicklung von Elektricität, so ist klar dass die Potentialdifferenz an der Erzeugungsstelle bald eine Grösse erreichen wird, die der trennenden Kraft das Gleichgewicht hält. Von diesem Momente an tritt an der Erzeugungsstelle selbst eine Wiedervereinigung der geschiedenen Elektricitäten ein, die natürlich nur unter Wärmeentwicklung stattfinden kann. Es wird also das Zink sich zwar noch weiter auflösen, aber — wenigstens scheinbar — unter directer Wärmeentwicklung. Man hat aber allen Grund, diese letztere als eine secundäre zu bezeichnen: denn macht man die Capacitäten des Zinks und des Wassers immer grösser und grösser, so erhält man zunächst immer mehr und mehr Elektricität, und macht man beide unendlich gross, so erhält man die ganze verbrauchte Energie in Form eines elektrischen Stromes. Es liegt demnach der Gedanke nahe, die Wärme, die bei irgend einer chemischen Reaction auftritt, nicht als primär entwickelt zu betrachten, sondern sie als die Joule'sche Wirkung der an der Reactionsstelle entstehenden elektrischen Ausgleichungsströme aufzufassen.

Zunächst würde sich also ergeben, dass ein galvanisches Element — wenn wir unter einem solchen eine Combination verstehen, bei welcher durch chemische Action und unter Verschwinden von chemischer Energie Elektricität erzeugt wird — theoretisch nicht aus zwei Metallen und einer Flüssigkeit, sondern aus einem Metall und einer Flüssigkeit besteht; das Metall bildet hierbei

den negativen, die Flüssigkeit den positiven Pol. Ferner ergibt sich, dass die Potentiale dieser Pole (wenn das Element isolirt zusammengestellt wurde) durchaus nicht an Grösse gleich zu sein brauchen, sondern dass dieselben ganz von dem Verhältniss der Capacitäten dieser Pole abhängen. Die Potentialdifferenz der letzteren ist jedoch eine constante und, wie die folgende Betrachtung lehrt, abhängig von dem Wärmewerthe der betreffenden Reaction.

Denken wir uns von zwei verschiedenen Körpern die chemisch äquivalenten Mengen m und M einer beliebigen Reaction unterworfen; dem ersten Körper entspreche die Reactionswärme q, dem zweiten Q. Die von den beiden Massen m und M gelieferten Wärmemengen stünden demnach im Verhältnisse von $q:Q$, wenn alle chemische Energie sich in Wärme verwandelt. Wird dagegen die ganze chemische Energie in Elektricität verwandelt, so resultiren daraus zwei gleiche Mengen; denn zwei beliebig construirte galvanische Elemente liefern gleiche Elektricitätsmengen in jenen Zeiten, in welchen chemisch äquivalente Mengen des angegriffenen Metalles verbraucht werden. Es folgt dies auch aus dem elektrolytischen Gesetze Faraday's, welches beweist dass eben jene Mengen chemisch äquivalent sind, die gleiche Quantitäten von Elektricität mit sich führen. Wenn demnach aus der Reaction der beiden Massen m und M gleiche Elektricitätsmengen resultiren, so kann denselben unmöglich ein gleiches Potentialniveau entsprechen. Denn es ist klar dass durch das Abfliessen dieser Elektricitätsmengen zur Erde genau dieselben Arbeiten gewonnen werden müssen, wie bei directem chemischen Verbrauch von m und M. Fliesst aber die Elektricität (z. B. durch einen Draht) zur Erde, so wird bekanntlich eine Wärmemenge erzeugt, die proportional dem Producte $J \cdot E$ ist, worin J eine der Elektricitätsmenge proportionale Grösse und E die elektromotorische Kraft bedeutet. Den beiden erzeugten Elektricitätsmengen werden somit die Producte $J \cdot e$ und $J \cdot E$ entsprechen, da ihre Quantitäten zwar gleich sind, nicht aber ihre Potentiale. Bei ihrem Abfliessen zur Erde leisten sie zwei Arbeiten a und A, für welche somit die Beziehung gilt: $\frac{a}{A} = \frac{J \cdot e}{J \cdot E}$. Und da nach dem Obigen diese Arbeiten a und A in demselben Verhältnisse zu einander stehen müssen, wie die bei directer Reaction von m und M erhaltenen Wärmemengen, letztere aber sich verhalten wie q und Q, so folgt daraus:

$$\frac{a}{A} = \frac{q}{Q} \text{ oder } \frac{J \cdot e}{J \cdot E} = \frac{q}{Q} \text{ oder weiter } \frac{e}{E} = \frac{q}{Q},$$

d. h. die erzeugten Potentialdifferenzen verhalten sich wie die Reactionswärmen der beiden chemischen Processe. Da nun diese Reactionswärmen für die meisten der vorkommenden Combinationen sehr genau bekannt sind — namentlich durch die umfassenden Arbeiten von J. Thomsen — so ergibt sich daraus ein sehr beachtenswerthes Hilfsmittel zur Prüfung der hier vertretenen, sogenannten chemischen Theorie des galvanischen Elementes und zur Vorausbestimmung der elektromotorischen Kräfte beliebiger Combinationen.

Wenn es sich nun zu praktischen Zwecken darum handelt, das Element als Quelle eines permanenten Stromes zu verwenden, so ist klar dass dieser Zweck erreicht wird, sobald man für genügenden Abfluss von beiden Polen weg sorgt; denn solange durch diesen Abfluss die Potentialdifferenz an der Grenze des Maximalwerthes gehalten wird, werden alle neu entwickelten Elektricitäten zum Ersatze für die abgeflossenen verwendet. Dahin würde man theoretisch am einfachsten gelangen, wenn man das Zink und das Wasser unendlich gross machen würde; da dies praktisch unmöglich, so hilft man sich auf eine andere höchst einfache Weise: man verbindet durch zwei metallische, im Uebrigen aber vollkommen indifferente Leiter das Zink und Wasser mit zwei Punkten ein und desselben unendlich grossen Leiters, der Erde. Es ist einleuchtend dass dadurch ganz dasselbe Resultat erreicht wird, denn auch jetzt haben die Enden der Ableitungen das Potential Null, ihre Anfänge dagegen besitzen die Potentialdifferenz Zn | H_2O, es muss somit durch die ganze Leitung ein stationärer Strom circuliren. Da man sich, um das Wasser durch einen chemisch indifferenten Körper abzuleiten, am besten des Platins bedient, so gelangt man auf diese Weise zur Construction des Smee-schen Elementes. Da in jedem Momente gleiche und entgegengesetzte Quantitäten von Elektricität durch die Oxydation des Zinks geliefert werden, so ist auch weiter klar dass es gar nicht nöthig ist, die beiden Enden der Ableitung mit der Erde zu verbinden; es genügt auch, wenn sie unter einander verbunden werden, da durch die gegenseitige Annullirung beider Elektricitäten stets die Bedingung für einen stationären Strom gegeben ist. Man gelangt solcherweise zu einem in sich geschlossenen Smee'schen Elemente. In so vielen Gestalten man nun den chemischen Process einzuleiten und die Ableitungen herzustellen vermag, in ebenso vielen Gestalten erscheint uns das galvanische Element.

Es wurde bereits erwähnt dass bei isolirt zusammengestellten Elementen, z. B. Zink in Wasser, die Potentiale an beiden Polen nicht

von gleicher absoluter Grösse zu sein brauchen, sondern dass diese Werthe ganz von den Capacitäten der Pole abhängen. Es haben z. B. der negative Pol (das Zink) die Capacität c, der positive (Wasser) die Capacität C. An der Grenzfläche von Zink und Wasser wird sich eine constante Potentialdifferenz herstellen, die wir mit S bezeichnen wollen. Es wird der negative Pol ein Potential $-p$ annehmen, und der positive $+P$. Man hat demnach $S = P + p$.

Da die Ladungen beider Pole durch gleiche Mengen von Elektricität geschehen, so ist ins Zink die Menge $-q$ eingeströmt, ins Wasser dagegen $+q$. Durch diese Elektricitätsmengen und durch ihre Capacitäten werden die Potentiale bestimmt, bis zu welchen sich die Pole laden. Und zwar hat man

$$-q = -c \cdot p$$
$$q = C \cdot P$$

oder $C \cdot P = c \cdot p$ und

$$\frac{p}{P} = \frac{C}{c}.$$

Da ferner $P + p = S$ ist, so ergibt sich weiter

$$\frac{p}{S - p} = \frac{C}{c} \text{ oder } p\,c = S\,C - p\,C;$$

für den Werth von p erhält man also $S \frac{C}{C + c}$, und auf gleiche Weise für P den Werth $S \frac{c}{C + c}$.

Man hat somit die Potentiale:

$$p = -S \frac{C}{C + c}$$
$$P = +S \frac{c}{C + c}$$

Man entnimmt aus diesen Gleichungen zunächst das Folgende:

1. Nur in dem speciellen Falle, wo $C = c$ ist, wird die Spannung an beiden Polen numerisch gleich; man hat dann

$$p = -\frac{1}{2} S$$
$$P = +\frac{1}{2} S$$

2. Verbindet man einen Pol mit der Erde, d. h. macht man seine Capacität unendlich gross, so sinkt sein Potential auf Null und das des anderen erreicht den Werth S. Es ergibt die Formel

$$\text{für } C = \infty \begin{cases} p = -S \\ P = 0 \end{cases} \quad \text{für } c = \infty \begin{cases} p = 0 \\ P = +S \end{cases}$$

3. Wird die Capacität eines Poles gleich Null, so steigt dadurch dessen Potential auf S und das des anderen sinkt auf Null. Man erhält

$$\text{für } C = 0 \begin{cases} p = 0 \\ P = +S \end{cases} \quad \text{für } c = 0 \begin{cases} p = -S \\ P = 0 \end{cases}$$

Alle diese Relationen finden in der Erfahrung ihre Bestätigung, wobei jedoch zu bemerken ist, dass man die obigen Werthe nicht direct am Elektrometer beobachten kann, da ja diesem auch eine gewisse Capacität zukömmt; bezeichnen wir die entsprechenden Ablesungen am Elektrometer mit p' und P' und die Capacität desselben mit c', so ergibt eine einfache Rechnung die folgenden Relationen:

$$p' = -S \frac{C}{C+c} \cdot \frac{C+c}{C+c+c'}$$

$$P' = +S \frac{c}{C+c} \cdot \frac{C+c}{C+c+c'}$$

die sich auch durch das Experiment vollkommen bestätigen, wenn man die Capacitäten der Pole in bekannter Weise variirt.

§ 76. Specielle Formen des galvanischen Elementes.

Befindet sich ein Metall in einer Flüssigkeit die chemisch auf dasselbe reagirt (z. B. Zn in H_2SO_4 aq.), so hat man ein galvanisches Element; der negative Pol ist das Metall, der positive die Flüssigkeit. Soll dieses Element einen continuirlichen Strom liefern, so müssen beide Pole durch einen übrigens indifferenten Leiter (Pt) verbunden werden. Gesetzt, eine solche Verbindung wäre hergestellt, so würde der Strom den Elektrolyten zersetzen müssen, um circuliren zu können; eine solche Zersetzung ist aber, wie wir gesehen haben, mit der geringsten elektromotorischen Kraft durchführbar, kann also bei jeder Combination eintreten.

Der negative Strom geht dabei aussen vom Zink durch den Verbindungsdraht zum Wasser und ein solcher Strom scheidet an seiner Eintrittsstelle bekanntlich Wasserstoff aus, an seiner Austrittsstelle aber Sauerstoff; letzterer wird wieder zur Oxydation des Zinks

verwendet und liefert weitere Elektricitätsmengen, ersterer dagegen bildet nun selbst mit dem Wasser ein Element (vorausgesetzt dass die Elektrode, an welcher er ausgeschieden wurde, gegen ihn indifferent ist) und wir haben jetzt zwei Elemente gegen einander geschaltet: Zn in H_2SO_4 und H_2 in H_2SO_4. Die resultirende Wirkung beider ist der Effect der im gewöhnlichen Sinne als ein Element (Smee) angesehenen Combination Zn H_2SO_4 Pt.

Für die praktische Construction von Elementen sind demnach folgende zwei Punkte in erster Reihe maassgebend: eine Elektrolyse der Flüssigkeit muss immer eintreten, es entsteht somit immer ein zweites Element: man wird daher bestrebt sein die Anordnung so zu wählen, dass erstens dieses zweite Element womöglich mit dem ersten im gleichen Sinne wirkt oder, wenn entgegen, doch thunlichst schwach, und zweitens dass die auftretenden Reactionen so regelmässig als möglich verlaufen, wodurch die Constanz des Elementes bedingt ist.

Wir betrachten nun etwas genauer die folgenden typischen Combinationen auch in quantitativer Beziehung.

Daniell's Element.

Das bekannte Schema des Daniell'schen Elementes ist Zn H_2SO_4 $CuSO_4$ Cu: die beiden Flüssigkeiten (wässerige Lösungen) sind durch ein Diaphragma getrennt. Der negative Strom, der am Cu-Pol eintritt, reducirt dort metallisches Cu, scheidet an der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten einerseits SO_4 aus, andererseits H_2 — die sofort wieder H_2SO_4 bilden — und endlich am Zink SO_4 unter Bildung und Lösung von $ZnSO_4$. Das schliessliche Resultat der chemischen Veränderungen ist somit die Reduction von 1 Aequivalent $CuSO_4$, während 1 Aequivalent $ZnSO_4$ gebildet wird. Dieser Reaction entspricht aber nach J. Thomsen ein Wärmewerth von 50,000 Calorien, und dieser Grösse haben wir demnach die elektromotorische Kraft des Daniell proportional zu setzen.

Ersetzt man, wie dies häufig geschieht, die Schwefelsäure im Daniell durch $ZnSO_4$ aq., so ist die elektromotorische Kraft um circa 2—3% kleiner; das Element ist aber constanter.

Betrachten wir nochmals die Reactionen welche bei dieser Combination vor sich gehen: der negative Strom tritt am Kupferpol ein, und zersetzt hinter einander $CuSO_4$ und $ZnSO_4$; diese beiden Arbeiten sind demnach zu leisten, dagegen bildet sich sowohl an der Trennungsfläche der Flüssigkeiten als am Zink je ein Aequivalent $ZnSO_4$,

und es verwandelt sich allmälig die $CuSO_4$-Lösung in $ZnSO_4$-Lösung wobei noch eine kleine Arbeit gewonnen wird, nämlich die Differenz zwischen den Lösungswärmen des Zn- und Cu-Salzes im Wasser; da erstere überwiegt so ist diese Arbeit eine positive. Man hat demnach folgendes Schema der Processe:

$$+ (Zn,\ SO_4) + (Zn,\ SO_4) + (ZnSO_4,\ H_2O)$$
$$- (Zn,\ SO_4) - (Cu,\ SO_4) - (CuSO_4,\ H_2O).$$

Man hat somit im Daniell eigentlich drei hinter einander geschaltete Elemente: $Zn \mid ZnSO_4$ und in gleichem Sinne $ZnSO_4 \mid CuSO_4$ aber dagegen $Cu \mid CuSO_4$.

Was nun die Grössen dieser einzelnen elektromotorischen Kräfte anlangt, so wurden dieselben folgendermaassen gefunden:

$Zn \mid ZnSO_4$	+ 1·314 Daniell
$ZnSO_4 \mid CuSO_4$	+ 0·062 „
$CuSO_4 \mid Cu$	— 0·375 „

Dabei bezeichnen die Zahlen jeweilig das Potential der zweiten Substanz einer Combination wenn das der ersten gleich Null ist. In Fig. 90 ist der Gang der Potentialfunction im offenen, oder durch grossen Widerstand geschlossenen, Daniell graphisch dargestellt.

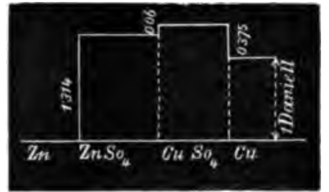


Fig. 90.

Die Verbindungswärmen sind für die Combinationen $(Zn,\ SO_4)$ und $(Cu,\ SO_4)$ leider nicht bekannt so dass eine Controle der hier gefundenen Werthe der Potentialsprünge nicht möglich ist; dagegen liefern die Thomsen'schen Zahlen als Differenz der Lösungswärme von Zinksulfat und Kupfersulfat per Aequivalent 2600 Cal. Dividirt man diese Zahl durch die einem Daniell entsprechenden 50.000 Cal. so erhält man 0·05 D., was mit dem direct gefundenen Werthe 0·062 in Anbetracht der Kleinheit, in genügender Uebereinstimmung steht.

Smee's Element.

Wir haben die Reactionen in diesem Elemente bereits oben kurz auseinandergesetzt; sie lassen sich im folgenden Schema darstellen:

$$+ (Zn,\ SO_4)$$
$$- (H_2,\ SO_4).$$

Nach Thomsen liefern diese Reactionen einen Ueberschuss an Wärme von 37.700 Cal. per Aequivalent oder, auf das Daniell bezogen, eine elektromotorische Kraft von $\frac{37700}{50000} = 0{\cdot}75$ D.

In einem solchen Elemente beobachtet man die folgenden Sprünge des Potentials:

$Zn \mid H_2SO_4$ . . . . . + 1·38
$H_2SO_4 \mid Pt$ . . . . . — 0·64

Die Summe gibt 0·74, was mit dem aus den Wärmewerthen berechneten Werthe sehr gut übereinstimmt.

Fig. 91 zeigt das Diagramm des durch grossen Widerstand geschlossenen Smee'schen Elementes.

Das Smee'sche Element ist viel inconstanter als das Daniell und zwar aus mehreren Gründen: Ist freier Sauerstoff im Wasser enthalten so wird der H_2 wieder oxydirt und die elektromotorische Kraft steigt; ist viel $ZnSO_4$ gelöst so dass Spuren davon an das Pt gelangen so wird dort nicht nur H_2 sondern auch Zn abgeschieden und dadurch sinkt die elektromotorische Kraft, da die Verbrennungswärme des Zn grösser ist als die des H_2. Ausser diesen beiden sehr wesentlichen Ursachen spielt aber auch noch die Absorption und Verdichtung des H_2 am Platin eine Rolle, doch ist die Natur dieses Vorganges in Bezug auf die damit verbundenen thermischen Vorgänge noch nicht genügend aufgeklärt. Alle diese Ursachen der Inconstanz entfallen beim Daniell fast vollständig.

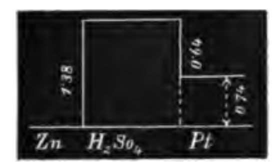


Fig. 91.

Grove's Element.

In diesem Elemente haben wir Zn in H_2SO_4 und durch ein Diaphragma davon getrennt Pt in HNO_3 conc. also $Zn \mid H_2SO_4 \mid HNO_3 \mid Pt$. Die Reactionen, die bei der Elektrolyse durch den Eigenstrom eintreten, sind die folgenden: Ausscheidung von H_2 am Pt und von O am Diaphragma, Ausscheidung von H_2 andererseits am Diaphragma und von SO_4 am Zn. Am Diaphragma bildet sich wieder H_2O und am Zn $ZnSO_4$, das in Lösung geht. Der am Pt abgeschiedene H_2 erscheint nicht als solcher, sondern reducirt die HNO_3 zu HNO_2 unter Bildung von H_2O. Es ergibt sich somit:

$$+ (H_2, O) + (Zn, SO_4) + (H_2, O)$$
$$- (H_2, O) - (H_2, SO_4) - (HNO_2, O)$$

An der Trennungsfläche der beiden Flüssigkeiten geht factisch keine Veränderung vor sich und dementsprechend tritt auch dort keine elektromotorische Kraft auf. Am Zn haben wir wieder die Bildung von $Zn SO_4$, am Pt aber die Bildung von $H_2 O$ unter Reduction der HNO_3; die letztere Reaction liefert eine Arbeit, und zwar nach Thomsen 44.000—58.000 Cal., entsprechend 0·88—1·16 D., je nachdem die Salpetersäure mehr oder minder concentrirt ist[1]). Es bleibt somit als Arbeitsüberschuss $(Zn, SO_4) - (H_2, SO_4)$, d. i. ein Smee $= 0{\cdot}75$ D. mehr $(H_2, O) - (HNO_2, O) = 0{\cdot}88$ bis 1·16 D. Die Gesammtkraft des Grove'schen Elementes kann demnach je nach der Concentration der Salpetersäure von 1·64—1·91 D. variiren. Für ein bestimmtes Element wurden die folgenden Sprünge des Potentials gefunden:

$Zn \mid H_2 SO_4$	+ 1·35
$H_2 SO_4 \mid HNO_3$	0·00
$HNO_3 \mid Pt$	+ 0·38

Die Gesammtkraft war somit 1·73 D. Die beiden durch die Elektrolyse entstehenden Elemente wirken hier im gleichen Sinne und daher die beträchtliche Stärke des Grove'schen Elementes. Das Diagramm des offenen Elementes ist durch Fig. 92 dargestellt.

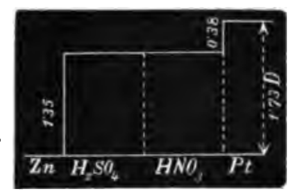


Fig. 92.

Es ist bekannt dass das Umgeben des einen Poles mit Superoxyden verstärkend auf die elektromotorische Kraft der Elemente wirkt, so z. B. im Leclanché-Element; dieses Verhalten wird begreiflich, wenn man bedenkt, dass dadurch dem durch die Elektrolyse freiwerdenden Wasserstoff Gelegenheit gegeben wird, sich unter Wasserbildung und gleichzeitiger Reduction des Superoxydes wieder zu oxydiren. Dabei wird die Verbrennungswärme des Wasserstoffes wieder zurückgewonnen, in manchen Fällen sogar noch mehr, da die Reduction von Superoxyden häufig mit Wärmeentwicklung verbunden ist; so z. B. beim Wasserstoffsuperoxyd, Silber- und Bleisuperoxyd. Auf letzterem Umstande beruht auch zum grössten Theil die Wirkung der Blei-Accumulatoren.

Man bringt oft das Smee'sche Element in einen gewissen Gegensatz zum Daniell oder Grove, indem man ersteres als inconstant oder polarisirbar, letzteres dagegen als unpolarisirbar bezeichnet; man hat dem factischen Auftreten des Wasserstoffes am

---

[1]) Vom spec. Gewicht 1·25 bis zur Concentration.

Platin des Smee'schen Elementes die Fähigkeit zugeschrieben, dieses Metall zu polarisiren und darin den Grund der Inconstanz dieses Elementes gesucht. Wir haben im Obigen die Gründe dieser Veränderlichkeit schon kurz berührt und wollen nur noch constatiren, dass dieselben mit dem Auftreten des Wasserstoffes am Platin nichts zu thun haben, sondern ganz von der Construction des Elementes namentlich von seinem inneren Widerstand, und von der Stromstärke abhängen; solange das Element keinen anderen chemischen Reactionen unterworfen ist als den durch das Schema Zn | $H_2 SO_4$ | Pt angedeuteten, bleibt auch seine elektromotorische Kraft vollkommen constant auf dem Werthe 0·74 D.

Das Grove'sche Element welches, da kein Wasserstoff in demselben am Platin auftritt, sowie das Daniell'sche als constant bezeichnet wird, ist nichtsdestoweniger sehr inconstant, aus Gründen, die gleichfalls schon erwähnt wurden; es wird eben die Salpetersäure rasch reducirt und in der verdünnten Säure reagirt der Wasserstoff mit einem ganz anderen Wärmewerthe als in der concentrirten. Dasselbe ist in noch viel höherem Masse beim Leclanché-Element der Fall, welches so inconstant ist wie das Smee'sche, und doch tritt auch hier kein freier Wasserstoff auf; es gibt eben jenen Unterschied zwischen polarisirbaren und unpolarisirbaren Elementen nicht, sie sind alle nur quantitativ von einander unterschieden, indem in einigen (Daniell) die chemischen Reactionen fast bis zum vollständigen Verbrauch der Substanzen in gleicher oder doch nahezu gleicher Weise verlaufen, in anderen dagegen (Grove, Smee) schon nach kurzer Dauer des Stromes ganz andere Reactionen Platz greifen, so dass man es strenge genommen gar nicht mehr mit denselben Elementen zu thun hat.

Ersetzt man in einem Smee'schen Elemente das Platin durch Kupfer, so erhält man ein sogenanntes Volta'sches Element; ist die Wasserstoffentwicklung am Kupfer so reichlich dass keine directe Oxydation des letzteren in der Flüssigkeit eintritt, was man an seinem Blankbleiben erkennt, so wirkt das Element genau so, wie ein Smee'sches. Seine elektromotorische Kraft ist 0·74 D., wenn es durch einen grossen Widerstand geschlossen ist, ein Beweis, dass die sogenannte Polarisation des zweiten Metalles durch den auftretenden Wasserstoff hierbei keine Rolle spielt. Das Diagramm ist vollkommen identisch mit dem des Smee'schen Elementes.

Man setzt gewöhnlich voraus — und manche Theorien (Schönbein's Tendenztheorie) müssen dies thun — dass in einem galvani-

schen Elemente wenigstens einer der Leiter ein Elektrolyt sein müsse; die chemische Theorie kennt diese Voraussetzung nicht, es kann das Element ausschliesslich aus Grundstoffen bestehen, wenn nur wenigstens zwei derselben chemisch auf einander wirken. In der That erhält man durch Combination verschiedener Metalle mit Brom oder Jod vollkommen constant wirkende Elemente, die aber wegen des ausserordentlich grossen Widerstandes nur zu elektrometrischen Messungen verwendbar sind.

Graphit wird von Brom und Jod nicht angegriffen, man kann sich desselben daher zur Ableitung dieser Substanzen bedienen. Taucht man in flüssiges, durch Graphit abgeleitetes Brom oder Jod einen mit dem Elektrometer verbundenen Zinkstab, so erfolgt unmittelbar ein Ausschlag, der auf einer constanten Grösse beliebig lange verbleibt; derselbe ist die Folge des chemischen Angriffes, welchen das Zink von Seiten des Brom oder Jod erfährt. Allerdings bildet sich durch diesen Angriff allmälig ein Elektrolyt oder doch wenigstens ein zusammengesetzter Körper, es kann aber keinen Augenblick zweifelhaft sein, dass der momentane Auftritt elektrischer Ladungen bei diesem Versuche an die Existenz eines solchen nicht gebunden ist.

Die Verbindungswärmen von Br und J mit den meisten Metallen sind durch die Untersuchungen Thomsen's bekannt, so dass man in den Stand gesetzt ist, die Processe auch quantitativ zu verfolgen; in der folgenden Tabelle sind die beobachteten und die nach den Zahlen von Thomsen berechneten elektromotorischen Kräfte für einige Combinationen angegeben. Die Wärmewerthe der Reactionen: (Mg, Br), (Pt, Br), (Mg, J) und (Pt, J) sind nicht bekannt.

	Elektromotorische Kraft			Elektromotorische Kraft	
	beob.	ber.		beob.	ber.
Mg, Br . .	2·36 D.	— D.	Mg, J . .	1·57 D.	— D.
Al, Br . .	1·60 „	1·61 „	Zn, J . .	0·96 „	0·98 „
Zn, Br . .	1·52 „	1·52 „	Al, J . .	0·77 „	0·93 „
Pb, Br . .	1·29 „	1·29 „	Hg, J . .	0·55 „	0·68 „
Ag, Br . .	0·91 „	0·91 „	Ag, J . .	0·56 „	0·55 „
Cu, Br . .	0·51 „	0·65 „	Pt, J . .	0·01 „	— „
Pt, Br . .	0·04 „	— „			

Wie man sieht, besteht zwischen den beobachteten und berechneten Werthen eine gute Uebereinstimmung. Die Metalle werden sämmtlich durch den Angriff negativ elektrisch.

Diese Elemente unterscheiden sich von den bisher besprochenen dadurch, dass in ihnen nur an einer einzigen Stelle ein Sprung der Potentialfunction vorkommt, dort wo die chemische Reaction stattfindet. Bringt man Jod in die Form eines Hohlcylinders (zwischen zwei concentrische Glasröhren) und führt in dasselbe eine Magnesium- und eine Graphitelektrode ein, so kann man mittelst einer Tropfelektrode das Potential im Innern des Jod messen. Man erhält so:

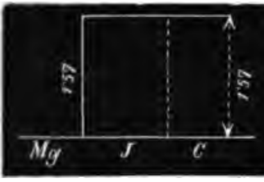


Fig. 93.

Mg | J . . . . + 1·57 D.

und direct am Elektrometer: M | J | C = + 1·57 D.

Hier ist also die Kohle wirklich nur ein elektrisch indifferenter Theil der Schliessung eines aus zwei Substanzen bestehenden galvanischen Elementes. In Fig. 93 ist das Diagramm dieses Elementes im offenen Zustande gezeichnet.

Alle die vorgenannten aus Grundstoffen bestehenden Elemente sind vollkommen constant.

§ 77. Theorie der galvanischen Polarisation.

Leitet man den galvanischen Strom durch einen Elektrolyten, so dass Zersetzung desselben eintritt, und schliesst man nach Unterbrechung des Stromes die beiden Elektroden durch ein Galvanometer, so beobachtet man einen, dem primären der Richtung nach entgegengesetzten Strom, dessen Intensität rasch auf Null absinkt; diese Erscheinung hat man mit dem Namen der galvanischen Polarisation belegt und sie früher auf eine Veränderung der Elektroden durch die Ionen in ihrem elektrischen Verhalten gegen die Flüssigkeit zurückgeführt, d. h. man hat die Thatsache durch Worte umschrieben.

Nachdem wir gesehen haben, dass die Entstehung eines Stromes im galvanischen Elemente sich auf die chemischen Reactionen in demselben zurückführen lässt, kann es kaum mehr zweifelhaft sein, dass auch der Polarisationsstrom einer gleichen Ursache seine Existenz verdankt, d. h. dass er gleichfalls das Resultat chemischer Reactionen ist; welcher Natur letztere seien, ist naheliegend, denn wir sehen, ass, bevor Polarisation entstehen kann, ein Elektrolyt, entgegen der emischen Natur seiner Elemente, zerlegt werden muss und sehen ner, dass während des Polarisationsstromes diese Elemente als the wieder verschwinden unter Rückbildung des Elektrolyten. Diese ckbildung werden wir demnach als die Ursache des Phänomens

betrachten und aus ihrem Wärmewerth werden wir, wie bei jedem Elemente, einen Schluss auf die entstehende elektromotorische Kraft ziehen.

Gesetzt wir hätten durch die elektrolysirende Wirkung eines Stromes von den zwei Platinelektroden im Wasser die eine mit Wasserstoff, die andere mit Sauerstoff bedeckt. Was geschieht, wenn wir diese direct metallisch verbinden? Halten wir uns an die von Clausius gegebene Darstellung der Natur eines Elektrolyten, so werden wir annehmen müssen, dass der am Platin haftende Wasserstoff von freien Sauerstoffatomen getroffen, sich oxydirt, wodurch ein Strom entsteht, der, so schwach er auch sein mag, nun selbst das Wasser elektrolysirt und an der O-Elektrode Wasserstoff, an der H-Elektrode Sauerstoff ausscheidet. Man sieht, dass dieser Process dauern kann, bis alle ursprünglich vorhandenen Ionen verschwunden sind und dass der Effect derselbe ist, als hätten sich diese direct verbunden. Die resultirende elektromotorische Kraft wäre in diesem Falle gemessen durch die Verbrennungswärme des Wasserstoffes. Man sieht ferner, dass die Elektroden hier nur die Rolle von Leitern spielen, so lange sie nicht selbst zu chemischen Actionen Anlass geben; tritt aber letzteres ein, so ändert sich damit der Werth der Polarisation, wie wir noch ausführlicher sehen werden.

Wir betrachten demnach ein polarisirtes Voltameter als ein galvanisches Element, das sich von den gewöhnlichen nur dadurch unterscheidet, dass in ersterem die chemisch wirksamen Substanzen nur in sehr geringer Menge vorhanden sind, seine Wirksamkeit daher durch den Consum der letzteren rasch verschwindet.

So zahlreich die Combinationen gewöhnlicher Elemente sind, ebenso zahlreich sind die durch Polarisation entstehenden, aber bei allen zeigt sich die volle Uebereinstimmung zwischen der beobachteten und der aus den Wärmewerthen der betreffenden Reactionen berechneten elektromotorischen Kraft; freilich setzt letzteres voraus, dass man die Reactionen im Polarisationselemente kennt und das ist keineswegs immer der Fall, oft verlaufen dieselben anders als man erwarten sollte und es treten dann Widersprüche zwischen Rechnung und Beobachtung auf. So ist es z. B. bei manchen Elementen mit Silber- oder Bleielektroden der Fall, wo sich bei der Reaction unbestimmbare Mengen von Superoxyden dieser Metalle bilden, so auch bei der Elektrolyse des Wassers, wo je nach Stromdichte und Temperatur veränderliche Mengen von H_2O_2 entstehen. Dazu kommt noch, dass oft die Elektrodenmetalle physikalisch auf die ausgeschiedenen Ionen

wirken, namentlich wenn letztere gasförmig sind, durch Absorption und Occlusion, Vorgänge, deren Wärmewerthe völlig unbekannt sind und daher nicht mit in Rechnung gezogen werden können.

Man kann aber eine beträchtliche Reihe von Voltametern construiren, in welchen die Reactionen in bekannter Weise verlaufen und bei diesen findet man auch ausnahmslos eine gute Uebereinstimmung zwischen den Wärmewerthen und den beobachteten elektromotorischen Kräften.

Die folgende Tabelle gibt einige Beispiele hierfür; die Beobachtung der Polarisation geschah mittelst des Elektrometers und einer vibrirenden Wippe, die Berechnung unter Zugrundelegung der Zahlen von J. Thomsen.

Elektrolyt	Elektroden	Pol. beob.	Pol. berechnet
J Ag	C	0·54 D.	0·56 D.
Br Ag	„	0·90	0·93
Cl Ag	„	1·17	1·21
J H, aq.	„	0·54	0·54
Br H, aq.	„	1·16	1·17
Cl H, aq.	„	1·60	1·61
H_2O	Pt	1·42	1·43
Cl Na, aq.	C	2·08	2·06
J Na, aq.	„	1·25	1·24
Br Na, aq.	„	1·78	1·79
Cl K, aq.	„	2·04	2·06
Br K, aq.	„	1·55	1·54
J K, aq.	„	1·08	0·92
$CuSO_4$, aq.	Pt	1·13	1·15
$ZnSO_4$, aq.	„	2·14	2·15
$Cu(NO_3)_2$, aq.	„	1·11	1·09
$Zn(NO_3)_2$, aq.	„	2·11	2·10
$AgNO_3$, aq.	„	0·42	0·34
$Fe(NO_3)_2$, aq.	„	1·88	1·89
H_2O	Cu	0·67	0·65
H_2O	Fe	0·049	0·048
H Cl, aq.	Cu	0·42	0·43
H Cl, aq.	Ag	0·44	0·41

Wir wollen in einem speciellen Falle den Einfluss secundärer hemischer Reactionen im Voltameter auf die erzeugte elektromotoische Kraft der Polarisation untersuchen und betrachten zu diesem

Zwecke die Elektrolyse des Wassers zwischen Platinelektroden. Zerfällt das H_2O einfach in H_2 an einer und O an der anderen Elektrode so wird bei der Polarisation an ersterer H_2 oxydirt und durch den so entstehenden Strom an der anderen Elektrode H_2 ausgeschieden der dort gleichfalls H_2O bildet; es wird also im Ganzen 2 (H_2O) gebildet und 1 (H_2O) zersetzt. Die elektromotorische Kraft der Polarisation entspricht dem Wärmewerthe der Reaction (H_2, O) d. i. 69.000 Cal. oder circa 1·4 D. Diesen Werth beobachtet man auch thatsächlich wenn man die Elektrolyse zwischen grossen Platinblechen vornimmt; steigert man jedoch die Stromdichte dadurch dass man die Elektroden kleiner macht, z. B. Wollaston e'sche Spitzen aus Platindraht verwendet, so wird der Sauerstoff nicht als solcher frei sondern oxydirt das Wasser zu H_2O_2.

Das hat aber auf die Grösse der Polarisation einen wesentlichen Einfluss, denn wenn Sauerstoff sich mit Wasser zu Wasserstoffsuperoxyd verbindet, so wird eine ziemlich beträchtliche Menge Wärme aufgenommen. Soll nun ein Strom Wasser zersetzen, so muss er nicht nur Wasserstoff und Sauerstoff von einander trennen, wozu ein gewisser Wärmewerth erforderlich, sondern er verwandelt auch noch, und zwar gleichfalls unter Wärmeverbrauch, den ausgeschiedenen Sauerstoff mit dem umgebenden Wasser in Wasserstoffsuperoxyd. Eine je grössere elektromotorische Kraft aber demnach zur Wasserzersetzung erforderlich wäre, desto grösser müsste auch die durch die rückläufigen chemischen Processe entwickelte Polarisation sein. Nun ist die Verbindungswärme von einem Aequivalent Sauerstoff mit H_2O circa — 25.000 Cal. und dazu kommt noch der Werth (H_2, O) mit 69.000 Cal., so dass im Ganzen für die Polarisation 94.000 Cal. oder 1·9 D. verfügbar sind. Und in der That findet man zwischen Wollaston e'schen Spitzen einen wesentlich höheren Werth der Polarisation, nämlich 2·0 D., was mit dem berechneten Werthe ziemlich gut übereinstimmt. Es wird also im Wasservoltameter die elektromotorische Kraft durch das H_2O_2 ganz in derselben Weise erhöht wie in manchen galvanischen Elementen durch andere Superoxyde, z. B. Braunstein, Bleisuperoxyd etc.

Dass hierbei wirklich die Bildung des H_2O_2 eine wesentliche Rolle spielt, geht auch aus dem Verhalten des Wasservoltameters bei höherer Temperatur hervor; bekanntlich bildet sich H_2O_2 bei tieferen Temperaturen viel leichter als bei höheren, und demzufolge steht zu erwarten dass die Polarisation im letzteren Falle auch kleiner sei. Die folgende Tabelle gibt die Grösse der Polarisation zwischen Wolla-

stone'schen Spitzen bei verschiedenen Temperaturen an und man erkennt deutlich daraus den eben besprochenen Einfluss.

Temperatur	Pol.
25° C.	2·03 D.
53° „	2·00 „
55° „	1·97 „
60° „	1·94 „
68° „	1·86 „
75° „	1·83 „
81° „	1·80 „

Die bisher angegebenen Grössen der Polarisation beziehen sich alle auf einen Zustand dauernder Zersetzung des Elektrolyten, d. h. es ist vorausgesetzt, dass der primäre Strom eine grössere elektromotorische Kraft besitze als der Polarisationsstrom; aber nicht nur in diesem Falle kann man eine Polarisation beobachten, sondern auch bei den geringsten Kräften des primären Stromes. Beschickt man z. B. ein Wasservoltameter mit Platinelektroden mit nur einem Daniell, so reicht dieses zur Zersetzung des Wassers (Pol. = 1·4 D.) nicht aus, nichtsdestoweniger liefert das Voltameter nach Unterbrechung des primären Stromes einen Polarisationsstrom. Untersucht man nun diesen mit Rücksicht auf seine elektromotorische Kraft, so findet man Folgendes: So lange die Kraft des Primärstromes unter der zur Zersetzung nöthigen Grösse bleibt, ist die elektromotorische Kraft der Polarisation in jedem Momente der primären gleich, es wird also das polarisirende Element durch die Polarisation vollkommen compensirt und der Kreis ist stromlos; steigt aber die Kraft des primären Stromes über jene Grenze, so bleibt von derselben an die Polarisation vollkommen constant.

Diese Verhältnisse gelten jedoch nur, wenn sich im Voltameter nicht secundäre, von der Stromstärke abhängige Processe abspielen, was bei manchen Combinationen, so namentlich bei Platin und Wasser, allerdings der Fall ist. Macht man sich von dem Einfluss der Stromdichte jedoch durch Anwendung Wollaston e'scher Spitzen unabhängig, so kann man den geschilderten ganz regelmässigen Verlauf der Polarisation auch bei Pt und H_2O beobachten. Die folgende Beobachtung mit Platinspitzen in luftfreiem destillirtem Wasser gibt dafür ein Beispiel:

Elektromotorische Kraft	
Primär. Strom	Pol.
0·03 D.	0·03 D.
0·20 „	0·20 „
0·37 „	0·36 „
0·43 „	0·43 „
0·60 „	0·60 „
0·90 „	0·91 „
1·28 „	1·28 „
1·54 „	1·53 „
1·94 „	1·90 „
2·11 „	2·00 „
2·31 „	2·03 „
2·54 „	2·03 „
3·09 „	2·03 „
4·03 „	2·03 „

Es fragt sich nun wie die beiden Thatsachen, dass schon bei geringster elektromotorischer Kraft des primären Stromes Polarisation auftritt und dass diese auch viel kleiner sein kann als der definitive, durch die Verbindungswärme der Ionen gegebene Werth, mit der chemischen Theorie vereinbar sind.

Diese setzt voraus dass, bevor Polarisation zu Stande kommt, Ionen ausgeschieden sind, andererseits verlangt das Faraday'sche Gesetz aber, dass diese Ausscheidung in chemisch äquivalenter Menge mit dem Consum im Primärelemente erfolge; nun liefert letzterer Process, z. B. bei Anwendung eines Daniell und Platinelektroden in Wasser, nicht so viel Arbeit als zu ersterem erforderlich ist, so dass es scheint, es könnte überhaupt keine Polarisation eintreten.

Dieser scheinbare Widerspruch löst sich auf folgende Weise. Das Faraday'sche Gesetz basirt wesentlich auf dem Ohm'schen Gesetze, respective es ist an den stationären Zustand im Strome gebunden. In einem Strome, dessen Intensität nicht an allen Punkten dieselbe, bei dem nicht alle Querschnitte gleichzeitig von derselben Elektricitätsmenge durchflossen werden, gilt das Faraday'sche Gesetz nicht mehr; die in den verschiedenen Querschnitten zersetzten Mengen der Elektrolyten werden den respectiven Intensitäten zwar proportional, einander aber nicht mehr chemisch äquivalent sein. Haben wir nun als Stromquelle z. B. ein Daniell und im Voltameter Wasser zwischen Platinelektroden, so herrscht in der ersten Zeit nach Schluss des Stromes im ganzen System keineswegs ein stationärer Zustand,

sondern eine von Querschnitt zu Querschnitt variable Intensität, die im Daniell schon einen beträchtlichen Werth erreicht haben kann, während sie im Voltameter eben einen von Null verschiedenen Werth annimmt. Mit anderen Worten, es gehen in derselben Zeit im Daniell und im Voltameter nicht chemisch äquivalente Processe vor sich, sondern in derselben Zeit, in welcher im letzteren ein Aequivalent Wasserstoff abgeschieden wurde, musste in ersterem viel mehr als ein Aequivalent frei werden.

Danach kann, solange der stationäre Zustand im Strome nicht erreicht ist, der in einer gewissen Zeit vom Daniell gelieferte Wärmewerth sehr wohl grösser sein, als der gleichzeitig im Voltameter verbrauchte, mithin eine thatsächliche Zersetzung des Wassers eintreten.

Die Intensität des Stromes, der das Voltameter durchfliesst, erreicht nicht plötzlich nach dem Schlusse seine volle Intensität, sondern diese steigt allmälig von Null an; die in einer gewissen Zeit ausgeschiedene Menge von Ionen beginnt mit dem Werthe Null und steigt allmälig, gleichen Schritt haltend mit der Steigerung der Intensität. Wenn nun auch nach Herstellung des stationären Zustandes die elektromotorische Kraft der Polarisation gemessen wird durch den auf das Aequivalent berechneten Wärmewerth der zerlegten Verbindung, unabhängig von der absoluten Menge der Zersetzungsproducte, so folgt daraus noch nicht, dass diese absolute Menge auch dann noch ohne Einfluss ist, wenn der ganze Process sich in einem Grenzzustande befindet, also während der wenn auch noch so geringen Zeit, die der primäre Strom zur Entwicklung seiner vollen Intensität gebraucht.

Im Gegentheil, wir sind genöthigt, einen solchen Einfluss der absoluten Menge der Ionen bis zu einer gewissen oberen Grenze anzunehmen, genau so wie wir bei der Zusammenstellung eines gewöhnlichen Elementes voraussetzen müssen, dass seine elektromotorische Kraft in den ersten Momenten nicht plötzlich ihren vollen Werth erreicht, sondern continuirlich von Null an wächst.

Ganz analog liegen nun die Verhältnisse im Wasservoltameter, wenn dasselbe mit nur einem Daniell beschickt wird.

Vom ersten Momente des Schlusses an muss Gas an den Polen ausgeschieden werden und zwar in stets wachsender Menge, solange der stationäre Zustand nicht erreicht ist. Die Polarisation beginnt gleichfalls mit Null und würde, falls die Zersetzung weiter ginge, schliesslich ihren, durch die Verbrennungswärme des Wasserstoffs bestimmten Werth erreichen.

Da sie diesen aber nur durch continuirliche Aenderung erreichen könnte, so muss nothwendig ein Moment eintreten, wo die Polarisation gleich ein Daniell ist; unterhalb dieses Punktes war die Summe der thätigen elektromotorischen Kräfte noch stets positiv; auf diesem Punkte aber wird sie Null, und damit entfällt jeder Grund zur weiteren Zersetzung. Man kommt also hier gar nicht über den Grenzzustand hinaus; die ausgeschiedenen Gase werden demnach auch nicht als solche frei, da sie in ihrer ganzen Menge zur Bildung der Polarisation verwendet werden, von einer sichtbaren Elektrolyse kann in diesem Falle auch nicht die Rede sein. Hätten wir als Stromquelle aber nicht ein Daniell, sondern deren zwei, so dass die primäre elektromotorische Kraft grösser ist als die theoretische Polarisation, so wird solange die ganze ausgeschiedene Gasmenge zur Polarisation verwendet werden, als deren Werth noch von der Menge der Ionen abhängt; ist aber der Grenzzustand überschritten, d. h. die Polarisation von der ausgeschiedenen Menge unabhängig, so werden auch die überzähligen Ionen nicht weiter zur Erzeugung von Polarisation verwendet, sondern werden in Gasform frei. Mit anderen Worten: ist die elektromotorische Kraft der Kette grösser als die der Polarisation, so geht die Zersetzung des Elektrolyten schneller vor sich, als die gleichzeitige Rückbildung desselben.

Das führt uns auch zu einer anderen bisher nicht beachteten und sehr wichtigen Thatsache, dass nämlich die Gase (oder überhaupt Ionen), die im Elektrolyten frei werden, gar nichts mehr mit der Polarisation zu thun haben; nur durch ihr Verschwinden als Gase erzeugen Wasserstoff und Sauerstoff eine Polarisation, aber nicht durch ihre Existenz an den Elektroden; was wir demnach gewöhnlich als Producte der Elektrolyse zu bezeichnen pflegen, das hat mit dem Phänomen der Polarisation gar nichts mehr zu schaffen. Davon kann man sich auch experimentell überzeugen; man kann Platinplatten dick mit Wasser- und Sauerstoff beladen, zu einem Strome geschlossen, wird die Polarisation im Laufe einiger Stunden fast auf Null sinken, aber die Platten werden noch ebenso mit Gasen beladen sein wie früher. Die Gase, die den Polarisationsstrom bildeten, waren eben nicht in Gasform abgeschieden worden, jedenfalls nicht als freie Gase.

Es liegt daher auch nichts Ungereimtes in der Ansicht, dass die starke Polarisation des Platins in Wasser dadurch bewirkt werde, dass der ganze Sauerstoff zur Bildung von Wasserstoffsuperoxyd verwendet wird, während man doch thatsächlich freien Sauerstoff und

nur äusserst geringe Mengen von H_2O_2 als Producte der Elektrolyse erhält; diese Producte sind es eben nicht, die die Polarisation erzeugen, und dass der ganze bei der Rückbildung des Wassers verbrauchte Sauerstoff vorher als Wasserstoffsuperoxyd existirte, das können wir zwar nicht nachweisen, es liegt aber auch nicht der geringste Grund vor, es zu verneinen.

Es wird auch jetzt leicht einzusehen sein, warum die Polarisation nach dem Oeffnen des primären Stromes momentan abzusinken beginnt. Da die freien Ionen nichts zur Polarisation beitragen, so befinden wir uns mit derselben immer am Rande des Grenzzustandes, und die geringste Verminderung der activen Ionen durch Verbrauch bringt den Process in den Grenzzustand hinein, und damit ist ein Absinken der Polarisation bedingt in dem Maasse, als die Rückbildung des Elektrolyten schwächer wird.

Der Process ist derselbe, wie er im gewöhnlichen Elemente stattfinden würde, wenn sich das Zink desselben vollkommen verzehrte; die elektromotorische Kraft dieses Elementes würde gewiss nicht plötzlich auf Null sinken, sondern von einer gewissen, noch vorhandenen Zinkmenge an würde dieselbe allmälig abnehmen.

§ 78. Folgerungen aus der Theorie der galvanischen Polarisation.

Es ist eine bekannte Thatsache, dass eine reine Platinplatte und eine mit Wasserstoff beladene, im Wasser einander gegenübergestellt, einen Polarisationsstrom liefern und diese Thatsache widerspricht scheinbar der chemischen Theorie der Polarisation, denn diese fordert zur Entstehung der Polarisation zwei sich verbindende Körper. Es ist aber auch bekannt, dass das Wasser stets grössere oder geringere Quantitäten von Sauerstoff gelöst enthält und darin haben wir die Ursache des entstehenden Stromes zu suchen. Der am Platin haftende Wasserstoff wird oxydirt, der so entstehende Strom scheidet an der reinen Platinplatte H_2 ab an der mit H_2 bedeckten aber O, der erstere wird durch den gelösten Sauerstoff des Wassers oxydirt und der letztere oxydirt den am Platin haftenden H_2. Solange somit der letztere Vorrath reicht, wird während der Zersetzung eines Moleküls H_2O zweimal H_2O gebildet, wenn an der reinen Platinplatte das Wasser sauerstoffreich genug ist, um allen dort entwickelten H_2 zu oxydiren. In diesem günstigsten Falle würde der verfügbare Wärmewerth der Verbindung (H_2, O) entsprechen, d. i. 69.000 Cal. oder 1·4 D.; in einer ganz sauerstofffreien Flüssigkeit dagegen wäre die Polarisation

gleich Null. Es liegen in der That die beobachteten Werthe zwischen diesen Grenzen, circa bei 0·7 D.

Mit dieser Anschauung stimmt es auch vollkommen überein, dass eine reine Platinplatte mit einer von r e i n e m Sauerstoff bedeckten keinen Polarisationsstrom liefert oder doch nur geringe Spuren eines solchen, die ihre Entstehung ohne Zweifel der Oxydation im Wasser gelöster oder am Platin haftender fremder Substanzen verdanken; ist die eine Platte aber elektrolytisch mit H_2O_2 bedeckt, so gibt sie, mit Pt combinirt, auch einen Strom in Folge des mit Wärmeentwicklung verbundenen Zerfalles des Superoxydes. Dieser Strom hat die entgegengesetzte Richtung von jenen, die in Folge des Entstehens einer chemischen Verbindung auftreten.

Die elektromotorische Kraft der Polarisation, deren Maass der Wärmewerth der eintretenden Reactionen ist, wird gewöhnlich als Ganzes gemessen, indem man die Potentialdifferenz der beiden Elektroden des Voltameters bestimmt; dieselbe setzt sich aber im Allgemeinen aus zwei Kräften, an je einer Elektrode, zusammen, die ihrer Grösse nach ganz von den betreffenden chemischen Processen abhängen und bisher experimentell noch sehr wenig erforscht sind. Für die Combination $Pt | H_2SO_4 aq | Pt$ geben die folgenden Werthe ein Beispiel, wobei jedoch daran erinnert werden muss, dass die einzelnen Werthe aus den früher schon angeführten Gründen je nach der Construction des Voltameters nicht unbeträchtlich schwanken; die hier gegebenen beziehen sich auf grosse Pt-Bleche, zwischen welchen der Widerstand gegen die äussere Schliessung (100 S. E.) zu vernachlässigen war, und auf einen primären Strom von 2 D.

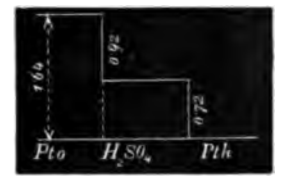


Fig. 94.

Es ist

$Pt_o | H_2SO_4$ . . . . — 0·92 D.

$Pt_h | H_2SO_4$ . . . . + 0·72 „

wenn das Potential der betreffenden Elektrode gleich Null gesetzt ist. Die Summe der Polarisation war in diesem Falle somit: 1·64 D. In Fig. 94 ist das Diagramm des Potentialgefälles angegeben.

Wir wenden uns jetzt zu der Frage nach dem Einflusse den die chemische Natur der Elektroden auf den Process der Elektrolyse hat.

Schon lange ist es bekannt, dass die Elektrolyse des Wassers viel leichter, d. h. mit geringeren elektromotorischen Kräften gelingt,

wenn man die Elektroden nicht aus Platin, sondern aus irgend einem oxydirbaren Metalle verfertigt. Dass dem so sei, davon kann man sich leicht überzeugen, indem man den Strom eines Daniell'schen Elementes mittelst Elektroden aus Kupfer durch angesäuertes Wasser leitet; es tritt sofort eine lebhafte Wasserstoffentwicklung ein, während der elektrolytisch abgeschiedene Sauerstoff zur Oxydation des Kupfers verbraucht wird.

Während im Daniell 1 Aequivalent Zink verbrannt wird, werden im Ganzen circa 50.000 Calorien verfügbar; der im Voltameter in derselben Zeit sich abspielende Process besteht aus zwei Theilen, erstens der Trennung eines Aequivalentes Wasserstoff von Sauerstoff, wobei etwa 69.000 Calorien verbraucht, und zweitens der Oxydation eines Aequivalentes Kupfer durch den ausgeschiedenen Sauerstoff, wodurch etwa 38.000 Calorien erzeugt werden. In Summa beläuft sich demnach die an das Voltameter abzugebende Wärmemenge auf 32.000 Calorien, ein Betrag, der selbst von einer viel geringeren Stromquelle als ein Daniell'sches Element ist, noch geliefert werden könnte.

Gewöhnlich pflegt man die in Rede stehende Erscheinung allgemein so zu erklären, dass man sagt, an oxydirbaren Elektroden sei die Gegenkraft der Polarisation eine geringere, als an Platin, und deshalb gelinge die Elektrolyse mit ersteren leichter. Warum aber an oxydirbaren Elektroden die Polarisation kleiner ist, darüber vermag nur die chemische Theorie Aufschluss zu geben; indem bei Bildung der Polarisation der Wasserstoff des Voltameters sich wieder zu Wasser oxydirt, liefert er bei Platinelektroden 69.000 Cal. = 1·4 D., bei Kupferelektroden dagegen nur 32.000 Cal. = 0·65 D., weil er jetzt das Kupfer aus der Verbindung CuO reduciren muss. Bei der Elektrolyse des Wassers zwischen Kupferelektroden addiren sich die chemischen und elektrischen Kräfte, die gleicherweise den Sauerstoff aus seiner Verbindung mit Wasserstoff zu treiben und dem Kupfer zuzuführen bestrebt sind.

Die Thatsache, dass die Polarisation an oxydirbaren Metallen kleiner, ist allerdings richtig, allein nicht deshalb gelingt die Zersetzung leichter, sondern umgekehrt, weil die Zersetzung zwischen oxydirbaren Elektroden leichter, d. h. mit geringerem Arbeitsverluste verbunden ist, eben deshalb ist die Polarisation an ihnen kleiner.

Wenden wir diese Anschauung auf den Fall der Elektrolyse reinen Wassers zwischen Platinelektroden an, so muss die Polarisation, wie schon früher gezeigt wurde, ungefähr 1·4 D. betragen,

wie dies auch thatsächlich zutrifft, und deshalb ist eben eine grössere elektromotorische Kraft der primären Kette zur effectiven Elektrolyse erforderlich. Enthält das Wasser aber Sauerstoff gelöst, so gestaltet sich die Sache ganz anders. Der entwickelte Wasserstoff verbindet sich in der Flüssigkeit mit dem gelösten Sauerstoff zu Wasser, und der elektrolytisch abgeschiedene Sauerstoff findet nun keinen Wasserstoff verfügbar, mit dem er sich unter Entwicklung eines Polarisationsstromes vereinigen könnte. Die ganze, in der Flüssigkeit gelöste Sauerstoffmenge bleibt ungeändert und erleidet nur insofern eine andere räumliche Vertheilung, als der Sauerstoff allmälig an der einen Elektrode verschwindet und dafür in vermehrter Menge an der anderen auftritt. Es entfällt somit jeder Grund zur Bildung eines Polarisationsstromes, und in der That kann man die Beobachtung machen, dass durch gewöhnliches, also sauerstoffhaltiges Wasser zwischen Platinelektroden von grösseren Dimensionen der Strom der geringsten elektromotorischen Kraft hindurchzugehen im Stande ist; es ist dies die von Helmholtz als elektrolytische Convection bezeichnete Erscheinung. Verwendet man Wollaston e'sche Spitzen, so verschwindet dieselbe bald, weil dann der an der äusserst kleinen Oberfläche der Elektroden angehäufte Sauerstoffvorrath bald erschöpft ist.

Man hat oft versucht, die Polarisation der einzelnen Elektroden dadurch zu bestimmen, dass man in einem Wasservoltameter z. B. die O-Elektrode aus einem oxydirbaren Metall herstellte; es erscheint so nur der H_2 am Platin, während der O zur Oxydation der anderen Elektrode verwendet wird. Wenn man nun meint, auf diese Weise die Wasserstoffpolarisation allein bestimmen zu können, so ist das ein Irrthum, denn eine solche existirt für sich allein nicht, der Wasserstoff muss zu einer Reaction Veranlassung geben und das setzt einen zweiten Pol voraus. Aus dem Umstande, dass im vorliegenden Falle der Sauerstoff an der zweiten Elektrode nicht in Gasform erscheint, folgt noch keineswegs, dass er als nicht vorhanden zu betrachten ist.

Gesetzt, wir würden Wasser zwischen einer Elektrode aus Pt und einer aus Cu elektrolysiren; am Pt soll sich H_2, am Cu aber O ausscheiden. Die Polarisation, die wir so erhalten, würde nach obiger Methode dem Werthe Pt_h entsprechen. Nach der hier gegebenen Theorie dagegen verdankt sie ihre Entstehung der Rückbildung des Wassers, welche aber nicht ohne weiteres durch Oxydation des H_2 stattfinden kann, sondern dieser muss erst das Cu aus seiner Ver-

bindung mit O reduciren; letzterer Process consumirt aber Wärme und der schliessliche Effect entspricht der Differenz der Verbrennungswärme des H_2 und Cu. Dementsprechend wird die Polarisation gleich 0·65 D. gefunden. Wenn wir aber denselben Versuch machen, indem wir die Kupferelektrode durch Eisen ersetzen, so ist der Process zwar ein analoger, aber jetzt muss der Wasserstoff statt Kupfer das Eisen reduciren. Dieses hat aber eine viel grössere Oxydationswärme als Kupfer, die schliessliche Polarisation fällt daher viel kleiner aus; man findet sie = 0·05 D. Wenn man nun diese Methode zur Bestimmung des Werthes Pt_h angewendet hätte, so würde man dafür einmal den Werth 0·65, das andere Mal 0·05 erhalten haben.

Aber selbst wenn an beiden Elektroden stets dieselben Ionen auftreten, so braucht darum die Polarisation noch nicht dieselbe zu sein, denn es kommt sehr darauf an, aus welchem Elektrolyten sie entwickelt wurden, d. h. welcher Elektrolyt bei Bildung der Polarisation wieder entstehen soll; denn davon hängt der Wärmewerth des Processes ab. Die folgende Tabelle gibt dafür ein Beispiel. Die Elektroden bestanden aus Kohle und waren bedeckt einestheils mit H_2, anderntheils mit J, Br oder Cl.

Kohle in	entwickelt aus		
	RH, aq.	RK, aq.	RNa, aq.
J u. H	0·54	1·08	1·25
Br u. H	1·16	1·55	1·78
Cl u. H	1·60	2·04	2·08

Das Zeichen *R* bedeutet dabei resp. J, Br oder Cl. Die Zahlen sind auf das Daniell als Einheit bezogen. Während also J und H aus Jodwasserstoff entwickelt, den Werth 0·54 gibt, erhält man für dieselben Ionen an denselben Elektroden aber entwickelt aus Jodnatrium 1·25. Es begreift sich daher, dass ältere Beobachtungen für die Polarisation des Platins durch Wasserstoff sehr verschiedene Werthe ergeben haben, je nachdem dieser aus Wasser oder Salzsäure entwickelt wurde, und ebenso dass man vom Standpunkte der einseitigen Polarisation für diese Thatsache keine Erklärung zu geben vermochte.

§ 79. Unpolarisirbare Elektroden.

Die Erscheinung, dass gewisse Combinationen von Metallen und Flüssigkeiten unpolarisirbar sind, ist längst bekannt; ihre Erklärung durch die chemische Theorie ist eine ausserordentlich einfache.

Nach dem Vorhergehenden kann eine Polarisation nur dann eintreten, wenn der zersetzte Elektrolyt sich wieder zurückbildet,

wobei die entstehende elektromotorische Kraft durch den Wärmewerth der dabei vor sich gehenden Processe gemessen ist. Ist dieser gleich Null, so muss auch die Polarisation gleich Null sein. Ersteres kann eintreten, wenn im Elektrolyten gar keine rückläufigen Processe stattfinden, so z. B. beim Zink in H_2SO_4, wo der durch die Elektrolyse ausgeschiedene Wasserstoff das Zn aus $ZnSO_4$ reduciren müsste, was nicht möglich ist; oder wenn dieselben an beiden Elektroden gleiche und entgegengesetzte Werthe repräsentiren. Letzteres tritt ein, sobald man eine Salzlösung zwischen Elektroden aus dem zugehörigen Metall zersetzt, z. B. Zink- oder Kupfervitriol zwischen Zink- oder Kupferelektroden etc. In allen diesen Fällen wird an einer Elektrode genau so viel Wärme producirt, als an der anderen verbraucht, denn bei der Rückbildung von $ZnSO_4$ oder $CuSO_4$ müsste das ausgeschiedene Zn oder Cu anderes Zn respective Cu aus der schwefelsauren Lösung reduciren; der Wärmegewinn wäre dem Wärmeverluste genau gleich und somit wird die schliesslich verfügbare Wärmemenge und die Polarisation gleich Null. Diese Gleichheit besteht jedoch selbstverständlich nur so lange, als die Concentration an beiden Elektroden keine wesentliche Aenderung erleidet, und hierin liegt auch der Grund, warum Spuren von Polarisation an derartigen Combinationen meistens angetroffen werden.



Fig. 95.

Es kann also ein Strom ohne Verlust an elektromotorischer Kraft die Combinationen $Zn | ZnSO_4 | Zn$ oder $Cu | CuSO_4 | Cu$ oder $Zn | H_2SO_4 | Zn$ u. s. w. passiren, daraus folgt aber noch keineswegs, dass sich diese wie metallische Leiter verhalten. Untersucht man den Gang des Potentialgefälles z. B. in einem Voltameter $Zn | ZnSO_4 | Zn$, so findet man an jeder der beiden Elektroden einen Potentialsprung; diese sind einander der Richtung nach entgegengesetzt und entsprechen in ihrer Grösse der Reaction (Zn, SO_4), sind also an Grösse gleich. Bezeichnet man das Potential einer Elektrode mit Null, so ist das der anliegenden Flüssigkeit gleich + 1·30 D. Fig. 95 zeigt das Diagramm für den Fall, dass der Widerstand des Voltameters zu vernachlässigen ist.

Ganz analog sind die Verhältnisse bei Kupferelektroden in Kupfersulphatlösung, nur beträgt hier der Potentialsprung nur 0·35 D. entsprechend der Reaction (Cu, SO_4). Bei der Elektrolyse von H_2SO_4 zwischen Zn-Elektroden wurde in einem speciellen Falle beiderseits übereinstimmend der Potentialsprung 1·183 D. gefunden, so dass auch

hier die Summe der Polarisation gleich Null ist. Aus diesen Zahlen ergeben sich natürlich auch die betreffenden Diagramme, falls der Widerstand im Voltameter gegen den äusseren sehr gross ist.

Man ersieht aus dem Vorhergehenden, dass sich die Zahl der unpolarisirbaren Combinationen durch passende Wahl fast beliebig vermehren lässt und dass diese Eigenschaft durchaus nicht nur dem Zn und Cu in den betreffenden Salzlösungen zukommt. So sind z. B. auch zwei mit Wasserstoff oder mit Sauerstoff beladene Platinplatten in Wasser unpolarisirbar; eine einfache Ueberlegung zeigt, dass das genau derselbe Fall ist, wie mit den Zinkelektroden in Zinkvitriollösung oder mit den Kupferelektroden in Kupfervitriollösung etc. Auch hier ist der Wärmewerth des rückläufigen Processes gleich Null, denn der durch Elektrolyse ausgeschiedene Wasserstoff müsste, um Wasser zu bilden, anderen Wasserstoff aus H_2O reduciren.

Dass nicht alle Combinationen die, wenn die Reactionen ganz dem Schema gemäss verliefen unpolarisirbar wären, auch wirklich völlig unpolarisirbar sind, hat seinen Grund in mancherlei secundären Reactionen sowie in den durch die Elektrolyse selbst bedingten Concentrationsänderungen. Die Combination Zn | $ZnSO_4$ aq. | Zn kommt von allen bisher untersuchten dem idealen Zustande am nächsten und kann praktisch als vollkommen unpolarisirbar angesehen werden.

Schliesslich möge als Illustration der hier gegebenen chemischen Theorie der galvanischen Polarisation folgendes Experiment erwähnt werden: Trennt man zwei Kupferplatten durch einen mit Zinkvitriollösung getränkten Papierbausch und schickt durch dieses System einen Strom, so beobachtet man nach Unterbrechung desselben eine Polarisation der beiden Kupferelektroden von genau 1 D. Achtet man nun auf den Process, der bei der Elektrolyse eingetreten ist, so bemerkt man, dass durch dieselbe aus dem Voltameter Cu | $ZnSO_4$ aq. | Cu ein Daniell'sches Element erzeugt wurde, indem an der einen Elektrode metallisches Zn an der anderen SO_4 ausgeschieden und durch letzteres $CuSO_4$ gebildet wurde. Nun schreibt man die Wirksamkeit des Daniell'schen Elementes wohl allgemein den chemischen Processen in demselben zu, gleicherweise wird man daher hier die elektromotorische Kraft der Polarisation als Folge der chemischen Reactionen ansehen müssen, wie es eben die chemische Theorie thut.

Die Wirksamkeit der eben besprochenen Polarisationszelle hört auf, sobald durch den Polarisationsstrom die gebildete $CuSO_4$-Lösung wieder ganz in $ZnSO_4$-Lösung verwandelt, und damit der ursprüngliche Zustand des Voltameters wieder hergestellt ist.

Der vorstehend besprochene Fall kann zugleich als ein Beispiel für die Wirksamkeit der Accumulatoren gelten, die sämmtlich nichts anderes sind als Voltameter, die durch die Elektrolyse in galvanische Elemente umgewandelt werden; der praktische Werth eines solchen Accumulators hängt aber davon ab, ob es möglich ist, die den rückläufigen Process liefernden Substanzen in reichlicher Menge anzusammeln und so dem Polarisationsstrom eine längere Dauer zu sichern.

§ 80. Der Volta'sche Fundamentalversuch.

Wir haben bisher noch kein Phänomen kennen gelernt, aus welchem man auf eine Elektricitätsentwicklung beim Contact zweier Metalle allein schliessen müsste; beim Contact von Metallen und Flüssigkeiten haben wir die chemischen Reactionen als die Ursache der auftretenden Elektricitäten erkannt und ein Ausbleiben der Reactionen auch immer mit einem Ausbleiben von Elektricitätsentwicklung verbunden gesehen. Wir werden daraus schon a priori folgern, dass nach den bisher betrachteten Erscheinungen eine elektromotorische Kraft beim Contact zweier Metalle nicht zu erwarten ist, da bei diesem keine chemischen Actionen vor sich gehen; anders würde sich die Sache gestalten, wenn nur ein einziges Phänomen bekannt wäre, für dessen Erklärung sich die Annahme einer Contactkraft als nothwendig erwiese. Es gibt aber in der That keine einzige Erscheinung, die gegenwärtig zu einer derartigen Annahme nöthigen, ja nur berechtigen würde, denn der sogenannte Volta'sche Fundamentalversuch, aus dem man diese Berechtigung gewöhnlich ableitet, zeigt bei näherer Betrachtung diese Eigenschaft keineswegs; bei der Wichtigkeit dieser Frage wird es geboten sein, um dies darzuthun, auf die Einzelheiten und die Entstehungsgeschichte dieses Versuches näher einzugehen.

Solange den Naturforschern als Quelle der Elektricitätsentwicklung einzig und allein die Reibung bekannt war, konnte von einer Frage nach der Ursache dieses Phänomens nicht viel die Rede sein; man hat sich vielmehr begnügt, das Auftreten derselben als zu den speciellen Eigenschaften der geriebenen Körper, wie Bernstein, Harz etc., gehörig zu betrachten. Erst als mit der Wende des vorigen Jahrhunderts Volta durch seine denkwürdigen Untersuchungen zeigte, dass die Versetzung eines Körpers in den elektrischen Zustand auch noch auf andere Weise gelinge und dass man dabei durchaus nicht auf einzelne Substanzen beschränkt sei, fühlte man, durch das All-

gemeine der Erscheinung dazu angeregt, das Bedürfniss nach einer wissenschaftlichen Erklärung dieses Phänomens. Volta selbst war der erste, der eine solche gab. Er suchte zunächst die Erscheinung auf ihre einfachste Form zu bringen und gelangte so zu dem nach ihm benannten Fundamentalversuche. Er zeigte, dass zwei heterogene Körper — zunächst Metalle — wenn sie in Scheibenform auf einander gelegt und dann mittelst isolirender Handhaben wieder von einander abgehoben werden, sich in entgegengesetzt elektrischen Zuständen befinden; er zeigte weiter, dass es nicht nothwendig sei, dass beide Scheiben unmittelbar auf einander gelegt werden, dass es genüge, sie einander zu nähern und ausserhalb durch einen metallischen Leiter zu verbinden. Doch musste eine solche Verbindung unter allen Umständen, wenigstens an einer Stelle, hergestellt werden.

Nach Ausführung der weiteren bekannten Varianten des Fundamentalversuches schritt Volta zur Aufstellung einer Theorie, welche nicht nur seine Experimente vollkommen zu erklären, sondern auch fernerhin der Forschung wichtige Dienste zu leisten im Stande war. Er stellte den Satz auf, dass zwei Metalle, lediglich durch die Berührung mit einander, entgegengesetzt elektrisch werden, und folgerte weiter, dass die Plattenform derselben nur deshalb von Wichtigkeit sei, um durch die solchermassen ermöglichte condensatorische Wirkung das ursprünglich äusserst schwache Phänomen zu verstärken und der Beobachtung zugänglich zu machen. Zur Aufstellung des sogenannten Spannungsgesetzes kam Volta erst später durch sorgfältige Versuche mit den verschiedensten Metallen; dieses Gesetz ist aber in der Folge von grosser Wichtigkeit gewesen, denn nur durch dasselbe war es möglich, die Contacttheorie mit dem Principe von der Erhaltung der Kraft in Uebereinstimmung zu bringen.

Ueber die Ursache, warum durch den Contact die Metalle in den elektrischen Zustand versetzt werden, hat Volta selbst keine Annahme gemacht; erst um die Mitte dieses Jahrhunderts wurde durch Helmholtz der Sache eine physikalische Deutung gegeben. Die Symmer'sche Ansicht, dass ein jeder Körper im neutralen Zustande gleiche Quantitäten positiver und negativer Elektricität in beliebiger Menge enthalte, und die Voraussetzung, dass die verschiedenen Metalle auch verschiedene Anziehungskräfte für die Elektricitäten besitzen, bildeten den Ausgangspunkt der Helmholtz'schen Hypothese.

Es erklärt sich daraus leicht das Auftreten von Elektricität beim Contact von Metallen; denn wenn z. B. das Zink eine grössere

Anziehungskraft für die positive Elektricität hat als das berührende Kupfer, so wird es diesem so lange positive Elektricität entreissen, bis sich zwischen diesen Kräften und der Tendenz zum Ausgleiche nach Art der ursprünglichen Elektricitätsvertheilung ein Gleichgewichtszustand hergestellt hat. Unterbricht man nun die Verbindung und untersucht beide Metalle gesondert, so enthält das Zink mehr, das Kupfer weniger positive Elektricität als im natürlichen Zustande, ersteres erscheint somit positiv elektrisch, letzteres negativ. Auch das für die Contacttheorie so wichtige Gesetz der Spannungsreihe ergibt sich aus dieser Hypothese von selbst.

Die Einfachheit dieser Hypothese, sowie die Leichtigkeit, mit der sie die bisher erwähnten Erscheinungen erklärt, lässt es begreiflich erscheinen, dass dieselbe bald nahezu unbedingt anerkannt wurde und sich in unveränderter Form bis auf den heutigen Tag als Contacttheorie erhielt.

Doch muss gleich hier auf folgenden wichtigen Umstand aufmerksam gemacht werden.

Es ist nicht zu vergessen, dass die Hypothese der Contactwirkung einzig und allein zum Zwecke der Erklärung des Volta-schen Versuchs aufgestellt wurde und dass auch bis zur Stunde kein weiteres Phänomen bekannt ist, das von neuem nach dieser Hypothese verlangte. Nun hat man sich aber im Laufe der Zeit daran gewöhnt, umgekehrt den Volta'schen Versuch als den experimentellen Beweis für die Existenz der Contactwirkung anzusehen und auszugeben, und das ist ein circulus vitiosus wie er kürzer nicht mehr gedacht werden kann. Davon aber ganz abgesehen ist so viel doch gewiss, dass das Volta'sche Phänomen das einzige ist, welches die Aufstellung einer derartigen Hypothese rechtfertigt, und dass man mit der Erklärung dieser Erscheinung aus anderen und näher liegenden Ursachen auch der Contacttheorie, wenn nicht ihre Berechtigung, so doch ihre Nothwendigkeit entzieht.

Welcher Natur diese anderen Ursachen sind, das ist nach der Art und Weise wie wir die Wirksamkeit eines galvanischen Elementes aufgefasst haben, sehr naheliegend.

Die Unmöglichkeit, die Oberfläche eines oxydirbaren Metalles auch nur kurze Zeit in wirklich reinem Zustande zu erhalten, kann keinem Zweifel unterliegen; es wird dies auch von allen Forschern welche sich in letzter Zeit mit diesem Gegenstande beschäftigten, zugegeben. Dieses Verhalten legt die Vermuthung nahe, in der Bildung und Existenz dieser Oxydschichten an der Oberfläche der Metalle die

Ursache des Volta'schen Phänomens zu finden. Es ist in der That eine Voraussetzung, die man mit Hinblick auf die Wirkungsweise der galvanischen Elemente wohl zu machen berechtigt ist, dass die Oxydation eines Metalles von Elektricitätsentwicklung begleitet sei, und da ferner die Oxyde zu den schlechtesten Leitern der Elektricität gehören, so wird es erklärlich, dass die Oberfläche eines Metalles durch die Einwirkung der Luft in einen längere Zeit dauernden elektrischen Zustand versetzt wird. An diesem wird auch nichts mehr geändert werden, wenn wir das Metall in eine indifferente Atmosphäre oder in das Vacuum bringen. Nach dieser Ansicht beruht die Wirkung beim Volta'schen Versuch lediglich auf der Induction, die zwischen den beiden mit verschiedenen Oberflächenschichten behafteten Metallen auftritt, wobei die äussere metallische Schliessung keinen anderen Zweck und Effect hat, als den, einen Ausgleich der durch die Induction freigewordenen Elektricitäten zu ermöglichen.

Es bleibt dabei vorläufig zweifelhaft, ob das wirksame Agens die Oxydschichten der Metalloberflächen oder die an letzteren condensirten Feuchtigkeitsschichten sind, oder ob endlich — was das Wahrscheinlichste ist — diese beiden Ursachen zusammenwirken.

Den starken Einfluss der chemischen Natur der umgebenden (trockenen) Gase auf den Volta'schen Effect, nicht nur der Grösse, sondern auch dem Vorzeichen nach, hat schon J. Brown[1]) durch eine Reihe schöner Versuche mit Evidenz nachgewiesen. Er bediente sich hierbei nicht eines Plattencondensators, sondern des für derartige Messungen viel praktischeren Thomson'schen Halbringelektrometers; er fertigte die beiden Halbringe eines solchen aus verschiedenen Metallen und umgab dieselben entweder mit Luft oder mit anderen passend gewählten Gasen. Es zeigte sich, dass z. B. das Kupfer eines Kupfer-Nickel-Ringes, das in Luft immer negativ ist gegen Nickel, diese Eigenschaft nicht in allen Gasen behält. So wird es z. B. in einer Chlorwasserstoffatmosphäre gegen Nickel positiv. Die stets gleichnamig elektrische Nadel des Instrumentes, die in Luft nach der einen Seite des Schlitzes, über dem sie schwebt, auswich, geht beim Einleiten von Chlorwasserstoff über die Ruhelage zurück und nimmt eine dauernd entgegengesetzte Stellung ein. Dabei ist noch zu bemerken, dass bei Unterbrechung des Chlorwasserstoffstromes der Ausschlag der Nadel sich wieder verringert. Nun ist auch im Wasser das Kupfer gegen Nickel negativ, in Salzsäure dagegen positiv, d. h.

---

[1]) Phil. Mag. (5) VI, VII.

in letzterer erleidet das Kupfer, in ersterem das Nickel den stärkeren Angriff.

Es folgt aus diesen und weiteren ähnlichen Versuchen mit anderen Combinationen, dass zwischen den Metallen und den sie umgebenden Gasen eine lebhafte, das elektrische Verhalten der ersteren bestimmende Wechselwirkung stattfindet.

Es ist Brown auch gelungen [1]), den Strom direct am Galvanometer nachzuweisen, den man erhält, wenn man eine Zink- und eine Kupferplatte einander so lange nähert, bis die an der Oberfläche haftenden Feuchtigkeitsschichten sich berühren; die Metalle waren möglichst gut geputzt und getrocknet, nichtsdestoweniger erfolgte ein constanter Ausschlag, wenn die Platten noch circa 0·02 mm Distanz hatten, dessen Richtung einem Elemente $Zn \mid H_2O \mid Cu$ entsprach. Wurde die Distanz noch weiter herabgesetzt, so vergrösserte sich der Ausschlag, bis er plötzlich auf Null zurückging, was den Moment der metallischen Berührung der Platten anzeigte.

Es gelingt auch, den Metallen ihre elektrischen Oberflächenschichten durch Erwärmung wenigstens theilweise zu entziehen; so wird z. B. Zink, das für gewöhnlich gegen Kupfer stark positiv ist, durch Erwärmung in einem Luftstrom von ungefähr 300° C. gegen letzteres negativ, d. h. es hat jetzt, entgegen dem gewöhnlichen Verhalten, das Kupfer die stärker elektrische Oberflächenschichte.

Aus diesem Verhalten wird auch begreiflich, warum die Werthe, welche verschiedene Beobachter für den Volta'schen Effect erhielten, so wenig unter einander übereinstimmen; es hängen diese Werthe eben ganz von der jeweiligen Oberflächenbeschaffenheit der Metalle, d. h. von der Art der Reinigung und namentlich von der Zeit, die zwischen derselben und der Beobachtung verflossen ist, ab. In letzterer Beziehung lehrt die Erfahrung, dass die Oberflächenladungen sich alle mit der Zeit der Null nähern, was sich aus einem Verluste an die Umgebung und aus dem Umstande erklärt, dass durch die gebildeten Oxydschichten die Metalle vor weiterem Angriffe geschützt werden. Könnte man eine absolut reine Oberfläche eines oxydirbaren Metalles in Luft herstellen, so würde dessen Ladung sehr rasch von Null ansteigen (in Bruchtheilen einer Secunde) um dann allmälig im Laufe von Stunden und Tagen wieder abzusinken.

Brown hat auch versucht, diese Maximalladung aus dem Verlaufe der Versuche zu bestimmen; Fig. 96 zeigt die Curven zweier

---

[1]) Proc. Roy. Soc. XLI. (1886.)

Versuche mit verschieden gereinigten Zink- und Kupferplatten, wobei die seit der Reinigung verstrichenen Zeiten (in Minuten) als Abscissen und die beobachteten Potentialdifferenzen (in Zehntel-Daniell) als Ordinaten aufgetragen sind. Wie man sieht, verlaufen die Curven Anfangs ziemlich linear, so dass sich der Maximalwerth für die Zeit Null mit genügender Genauigkeit entnehmen lässt; er ist 0·82 bis 0·83 D. Vergleichen wir mit dieser Zahl die in der Tabelle des § 75 gegebenen Werthe für Zn H_2O und Cu H_2O, so finden wir die Differenz der letzteren im Mittel gleich 1·18—0·31 = 0·80 D, so dass mit grosser Wahrscheinlichkeit daraus folgt, dass hier die Oberflächenschichten durch condensirtes Wasser gebildet wurden; jedenfalls erklärt sich auf diese Weise die Wirkung des Zn|Cu-Condensators vollkommen auch ohne Annahme einer Contactkraft zwischen den Metallen, und zwar nicht nur in qualitativer, sondern auch in quantitativer Beziehung.

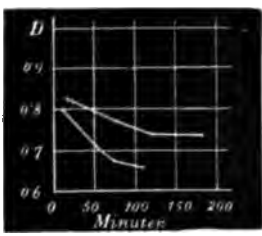


Fig. 96.

Wir werden dem vorstehenden gemäss die Wirkung beim Volta'schen Fundamentalversuch in erster Linie den elektrischen Ladungen der Oberflächenschichten zuschreiben, mögen diese nun durch trockene Oxyde, durch condensirte Feuchtigkeit, oder durch Gase gebildet sein; wäre nur eine trockene Oxydschichte vorhanden, so würde sich der Vorgang beim Annähern einer isolirten Zinkscheibe an eine isolirte Platinscheibe folgendermassen gestalten. Beide Platten sollen vorher zur Erde abgeleitet gewesen sein. Das Platin (das hier als vollkommen reines Metall, ohne Oxydschichte angesehen wird) erhält durch diese Annäherung und die dabei auftretende Induction ein positives Potential, das Zink ein negatives, denn es wird im Platin — Elektricität gebunden und + El. frei; im Zink dagegen wird ein gleicher Betrag der vorher von der positiven Oxydschichte gebundenen — El. frei. Verbindet man beide Metalle durch einen Draht, so gleichen sich diese freien Elektricitäten aus und beide Platten sind wieder auf dem Potential Null. Während der Condensator geschlossen ist, erleidet das Potential somit nur an der Grenze von Zn und ZnO einen Sprung, die beiden Metalle aber befinden sich auf dem Potential der Erde und eben deshalb ist es gleichgiltig, ob der Schliessungsdraht isolirt oder abgeleitet ist. Unterbricht man nun die Schliessung und entfernt beide Platten von einander, so enthält das Platin freie — El. Das Zink dagegen enthält weniger — El. als im neutralen Zustande von der Oxydschichte gebunden wird, und erscheint daher

in gleichem Grade positiv, wie das Platin negativ. Dieses Phänomen rein statischer Induction ist es, mit dem man es im Volta'schen Versuch zu thun hat. Es gelingt nämlich dieser auch ohne directe Verbindung der Platten, wenn man nur einige Male hinter einander abwechselnd die eine und die andere Platte zur Erde leitet. Der Condensator zeigt sich dann genau so geladen, wie bei directem Schluss. Auch lässt sich die Induction, die zwischen zwei isolirten vorher abgeleiteten Platten auftritt, sobald man sie einander nähert, direct am Elektrometer beobachten.

Dass, dem vorstehenden entsprechend, bei Anwendung von Zink oder einem anderen oxydirbaren Metall und Platin ersteres wirklich positiv wird und letzteres negativ, ist eine bekannte Erfahrung.

Bestehen beide Platten aus oxydirbaren Metallen, so dass der einen Oberflächenschichte das Potential E, der anderen e zukommt, so entspricht die Ladung des Condensators der Differenz $E—e$. Haben die Oberflächenschichten der Metalle M_1, M_2, M_3 die Potentiale E_1, E_2, E_3, so ist die Ladung des Condensators $M_1 | M_2$ gemessen durch $E_1—E_2$, die von $M_2 | M_3$ unter übrigens gleichen Umständen durch $E_2—E_3$, und die von $M_1 | M_3$ durch $E_1—E_3$. In diesem Sinne gilt also wohl das Volta'sche Spannungsgesetz, aber man sieht leicht, dass das nur eine äusserliche Uebereinstimmung ist, die das Wesen der Sache nicht berührt.

Wird die Oberflächenschichte nicht durch ein trockenes Oxyd, sondern durch Feuchtigkeit (H_2O) gebildet, so bleibt der Vorgang im Ganzen derselbe, mit dem einzigen Unterschiede, dass die Potentialdifferenz zwischen Metall und Feuchtigkeit während des Versuches als eine constante angesehen werden muss. Im vorstehenden Beispiele hätte man somit die Ladung des Condensators durch die Potentialdifferenz $Zn | H_2O$ gegeben.

Auch die Anhänger der Contacttheorie geben zu, dass die elektrischen Oberflächenschichten unter allen Umständen eine wichtige Rolle beim Volta'schen Fundamentalversuche spielen; während früher für die bei einem Zink-Kupfer-Condensator auftretende elektromotorische Kraft nur der Werth $Zn | Cu$ gesetzt wurde, sieht man sich jetzt genöthigt, die Summe $F_1 | Zn + Zn | Cu + Cu | F_2$ anzunehmen, wobei F_1 und F_2 die Oberflächenschichten bedeuten. Dabei ist aber Folgendes zu bemerken: Dass die Spannung $Zn | Cu$ wirklich existirt, ist durch nichts erwiesen oder auch nur wahrscheinlich gemacht. Man hat dieselbe zu einer Zeit als nothwendig vorausgesetzt, wo man die Metalle noch als vollkommen rein betrachtete und daher

auf keine andere Weise zu einer Erklärung der Elektricitätsentwicklung beim Volta'schen Versuch kommen konnte. Sobald man aber zur Erkenntniss gelangt, dass den Oberflächenschichten bei diesem Processe eine wesentliche Rolle zufällt, kann man die Annahme der Kraft Zn Cu nicht mehr als nothwendig, ja nicht einmal mehr als zulässig betrachten; denn es widerspricht allen Principien einer rationellen Forschung, zur Erklärung eines Phänomens mehr Ursachen heranzuziehen als erforderlich, namentlich aber, wenn dieser Ueberschuss rein hypothetischer Natur ist. Es ist daher eine Forderung der Logik, in dem Ausdrucke $F_1 | Zn + Zn | Cu + Cu | F_2$ den Werth $Zn | Cu$ fallen zu lassen, da derselbe nur so lange eine Berechtigung hatte, als man von der Existenz der Werthe $F_1 | Zn$ und $Cu | F_2$ nichts wusste, und zu untersuchen, ob nicht der Ausdruck $F_1 \, Zn + Cu | F_2$ für sich allein zu einer Erklärung des Phänomens führt.

Zu diesem Zwecke ist es am besten, die Potentiale der zur Erde abgeleiteten frisch geputzten Metalle mit jenen zu vergleichen, welche die Metalle in Verbindung mit Wasser annehmen. In der folgenden Tabelle findet sich eine diesbezügliche Zusammenstellung; die Potentiale der Metalle wurden mit Hilfe einer Tropfelektrode gemessen, die im Innern eines aus dem betreffenden Metalle gefertigten zur Erde abgeleiteten Cylinders tropfte. Die Potentialdifferenzen zwischen den Metallen und reinem Wasser wurden auf ganz analoge Weise gewonnen, nur dass der Hohlcylinder jetzt aus Wasser bestand und durch das zu untersuchende Metall zur Erde abgeleitet war. Die Einheit der Werthe ist das Daniell.

Metall	Cylinder	in H_2O
Na	+ 2·47	+ 2·64
Mg	+ 1·38	+ 1·65
Zn	+ 1·08	+ 1·11
Al	+ 0·98	+ 0·85
Pb	+ 0·72	+ 0·73
Sn	+ 0·67	+ 0·69
Fe	+ 0·56	+ 0·59
Cu	+ 0·33	+ 0·31
Ag	+ 0·18	+ 0·12
Pt	+ 0·05	+ 0·00
Au	— 0·05	— 0·02

Wie man aus dieser Tabelle ersieht, kann es kaum einem Zweifel unterliegen, dass frisch geputzte Metallflächen stets mit einer Wasser-

schichte bedeckt sind und dass der Volta'sche Effect in seiner ganzen Grösse einer Oxydation des Metalles zuzuschreiben ist; es liegt daher in der That kein Grund vor, an der von Volta aufgestellten Contactkraft zwischen Metallen unter einander länger festzuhalten.

Die Reihe, in welcher in vorstehender Tabelle die Metalle geordnet sind, ist zugleich die Reihe der Oxydirbarkeit, nur das Aluminium hat eine etwas zu tiefe Stellung, was offenbar mit seiner bekannten Eigenschaft, sich in Wasser mit einem unlöslichen Ueberzuge zu bedecken, im Zusammenhange steht. Die beobachteten elektromotorischen Kräfte lassen sich leider nicht quantitativ mit den Wärmewerthen der Reactionen vergleichen, weil für die meisten der verwendeten Combinationen die Natur dieser Reaction nicht genügend bekannt ist.

Es folgt aus dem Vorstehenden, dass der Volta'sche Fundamentalversuch sich nicht nur qualitativ, sondern auch quantitativ vollkommen aus dem chemischen Verhalten der Metalloberflächen erklärt; die geringen Differenzen, die in obiger Tabelle namentlich bei den stark oxydirbaren Metallen auftreten, sind nicht überraschend, wenn man bedenkt, dass die Oxydation einmal im Wasser, das andere Mal in der molekularen Feuchtigkeitsschichte an der Oberfläche des Metalles vor sich geht. In der von den Contacttheoretikern für die Potentialdifferenz A eines Condensators aus den Metallen M_1 M_2 aufgestellten Gleichung: $A = F_1|M_1 + M_1|M_2 + M_2|F_2$, wo F_1 und F_2 wieder die Oberflächenschichten bedeuten, ist demnach der Werth von $M_1|M_2$ jedenfalls sehr klein gegen $F_1|M_1 + M_2|F_2$, wenn er überhaupt vorhanden ist; gegenwärtig spricht nichts für die Existenz dieses Werthes, und wenn man noch bedenkt, dass derselbe seinerzeit einzig und allein zur Erklärung des Volta'schen Versuches aufgestellt wurde, so wird man sich in der That vergebens nach einem Grunde zu dessen weiterer Annahme umsehen.

In folgender Weise wäre die Existenz eines ähnlichen Werthes jedoch denkbar: wenn zwei Metalle, die mit einander zu inniger Berührung gebracht werden, an der Contactstelle eine Legirung oder chemische Verbindung bilden, so würde dieser ein gewisser Wärmewerth und damit auch eine gewisse elektromotorische Kraft entsprechen; diese Werthe müssten, falls sie existiren, jedenfalls ausserordentlich klein sein, und es wäre nicht unmöglich, dass z. B. der Peltier'sche Effect die Folge einer solchen Contactkraft ist. Diese Ansicht wurde schon wiederholt ausgesprochen und auch die nach derselben sich ergebenden Grössen der Contactkräfte bestimmt; diese

sind von der Grössenordnung eines Tausendstel Daniell und darunter, so dass wohl nicht der geringste Zweifel sein kann, dass man es hier nicht mit jenen elektromotorischen Kräften zu thun hat, die seinerzeit Volta zur Erklärung seines Fundamentalversuches herangezogen hat.

Sollten sich übrigens die eben besprochenen Contactkräfte als wirklich existirend erweisen, so würden sie sich doch, als durch chemische Reaction hervorgebracht, von jenen in einer galvanischen Kette durchaus nicht unterscheiden.

Man hat den Volta'schen Fundamentalversuch auch oft mit Anwendung einer Flüssigkeitsplatte an Stelle des zweiten Metalles ausgeführt, um so die elektromotorische Kraft zwischen Metallen und Flüssigkeiten zu bestimmen; dabei ist jedoch stets ganz übersehen worden, dass sich hier zwei Wirkungen superponiren, nämlich die Induction, die von der Oberflächenschichte des Metalles auf die Flüssigkeit (wie auf eine Platinplatte) ausgeübt wird, und die Ladung des Condensators in Folge des chemischen Angriffes, welchen der die beiden Platten verbindende Metallbügel erleidet. Man kann diese beiden Wirkungen sehr gut getrennt darstellen, indem man sich einmal oxydirbarer Metallplatten bedient, als Bügel jedoch eines Platindrahtes, das andere Mal, indem man eine unoxydirbare Platte (Kohle, Platin) durch Drähte aus oxydirbaren Metallen mit der Flüssigkeitsplatte verbindet.

Es ergibt sich wohl von selbst, wie man bei Ausserachtlassung dieser Umstände zu ganz falschen Resultaten gelangen muss, so z. B. wenn man den Werth Zn H_2O dadurch bestimmen wollte, dass man einen Condensator aus Zn und H_2O durch einen Zinkdraht schliesst: viele der abnormen Resultate älterer Beobachter erklären sich durch die Anwendung dieser falschen Methode.

Druck von Wilhelm Köhler, Wien, VI. Mollardgasse 41.

